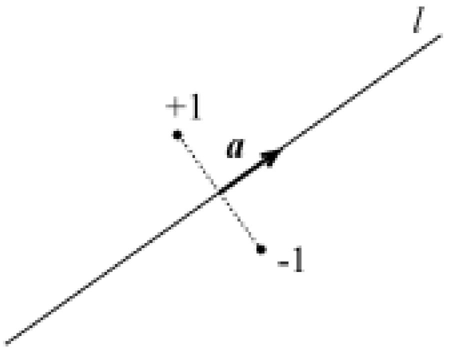
モーメントの和とメネラウスの定理

川崎徹郎

1　モーメント（偶力）

平面上の 2 点に，平面に垂直な力 f が，同じ大きさで反対方向に働いている状態を**モーメント（偶力）**という。2 点を**力点**といい，その垂直 2 等分線をモーメントの**軸**という。2 点間の距離を $2r$ とおき，r と力の大きさの積 rf をモーメントの**大きさ**という。軸と大きさの等しいモーメントは同じものとする。力点を軸方向に平行移動しても，モーメントは変わらない。また，力点の間隔を a 倍し，力を $\dfrac{1}{a}$ 倍してもモーメントは変わらない。

モーメントを，軸である直線 l と軸に平行で長さがモーメントの大きさに等しいベクトル a の対 (l, a) 表すことにする。ベクトルの向きは左に正（上向き）の力点，右に負（下向き）の力点があるものとする。ベクトルが右ねじの進む方向を与えるような回転力を表していると考えられる。

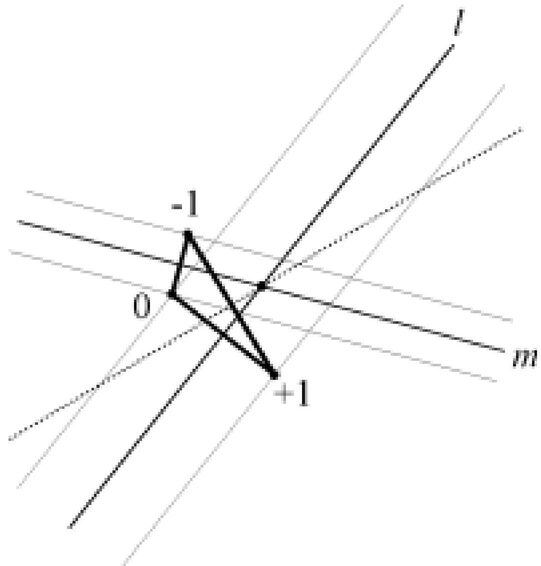


2 つのモーメント (l, a)，(m, b) が，それぞれ力点 A, A' と B, B' で定まっているとする。このとき，たまたま $\mathrm{A}' = \mathrm{B}$ で，そこに働く 2 つの力の大きさが等しく，逆向きのとき，2 つのモーメントの和 (n, c) を，残った力点 A, B' で定まるモーメントとする。

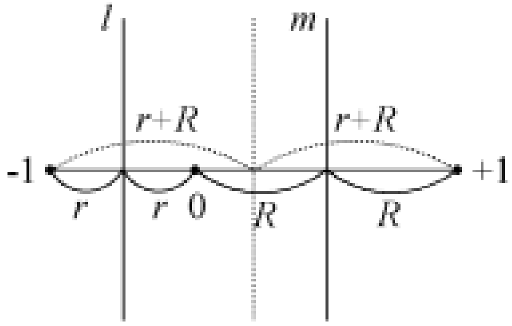
性質　(i) l，m が平行でないとき，n は l，m の交点を通り，c = a + b が成り立つ。

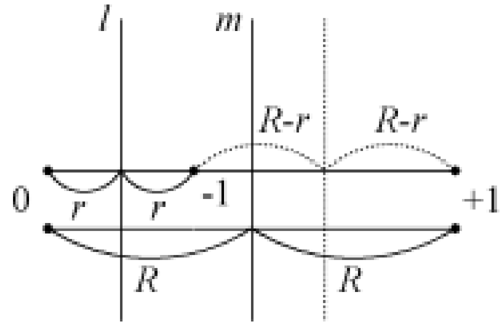
(ii) l，m が平行のとき，a + b が 0 でなければ，n は l，m と平行で，モーメントの大きさの逆数に比例して，l，m を内分または外分する。内分，外分は a，b の平行，逆平行による。c = a + b である。

(iii) a + b = 0 のとき，モーメントの和は定義されない。



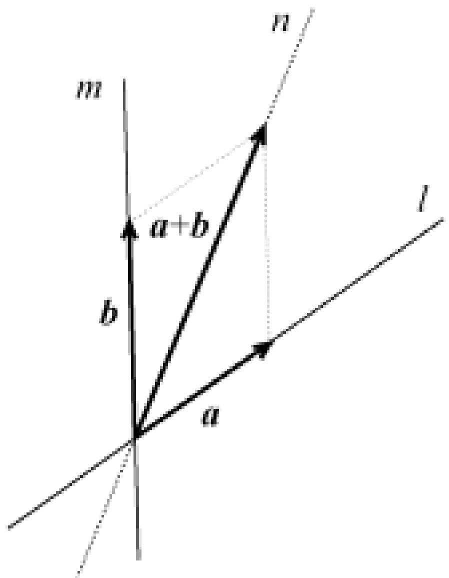
交点を通るのは，それが，力点のつくる三角形の外心になっているからである。

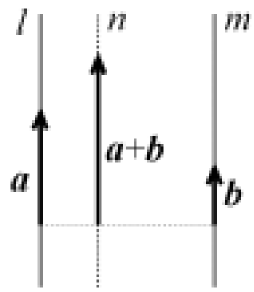


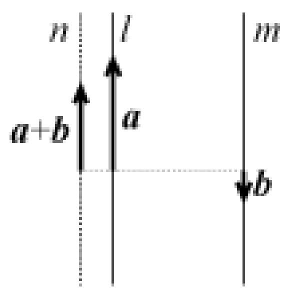


このように，2 つのモーメントの和のベクトル部分はベクトルの和に対応する。その軸は，2 つのモーメントが平行でなければ，交点を通り，平行のときは，大きさの逆数に内分または外分する点を通る。

平面上のモーメント全体の空間に自然に位相を定めることができる。この位相に関して，和は連続であることがわかる。


n
m
l
a+b
b
a


l
n
m
a
a+b
b


n
l
m
a+b
a
b

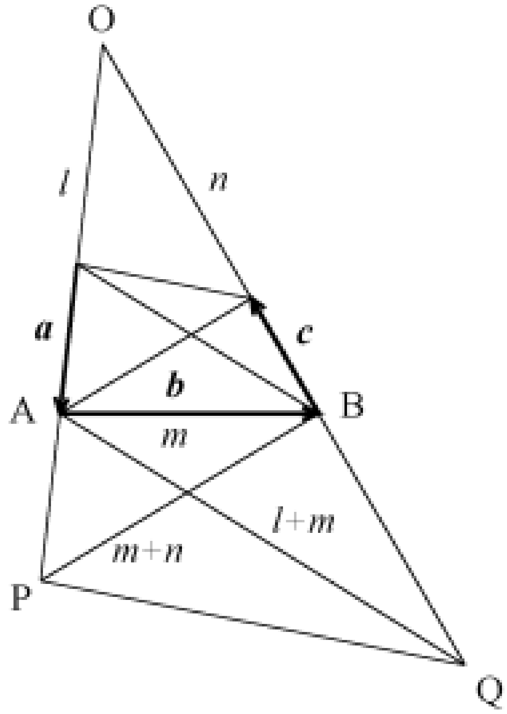
性質　モーメントの和は定義されるかぎり，結合的である。

証明　3 つのモーメントを，$(l, \mathrm{a}), (m, \mathrm{b}), (n, \mathrm{c})$ とし

$$\{(l, \mathrm{a}) + (m, \mathrm{b})\} + (n, \mathrm{c}) = (l, \mathrm{a}) + \{(m, \mathrm{b}) + (n, \mathrm{c})\}$$

を示す。和は連続であるから，生成的な場合に示せば十分である。そこで，5 つのベクトル $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{a} + \mathrm{b}, \mathrm{b} + \mathrm{c}$ はどの 2 つも平行でなく，3 直線 l, m, n は三角形をつくると仮定する。

ベクトル部分は普通の和であるから，その結合性は明らかである。軸の位置のみが問題である。n と l の交点を O，l と m の交点を A，m と n の交点を B とする。簡単のため，$\{(l, \mathrm{a}) + (m, \mathrm{b})\}$ の軸を $l + m$ で，$\{(m, \mathrm{b}) + (n, \mathrm{c})\}$ の軸を $m + n$ で表す。$\{(l, \mathrm{a}) + (m, \mathrm{b})\} + (n, \mathrm{c})$ は $l + m$ と n の交点 Q を通り，$(l, \mathrm{a}) + \{(m, \mathrm{b}) + (n, \mathrm{c})\}$ は $m + n$ と l の交点 P を通るから，線分 PQ がベクトル $\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$ に平行であることを示せばよい。



O を位置ベクトルの始点とする。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \mathrm{O} + \alpha\,\mathrm{a} \\
\mathrm{B} &= \mathrm{A} + \beta\,\mathrm{b} \\
\mathrm{c} &= \gamma\,\mathrm{a} + \delta\,\mathrm{b} \\
\mathrm{Q} &= \mathrm{A} + s\,(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \mathrm{B} + t\,\mathrm{c} \\
\mathrm{P} &= \mathrm{A} + u\,\mathrm{a} = \mathrm{B} + v\,(\mathrm{b} + \mathrm{c})
\end{aligned}
$$

s, t, u, v を求める。

$$
s = \frac{\beta\gamma}{\gamma - \delta}, \quad t = \frac{\beta}{\gamma - \delta}, \quad u = \frac{-\beta\gamma}{1 + \delta}, \quad v = \frac{-\beta}{1 + \delta}
$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= s\,(\mathrm{a} + \mathrm{b}) - u\,\mathrm{a} \\
&= \frac{\beta\gamma(1 + \gamma)}{(\gamma - \delta)(1 + \delta)}\,\mathrm{a} + \frac{\beta\gamma}{\gamma - \delta}\,\mathrm{b} \\
&= \frac{\beta\gamma}{(\gamma - \delta)\,(1 + \delta)}(\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c})
\end{aligned}
$$

問題点　a = 0 のとき，モーメントとして 0 と考えることはできない。実際，そのように考えると，平行 2 直線 l, l' に対して，$(l, \mathrm{a}) + (l', -\mathrm{a}) = 0$ が成り立つことになる。すると

$$
\begin{aligned}
(l, \mathrm{a}) &= (l, \mathrm{a}) + \{(l, -\mathrm{a}) + (l', \mathrm{a})\} = \{(l, \mathrm{a}) + (l, -\mathrm{a})\} + (l', \mathrm{a}) \\
&= (l', \mathrm{a})
\end{aligned}
$$

となり，結合性が失われる。ただし

$$
(l, \mathrm{a}) + (m, \mathrm{b}) = (n, \mathrm{c})
$$

のとき

$$
(n, \mathrm{c}) + (l, -\mathrm{a}) = (m, \mathrm{b})
$$

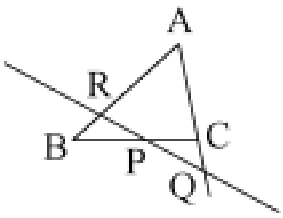
は成り立つ。

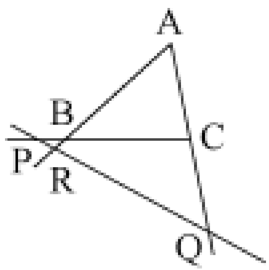
2　メネラウスの定理

三角形の 3 辺に適当にベクトルを配して，モーメントを定める。その和がメネラウスの定理を満たすことを示す。

定理　(メネラウスの定理) 三角形 ABC と直線 l に対し，3 辺との交わりを P, Q, R とすると

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$





内分，外分の区別をつけるために，これらの比を位置ベクトルで表して

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-u)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}
\end{aligned}$$

とおくと

$$\text{P, Q, R は 1 直線上にある} \iff \frac{s\,t\,u}{(1-s)(1-t)(1-u)} = -1$$

と表すことができる。右辺の -1 は内分が偶数個，外分が奇数個であることを示している。モーメントの和を利用してこの式を示そう。

ここで

$$\mathrm{a} = \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \quad \mathrm{b} = \beta\,\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \quad \mathrm{c} = \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

とおき，モーメント (BC, a), (CA, b), (AB, c) の和を $(l, \mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})$ とする。

$$(\mathrm{BC}, \mathrm{a}) + (\mathrm{CA}, \mathrm{b}) + (\mathrm{AB}, \mathrm{c}) = (l, \mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})$$

l は3辺BC, CA, ABとそれぞれP, Q, Rで交わるものとする。いま，(CA, b) + (AB, c) の軸は A を通る。また，(CA, b) + (AB, c) は (BC, a) を足すと $(l$, a + b + c) になるから，その軸は P を通る。したがって

$$(\mathrm{CA}, \mathrm{b}) + (\mathrm{AB}, \mathrm{c}) = (\mathrm{AP}, \mathrm{b} + \mathrm{c})$$

である。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = r\,(\mathrm{b} + \mathrm{c})$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = r\,\mathrm{b} + r\,\mathrm{c} = r\beta\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} + r\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

一方

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1 - s)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって

$$\frac{s}{1 - s} = -\frac{\beta}{\gamma}$$

同様に

$$\frac{t}{1 - t} = -\frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{u}{1 - u} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

したがって

$$\frac{s\,t\,u}{(1 - s)(1 - t)(1 - u)} = -\frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = -1$$