「考えることを学ばせる」ということについて

公田　藏
（立教大学名誉教授）

１．

平成 17（2005）年１月の「数学教育の会」で，筆者は類似の表題で次のようなことを発表した．

かつては知識を得たり，技能を身につけたりするためには努力が必要であったが，今日の高度技術化・情報化社会においては，さして努力をしなくても多数のさまざまな情報を入手することができるし，職場では機械化・自動化が進み，日常的な業務を行うには，あらかじめ定められた手順（マニュアル）にしたがって簡単な作業（操作）をするだけでよく，多くの勤労者は，かつての職人のような高度の専門的知識や技能を必要としなくなっている．この点だけから見れば，今日では苦労して学ぶということの必要性は少なくなったということができるかもしれない．

しかし，科学・技術の急速な進歩にともなって，今日の社会は急速に変容している．このような急速に変容していく社会に対処して生きていくために必要なのは，新しい状況に対処して，適切な判断，処理を行って生きてゆく力である．そのためには，自ら学ぶことと考えることが重要な役割を果たす．しかし，現在の学校教育では，現実には，知識を与え，それを覚えさせることのほうに重点がおかれ，それに比して，考えることや，進んで自ら学ぶことについての指導は軽く扱われているように思われる．数学についても例外ではない．

もちろん，計算などの基本的な技能を身につけされることや，重要な定理や公式を理解させ，確実に記憶させてそれを応用することなどは重要である．日常的なことがらには一応それで足りるから，数学教育はそれで十分であると考える向きもあるが，数学は単なる計算術や公式運用術ではない．重要なことは，数学的な見方，考え方と，それを応用することを学ばせることである．特に，それらを通して，考えること，推論すること，自分の考えたことを順序立てて整理して述べることを学ばせることは，これからの時代を生きてゆくために極めて重要である．

考えること，自ら学ぶことの指導は，高校や大学になってからでは手遅れであって，できるだけ早くから，機会をとらえて適切に指導する必要があると考える．小学校の段階から,「なぜだろう」という疑問をもたせ，問題によっては，その理由を考えさせるようにすることが重要である．数学において，考えることを学ばせるのに特に適している教材は文章題と幾何であると考えるが，このいずれもが，現在は軽く扱われている．また，考えることを学ばせるためには出題，発問の形式として，従来からの「次の計算をせよ」,「何々を求めよ」,「何々を証明せよ」という形式のものに加えて「何々について，どのようなことがわかるか」「どうしたらよいか」などのような形の問いかけをして，生徒に考えさせるようにすることが必要である．

この小論はその「続き」あるいは「補足」である．

２．

学校数学における数学的活動の中で,「問題解決」の果たす役割は大きい.「考える」ということの指導も，もっぱら問題解決を通してなされてきた．そして，その際になされてきたことは，いま解こうとしている問題で，与えられたものは何で求めるものは何かを考えて，それまでに学んだ定理や公式でこの問題の解決に役立ちそうなものを探し，その中のどれとどれを用いたら解けるであろうかを考えて，それを実行してみることであった．特に，与えられた問題を，既知のことがらをどのように用いて解くか，すなわち，どこに目をつけて，どのような定理・公式を利用して解くかに重点をおいて指導されてきた．これは数学における考え方，問題の解き方としては基本的なことがらであって，教科書にあるような普通の練習問題を解くのには，これで十分であり，受験指導でもこれで一応は足りたのである．

しかし，わが国では，近年，数学の授業時間が減少し，指導内容も少なくなり，教科書にある練習問題の多くは，その項目で学んだ定理や公式の適用によって容易に解けるものになってしまい，どのように考えて問題を解くかではなく，いま学んだ定理や公式をどのように適用するかという段階に止まってしまったように思われる．考えることを学ばせるためには，考えなければならない問題を提示し，実際に考えさせることが必要である．

３．

単なる公式の適用ではなく，多少考えなければ解けない問題を与える場合に，いま学んだ定理や公式を応用するという場合はともかくとして（その場合は，そのような定理，公式を使うということが重要なヒントとなる），ある特定の方法によらなければ解くことが難しい問題は，その特定の方法に気がつかなければ如何ともし難いので，一般論としていえば，あまり適当ではない．これに対して，いろいろな解法のある問題は，数学におけるいろいろな考え方，問題解決へのさまざまなアプローチの仕方を学ばせる上で大きな意味をもつ．一つの問題に対してのさまざまなアプローチを考えることは，現実の問題（数学とは限らない）に対処する方法として重要である．

以前は，いろいろな解法のある問題では，生徒に別の解法を考えさせたり，教師のほうで別解を示すなどのことが，授業の際に行われていた．近年は授業時間数が少なくなったため，そのような指導がなされることは以前よりは少なくなってきたように思われる．個々の問題に対して，比較的労力を要することなく解けて，しかも類似の問題に対しても応用できるような方法に限って指導され，それ以外のものは，迂遠であるとか，試験場での解法としては適当ではないなどの理由から斥けられているように思われるのである．少ない授業時間を有効に利用した「効率的な」授業をしようということからであろう．もちろん「定石」を学ぶことや，典型的な問題について，着眼点やあまり手間をかけない解法を学ぶことは重要であるが，答の出し方の「効率」のみを重視する数学教育が数学教育の改善になるかどうかについては，慎重な検討がなされる必要があると考える．

問題解決を通して数学を学ばせる際に，さまざまな考え方やいろいろな解き方を示すのには，ある程度の時間が必要である．そして，単にいろいろな解き方を示すだけでなく，それらの解法を比較検討することが重要であり，その際には「非効率的」な解法も，

それなりの意味があると考えるのである．次の節で，例によって，いろいろな解き方を通して，数学におけるさまざまな考え方を指導することについて述べる．

4．

例 1．鶴と亀がいて，頭の数は合わせて 20，足の数は合わせて 52 本である．それぞれ何匹ずついるか．

［解 1］全部の場合を調べることによって解を求める（スペースの関係上，表は一部省略した）．

鶴	20	19	18	17	16	15	14	13	$\cdots$	2	1	0
亀	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	18	19	20
足の数	40	42	44	46	48	50	52	54	$\cdots$	76	78	80

この表から，答は鶴 14，亀 6 匹である．

［解 2］

$20 \times 2 = 40$
$52 - 40 = 12$
$12 \div 2 = 6$　　（亀の頭数）
$20 - 6 = 14$　　（鶴の頭数）

［解 3］亀の頭数を x とすれば，足の総数は $40 + 2x$ となるから，

$$40 + 2x = 52$$

これを解いて　$x = 6$，したがって鶴の頭数は $20 - 6 = 14$．

［解 4］鶴の頭数を x とすれば，亀の頭数は $20 - x$ となるから，

$$2x + 4(20 - x) = 52$$

これを解いて　$x = 14$，したがって $20 - x = 6$．

［解 5］鶴，亀の頭数をそれぞれ x，y とすれば，

$$x + y = 20, \qquad 2x + 4y = 52$$

これを解いて　$x = 14$，$y = 6$．

以上の五つの解法の中で,［解 2］は鶴亀算の昔からの算術（算数）での解法である．昔から鶴亀算は算術の中で難しいとされてきたものである.「ふつうの」算数の問題解決の指導では,［解 1］は迂遠で実用的ではないとして斥けられると思われるが，まず［解 1］のように表を作って考えれば，亀が 1 匹多くなるごとに足の数が 2 本ずつ増えることがわかるから，難しいといられてきた［解 2］はさして困難なく導かれるであろう．同様な考え方で［解 3］も容易に得られる．このように,［解 1］は，すべての場合を数え上げることの指導や，関数の考え方の指導に役に立つのである.［解 1］,［解 2］,［解 3］には関

数の思想が入っている. ［解 3］, ［解 4］, ［解 5］は方程式利用で, ［解 4］は一元一次方程式を学ぶ際によく扱われる解法である．連立一次方程式による［解 5］は，問題の文章をそのまま方程式に表せばよいので，一元一次方程式を作る［解 4］よりは式を立てるのがやさしいともいえる（［解 4］の中には［解 5］の連立一次方程式と，それから y を消去するという考え方が入っていると見ることができる）. ［解 5］の連立方程式の解き方についても，代入法，加減法などいくつかの方法がある.

算数で文章題を扱う場合は，上の［解 2］のように，式だけを記して，言葉による説明はあまりつけないということが行われてきたが，これは和算の問題の解答の術文の影響とも考えられる．言葉による説明がないため，式が記されていても，どのように考えて何を計算しているのか，行われている計算の意味がわかりにくく，これが文章題を難しくしている一つの原因となっていると考える．これは改善する必要があると思うのである．なお, ［解 2］の方法による場合に，亀の頭数を求める部分を一つの式にまとめて,

$$(52 - 20 \times 2) \div 2 = 6$$

のように記しているのをみることがある．一つの式にまとめるということは，数学では当たり前のようになされることであるが，この式で表される内容は, ［解 2］の一つ一つの式で表されるものより複雑である上に，その背後には公式を用いて解くという思想, ［解 3］の方程式がある．算数での考え方，問題解決の指導の第一段階としては，このような長くて複雑な式に表して答えを求めるというのはどんなものかと思うのである.

方程式を利用して文章題を解く場合には，何を未知数に選ぶかによって方程式の形も変わるし，解き方の難易にも違いが出る．このようなことについても，機会があればどこかで指導しておくのがのぞましいと考える（教科書にあるようなふつうの問題では，求めるものを未知数に選べばそれですむことが多いのであるが）.

例 2．周の長さ 20cm の長方形のうち，面積の最大なものを求めること.

長方形の隣り合う二辺の長さ を x cm，y cm とし，面積を $S\,\mathrm{cm}^2$ とする.

［解 1］x の二次関数　$S = x(10 - x)$ の最大値を調べる.

［解 2］$S = x(10 - x)$ を x の二次方程式とみて，実数解をもつ条件から S の最大値を求める.

［解 3］相加平均と相乗平均の不等式の利用.

［解 4］恒等式　$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ の利用.

［解 5］$S = x(10 - x)$ から微分法を利用する.

［解 6］幾何学的考察．図を描いて，一辺の長さが 5cm の正方形と，正方形ではない長方形の面積とを比較する.

大学初年級で学ぶ数学の内容まで含めて考えるならば，条件つき極値の問題として扱うこともできる. ［解 6］は中学生でもできると思われるので，この問題は中学校から大学まで使える（［解 6］だけならば，どういう図を描いてくらべるかをヒントとして与えれば，小学生でもできるであろう）.

上の［解 1］と［解 2］, ［解 3］と［解 4］は，数学的には本質的に同じ原理に基づく解法であるが，生徒にとっては異なる方法による解き方である．これらが本質的には同じ原理に基づいていることに気づかせることも，時には意味のあることであろう.

例３．積分 $\int \sin x \cos x \, dx$ を求めること．

［解 1］正弦の二倍角公式の利用（ついで $2x = t$ と置換する）．

［解 2］置換積分による（ $\sin x = t$ とおく）．

［解 3］部分積分による．

大学初年級の数学まで考えると，不定積分の計算では，それほど複雑ではない関数で，いろいろな方法で積分が求められるものがいくつもある．それらの中には，いわゆる「定石」によらず，被積分関数に注目して考えるほうが簡単にできるものもある．たとえば，三角関数の有理関数の積分では $\tan \frac{x}{2} = t$ と置換して有理関数の積分に帰着させるのが一つの「定石」であるが，上の例 3 でこの置換を行うと，有理関数の積分にはなるが，積分の計算はめんどうである．

例４．いろいろな方法で証明できる幾何の定理の代表的な例は，三平方の定理である．

高校の段階では，幾何の問題を扱うのに，初等幾何以外に，座標やベクトルを利用することができる．平面幾何の場合には複素数の利用も考えられるであろう（複素数が高校数学の内容に含まれた場合）．しかし，いつでもこれらのすべてのの方法が使えるとは限らないし，問題によって，どの方法がよいかが変わってくる．

例５．三角形の五心はいずれも三直線が一点に会することを扱っている．第一段階は，いろいろな三角形について図を描いてみることにより，いま問題としている三直線が一点で交わるであろうと予想することである（幾何ソフトを使えば，これらの三直線が同一の点を通ることは簡単にわかるが，筆者の好みとしては，ここは実際に手を使い，紙の上に図を丁寧に描くことにより，生徒自身に発見させたいのである）．ついでその証明を考えることになる．

初等幾何では，外心，内心，傍心，重心の存在は，二つの直線の交点を考えて，その点が第三の直線に関してどのような関係にあるかをみることによって証明する．しかし，垂心については，三角形の各頂点を通り対辺に平行な直線を引いて作られる三角形を考え，もとの三角形の各頂点から対辺に引いた垂線は，この三角形の各辺の垂直二等分線となることから，外心の存在に帰着させて証明するのがふつうの方法である．これは，既知の命題（外心の存在）に帰着させて証明するという，証明に際しての基本的で重要な方法の例になっているが，各頂点を通り対辺に平行線を引くということに気がつかなければお手上げである．

座標を利用すれば，外心，重心，垂心については，それぞれ座標軸を適当に選べば，それほど複雑な計算をしないで証明できる．証明の方針は初等幾何による場合と同様で，二直線の交点を求め，この点が第三の直線上にあることを示すことにより，三直線が一点に会することを証明するのである．ベクトルを利用する場合にも，各頂点の位置ベクトルを考えれば，大して複雑な計算なしに証明できる．内心と傍心は，角の二等分線の性質を考えて少し工夫すれば，座標やベクトルで扱えるが，高校生には難しいと思われる．

直線は二点で決まり，円は三点で決まるから，三点が一直線上にある，あるいは四点が一つの円周上にあるということは，それらの点が特別な位置関係にあることであるということを認識させ，そのような共点，共線，共円の関係や，長さや角に関する性質な

どから，幾何のおもしろさに眼を向けさせることも重要であると考える．そのような一つの例として，次の定理がある：

例６．三角形の外心，重心，垂心は一直線上にあり，しかも重心は外心と垂心を結ぶ線分を 1 : 2 に内分する．

この定理はEuler（1765）によるもので，この直線は三角形のEuler線と呼ばれている．

この定理については，まず，いろいろな三角形を描き，その外心，重心，垂心を作図することによって，これら三点が同一の直線上にあることを予想させ，ついでこの予想が正しいかどうかを考えさせるということが考えられる．図をある程度の大きさで丁寧に描けば，予想することまではそれほど難しくはないであろう（このことも，さきの三角形の五心の場合と同様に，幾何ソフトを使えば簡単にわかるが，やはり実際に手を使い，紙の上に図を丁寧に描くことにより，生徒自身に発見させたいのである）．

この定理の証明にはいくつかの方法がある．

［方法1］外心 O と重心 G を結ぶ線分 OG の G を越えた延長上に点 H を GH = 2OG となるようにとり，この点 H が垂心であることを証明する．

この方法による証明は初等幾何でもできるし，ベクトルでもできる．ベクトルを利用する場合は，外心を原点にとって各頂点の位置ベクトルを利用すればよい．

［方法2］（19世紀の幾何学者Steiner（1833）による）．三角形の各頂点を通り，対辺に平行線を引いて作られる三角形は，もとの三角形と相似で相似比は 2 : 1 であるが，この二つの三角形は重心を共有し，しかもこの共通の重心を相似の中心として相似の位置にある．両三角形の外心を考えれば，この定理は直ちに得られる．

その他にもいくつかの方法があるが，すべての生徒に対して証明を考えさせることは無理かとも思われるし，証明をさせる場合にも，場合によっては若干のヒントを与える必要があろうと考える．

なお，Eulerの原証明は，多少現代的な表現をするならば，三角形 ABC の三辺の長さを BC = a, CA = b, AB = c とし，頂点 A を原点，辺 AB を x 軸の正の部分にとり，外心 O，重心 G，垂心 H の座標を求め， OG, GH, OH の長さ（の2乗）を計算することにより示すもので，かなりめんどうな計算を行っている（原論文はEuler全集第26巻, pp. 139 –157に収録されている）．

５．

いろいろな方法で解ける問題については，代表的ないくつかの方法を比較・検討し，それぞれの方法の長所（場合によっては短所）を理解すること，そして，問題に応じて，そのようないろいろな方法の中の適当なものが使えるようにすることが重要である．

まわりくどい，迂遠な方法でも，それで問題が解けたならば，一応はそれでよしとして，次に，無駄な回り道を避けるなど，よりよい方法を考えればよいのである（これは学校数学とは限らない．数学そのものの進歩・発展の歴史は，このことを示している）．迂遠な方法をとりながらも，それで問題を解くことができたというのは，それなりの実力（数学的体力というほうがよいのかもしれない）があればこそのことであって，その際に行った数学的活動は，決して無駄ではないと考える．

生徒に考えさせる指導を行う際に，生徒が「考えてみたけれどもわかりません」といった場合に，どのように指導・助言をするかは重要である．適切な方策はケース・バイ・ケースであって，提示された問題と，生徒の実情に則して指導・助言がなされることである．

与えられた問題をある方法で解こうとして途中でつまずいた場合に，それまでに考えたり計算したことを全部捨てて，再び一からやり直すというのは一つの方策であるが，それまでの努力は決して無駄ではない．その際いろいろと考えたこと，実行したことは別の場面で有効に機能することがある．「この種の問題はこのように考えて，このように取り組んでも解決できない（とその時は思った）」ということだけでも，それが役に立つということはあるし，実は何でもない所で計算ミスをしていたため，どうにもならなくなったということもある（計算ミスのチェックは，計算直後よりも少し時間をおいてからのほうが発見しやすいようにも思われる）．

生徒がある方法で解こうとして途中でつまずいたり，解答に欠陥があった場合に，教師が正しい解答を示す際には，まず生徒が意図した方法で解いて，その後によりよい方法による解法を示すのが適当である．しかし，どうも教師は，特に生徒の方法が多少迂遠なものであったときなどは，生徒が試みた方法を完全に否定して，最初から全部やり直して，うまい解答だけを示したくなるようである．これは一つには時間の問題もあるが，生徒の試みた方法に沿って解答を作り上げるのは，教師の力量の問題でもある．生徒にとっては，自分の試みたことがまったく否定されてしまうというのは，あまりよい印象はもたないであろう．近年の学校や生徒の状況を仄聞すると，生徒によっては自分自身が完全に否定されてしまったと思い込んでしまう場合もあるのではないかとも思われる．(筆者自身，このようなことは頭ではわかっていたつもりでも，実際の授業の場では，生徒の方法を生かす指導をしてこなかったことが多かったことを反省している．授業が終わって教室を出た後に，ここはこうすればよかったと思うこともしばしばであった．次の授業の際に補足説明をしたこともあるが，時間がたつと気が抜けたようになっていて，その場で指導したときほどには効果が上がらなかった.)

少ない授業時間をどのように利用して数学教育を充実させるかは重要なことであるが，あまりにも効率一辺倒ではどんなものかと思うのである．時には多少「非効率的な」授業によって，立ち止まって数学を味わい，数学の情景を楽しむことも必要である．それによって数学の美しさやおもしろさを味わうとともに，いろいろな考え方などにも接することができ，それはその後の数学の学習に寄与するところが大きいと考えるのである．

6．

一つの問題が解けた場合に，その発展をして新たな問題を考えてみることも重要である．教師が問題を提示するだけではなく，時には生徒に問題を考えさせるということもなされてよいであろう．

たとえば，第 4 節で扱った例 2 の発展としては，次のような問題が考えられる．

例 7．

［問題 1］面積が一定な長方形のうち，周の長さが最小なものを求めること．

［問題 2］周の長さが一定な三角形のうち，面積が最大なものを求めること．

この［問題 2］は現在の高校生には少し難しいと思われるので，これに条件をつけ加えた

［問題 2′］周の長さが一定な二等辺三角形のうち，面積が最大なものを求めること．
のほうが適当かもしれない．

大学初年のレベルまで考えれば，

［問題 3］稜の長さの和が一定な直方体のうち，体積が最大なものを求めること．

［問題 4］体積が一定な直方体のうち，稜の長さの和が最小なものを求めること．

［問題 5］表面積が一定な直方体のうち，体積が最大なものを求めること．

［問題 6］体積が一定な直方体のうち，表面積が最小なものを求めること．

これらの問題を解くことは，それほどむずかしくはないであろう．

（註）現在は高校までの段階では，多面体についても,「稜」ではなく「辺」という用語が用いられている．これは術語をできるだけ少なく，しかも平易にしようということからであると思われるが，多面体の稜と多角形の辺とは，類似の性質ももっているが，異なる概念で，たとえば英語で記された幾何の教科書でも edge と side と区別して用いられているし,「稜」は山岳の稜線などのように日常的にも用いられているので,「稜」という用語はどこかで指導することが適当であると考える．用語の平明化は必要であるが，概念を明確にするために適切な用語を用いることは重要である．特に論理的思考を重視するという場合にはなおさらである．

しかし，急速に変容するこれからの社会に対応するためには，それだけではなく，生徒にとって「未知の新しい問題」に対して，既知の知識を動員してどこまで解決できるか，時にチャレンジさせてみることが重要であると考える．その場合，必ずしも「完全な解答」を要求するのではなく，時には部分的解決でよい．

次はそのような問題の一つの例である．

例８．

(1)　一次関数のグラフと反比例のグラフとを学んだ程度の段階で，関数

$$y = x + \frac{1}{x}\,, \qquad y = x - \frac{1}{x}$$

のグラフのおよその形を描かせる，

(2)　二次関数のグラフを学んだ段階で，

$$y = \frac{1}{x^2+1}\,, \qquad y = \frac{1}{x^2-1}\,, \qquad y = \frac{x}{x^2-1}$$

のグラフのおよその形を描かせる．

これらの関数のグラフのおよその形を描くだけならば，分数関数の微分法はいらない．むしろ，これらの関数の性質をもっと調べて精密にグラフを描こうということから，微分法や曲線の変曲点などを導入するというのも一つの方法であろう．なお，グラフ電卓を利用すれば，これらの関数のグラフはすぐわかるが，これはいわば考えないで問題の答えを見るようなもので，考えること，特に，未知のものに対して，どのように考え，対処していくかを学ばせるという視点からこれらの問題と取り扱う場合には，使わないほ

うがよいと考える．もちろん，時と場合によってはそうした道具を使いこなすことも重要である．

7．

「考えること」の指導では，考えて得られたことを，順序立てて明確に説明することを学ばせる（証明を書く，口頭で説明するなど）も重要である．これは，自分の主張を明確に人に伝えることであり，理詰めで人を説得することである．なお，数学の場合は，考えて結果に到達するまでの過程そのものを述べることは，必ずしも得られた結果を筋道を立てて明確に説明することにはならない．ここに数学のむずかしさ（生徒にとっての）がある．

加えて，もう一つ重要なことがある．それは，ある命題から，その必然的結果（論理的帰結，命題の系）としてどのようなことがあるかを考えることである．特に，いくつかの基本命題を認めれば，それからどのようなことがらが導かれるかということに注目させることは重要である．このような論理的思考力をつけることは，単に数学とは限らず，これからの時代にはきわめて重要である．

かつて初等幾何が学校数学の重要な一科目であった時代では，生徒は幾何の学習を通して自然にこのようなことについて考え，学んだのである．しかし，学校数学における幾何の取り扱いの変容によって，このようなことに心を向けさせ，考えさせる場は学校教育から失われてしまったのである．このような状況のままでよいかどうか，いま改めて検討する必要があると考えるのである．

付記　本稿は平成 19 年 9 月および平成 20 年 1 月の「数学教育の会」での発表内容に加筆を行ったものである．