高専生による数学研究の概要

— 自然数aのn乗の研究，一般カプレカー数の研究，レプユニット数のカプレカー操作，
k-パスカル三角形に関する定理（二項定理の一般化）—

津山工業高等専門学校　松田　修

平成１８年度～１９年度において，津山高専数学クラブは，次の抽象的な問題に取り組んだ．

テーマ：自分たちにとって面白い数を発見し，かつそれを研究する．

８人の２年生のクラブ員が３チームに分かれ，それぞれのチームにとっての面白い数を探した．そして３年の修了時までその数の研究を続けた．

１．自然数aのn乗の研究の概要

この研究は新免 康陽, 小津野 将で行われた. 彼らは先輩にあたる井上, 山本等の11^n　や　$111^n, 1111^n$などの考察から，k-パスカル三角形やk-フィボナッチ数列の研究へ大きく発展したことに影響を受けて，一般的な自然数 a に関し，a^nの研究に興味を覚えた．まず，彼らは，5^nに現れるm桁目の数をb_{mn}としたとき，b_{mn}に周期性があることを発見し，m桁目のb_{mn}の周期の長さが2^{m-1}であることを証明した．そして周期性の核となる一般的な定理を見つけ証明した．

定理１　mを$m \geq 2$なる整数とする．このとき，$5^{2^{m-2}} \equiv 1 \mod 2^m$ が成り立つ．

定理１より，5^nに現れるm桁目の数列b_{mn}の周期が2^{m-1}となる系を証明できた．さらに，彼らは，一般的な自然数aに関し，a^nに同様な周期性を見出す定理を見つけそれを証明した．定理２では整数論のフェルマーの小定理を一般化したオイラーの定理を前提としている．

定理２　a, z を互いに素な自然数とする．さらに，$a^d \equiv 1 \bmod z^u$ をみたす最大のuをtとする．このとき，$a^{dz^m} \equiv 1 \bmod z^{m+t}$ が成り立つ．

定理２は，a^nの各桁の数列が十進数において周期性をもつことだけでなく，一般的な進数においても周期性があることを示すことができるという意義があった．さらに十進数におけるa^nの各桁の数列の周期性が群$\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$のaで生成される部分群$< a >$の位数に関係していることも発見し，その一般的な命題を定理２の系として示した．

また，aが偶数の場合a^nのm桁目の数列の周期は$z \cdot 5^{m-1}$という形であるが，m桁目の数列の周期をwとし，m桁目の数列の周期列を$\{b_{1,}, b_2, \cdots, b_w, b_{w+1}, \cdots, b_{2w,} b_{2w+1}, \cdots, b_{5w}\}$とし，$b_1 \neq b_{w+1}$を仮定すれば，$i$を固定したとき得られる集合$\{b_{jw+i}\}$は，すべて異なる偶数か，すべて異なる奇数であることも証明した．

２．一般カプレカー数の研究の概要

この研究は竹久 和宏，中村 和樹，細尾 倫成で行われた．彼らは，最初コラッツの問題等に興味を覚え，それに取り組んでいたが，なかなか良い研究方法が見つからず，２ヵ月ほど苦戦していた．そんなとき，何気に見ていた　「数の辞典」（D.ウェルズ，芦ヶ原伸之・滝沢清訳，東京図書）の中に，

$$4^2 = 16,\ 34^2 = 1156,\ 334^2 = 111556,\ 3334^2 = 11115556$$

の表を見つけた．この表から細尾は$33\cdots34$は２乗して得られる数を前半の$11\cdots1$と後半の$55\cdots56$に分割し，$55\cdots56-2\times11\cdots1$という操作をすることで，元の数$33\cdots34$に戻ることを発見した．そこで，$33\cdots34$を発見者である細尾の名前から H 数とし，より一般に H 数の定義を，n桁の数tの２乗数を，下n桁の数aとその上の桁の数bにより$t^2=a+b\cdot10^n$と分割し，$t=a-2b$となる数であるとした．その後 H 数は$33\cdots34$以外にどのような数となるのかという調査を開始した．$33\cdots34$以外で H 数となる数が18及び$166\cdots68$であることがすぐに得られた．しかし，５桁目に突然に14287となる H 数が表れた．この数は$33\cdots34$や$166\cdots68$のような系列は持たない．その後，14287のような系列を持たない H 数が，５桁に４個，６桁は無く，７桁目に３個，８桁に９個，９桁に 11 個あることをコンピュータによる計算から発見した．何故このような数が H 数となって表れるのか，H 数を決めている構造は何なのか，彼らの関心はこのような問題に移っていった．

彼らは，その研究において，H 数と類似の性質をもつ数にカプレカー数と呼ばれるものがあることを知った．そして，インターネット上でカプレカー数に関するホームページや論文などを探し，Douglas E. Iannucci の The Kaprekar Numbers という Journal of Integer Sequences, Vol.3(2000)に掲載された論文を見つけた．彼らは慣れない英訳に挑んだ．そして，その中の主定理が，彼らが知りたかった問題に対応することを知った．その後，Kaprekar Numbers の主定理を自分たちのH数に関する定理に書き換え，さらに一般的に定義した一般カプレカー数の定理を作り，証明した．

定義１　kを N 桁の自然数，tを$|t|<10^n$である整数，αを自然数とする．このときkがタイプ(α,t)のn桁カプレカー数とは，$k^2=a10^n+b, \alpha k=ta+b$が成り立つときをいう．ただし，$0\le b<10^n$．タイプ$(\alpha,t)$の$n$桁カプレカー数全体を$K(\alpha,t,n)$と表わす．

定義２　$\gcd(d,d')=1$のとき，$\mathrm{Inv}_\alpha(d,d')$を$dm=\alpha \mod d'$となる最小の自然数$m$とする．

定理　$dd'=10^n-t$，　$\gcd(d,d')=1$，　$m=\mathrm{Inv}_\alpha(d,d')$，$m'=\mathrm{Inv}_\alpha(d',d)$　とする．このとき，$0\le(\alpha-t)dm+tmm'<10^n$ならば $dm\in K(\alpha,t,n)$数である．逆に，$k\in K(\alpha,t,n)$とする．このとき，$\gcd(k,k-\alpha)=1$ならば，$dd'=10^n-t$，　$\gcd(d,d')=1$となるd,d'が存在して，$k=d\cdot Inv_\alpha(d,d')$となる．

３．レプユニット数のカプレカー操作の概要

この研究は中村 和樹によって行われた．中村は，1 桁からk桁までがすべて 1 であるレプユニット数$R_k=11\cdots1$のカプレカー操作から得られる数に興味を覚えた．

まず，${R_k}^n$を考える．そして，${R_k}^n$を下の桁からk桁ずつ区切る．区切られた区間でできた数を合計する，この操作をR_kのn乗カプレカー操作といい，$Kp[{R_k}^n]$と表わす．たとえば，${R_3}^3=111^3=1367631$であるが，

$$Kp[{R_3}^3]=1+367+631=999$$

となる．まず，$Kp[{R_k}^2]$のデータをコンピュータで出力させ，その性質を調べた．その結果，$Kp[{R_k}^2]=\bar{k}R_k$となっていることを発見した．ここで，$\bar{k}\equiv k \bmod 9$であり．$k\equiv0 \bmod 9$なら$\bar{k}=9$と定める．その後，$Kp[{R_k}^3]$,$Kp[{R_k}^4]$, $Kp[{R_k}^5]$に関するデータを上と同様な立場で調べた．その結果次の予想を得た．

予想　nを固定し，$Kp[{R_k}^n] = \alpha_{n,k}R_k$ とおくと，$\alpha_{n,k}$は自然数で周期的であり，周期の長さは9^{n-1}である．

上の予想を解決するために, 現在k-パスカル三角形の構造と${R_k}^n$の構造を比較する研究を行っている. k-パスカル三角形とは，$(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)^n$の係数で作る数の三角形のことであり，$k=2$のときがパスカル三角形となる．$k$-パスカル三角形の特徴は$n$段目に並ぶ数をすべて足すと$k^n$となることである．しかし，この研究においては，次の命題が重要と考えられている．

命題　n段目に並ぶ数を左から，a_1，a_2，$\cdots$，a_k，$a_{k+1}, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}, \cdots, a_{nk-n+1}$とすれば，$a_i + a_{k+i} + a_{2k+i} + \cdots + a_{nk+i} = k^{n-1}$である．

$a_i + a_{k+i} + a_{2k+i} + \cdots + a_{nk+i}$を考慮して, $\mathrm{T} = k^{n-1}R_k$ を考えると, $Kp[{R_k}^n] = \alpha_{n,k}R_k$　から, k^{n-1}と$\alpha_{n,k}$に対応関係があるように思える．この対応がはっきりと分かれば，予想の証明に強い手がかりが得られると考えられている．

４．k-パスカル三角形に関する定理（二項定理の一般化）の概要

この研究は，松本 博充，三村 真史，横見 和也で行われた．上にも述べたが$(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)^n$の係数で作る数の三角形のことを$k$-パスカル三角形という．彼らは$x^t$ $(0 \le t \le n(k-1))$ の係数を求める研究を行った．$k=2$のときはパスカル三角形なので二項定理により，x^tの係数は，$_n\mathrm{C}_t$であることはよく知られている．しかし，$k \ge 3$となると，たちまち難しくなる．よく知られた多項定理を用いて計算できなくはないが, 場合分けが多くなる. 彼らは, 縦k本, 横k本からなる正方形の格子を考え, 斜め45°の各直線上にある格子点の総数が，$(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)^2$の係数を表していることを，「数の辞典」（D. ウェルズ，芦ヶ原伸之・滝沢清訳，東京図書）の中で見つけた．そこで，３次元空間で同様な正方格子を作り，斜め45°の各平面上にある格子点の総数を調べたところ，やはり$(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)^3$の係数との関係が見えた．これは４次元正方格子でも同様な結果を得た．この幾何学的考察により，$(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)^n$の係数は$n$次元超三角錐数を計算することから得られるという結論に達した．彼らの得た公式は以下である．

定理　$(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)^n$の$x^t$ $(0 \le t \le n(k-1))$の係数をα_tとすると，

$$\alpha_t = \sum_{0 \le j \le [t/k]} (-1)^j \cdot {}_{u-jk}\mathrm{C}_{n-1} \cdot {}_n\mathrm{C}_j$$

ここで，$u = t+n-1$で，$[t/k]$はt/kを超えない最大の整数とする．

たとえば，$(x^2+x+1)^5$のx^4の係数α_4は，$k=3, n=5, t=4$より，$u=8$で，

$$\alpha_4 = \sum_{0 \le j \le 1]} (-1)^j \cdot {}_{8-3j}\mathrm{C}_4 \cdot {}_5\mathrm{C}_j = {}_8\mathrm{C}_4 - {}_5\mathrm{C}_4 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 = 45$$

となる．上に述べたように彼らはこの証明を，n次元超三角錐数を使って行ったが，学習院大学飯高茂教授の助言により$(1-x^k)^n/(1-x)^n$のベキ級数展開を考えることで証明できることを知った．この研究に関する学生の詳細な報告は，http://www2.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/mathclub.html にある．

自然数aのn乗の研究

新免泰陽

津山工業高等専門学校　電気電子工学科３年

１．はじめに

昨年，私達の先輩の行った11…1のn乗をk－パスカル三角形に発展させた研究を知りそれ以外の自然数aのn乗の研究をしようと思った。初めは，巨大な数ということで対数関数を使った方法で研究を始めた。しかしこの方法で研究を進めていくには難しいことが判ったので，他の方法で研究を進めていくことにして，初めに2^nから研究を開始した。しかし，最初の頃は2^nにこれといった法則が発見できなかったため，10^nは簡単に判ることから2^nに対応する5^nから研究することにした。そして，5^nの中に潜む周期性の発見から，十進数以外の一般的な進数におけるa^nに関する周期性の定理を得た。

なお，本研究は小津野 将（電気電子工学科３年)から数値計算のプログラミングなどの協力を得た．ここに感謝する．

２．5^nについて

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & & & & & 5 & \leftarrow & 5^1 \\
 & & & & 2 & 5 & \leftarrow & 5^2 \\
 & & & 1 & 2 & 5 & \leftarrow & 5^3 \\
 & & & 6 & 2 & 5 & \leftarrow & 5^4 \\
 & & 3 & 1 & 2 & 5 & \leftarrow & 5^5 \\
 & 1 & 5 & 6 & 2 & 5 & \leftarrow & 5^6 \\
 & 7 & 8 & 1 & 2 & 5 & \leftarrow & 5^7 \\
3 & 9 & 0 & 6 & 2 & 5 & \leftarrow & 5^8 \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^0 & &
\end{array}
$$

5^nを上図のように並べて各桁に注目すると，１桁目には５，２桁目には２しか現れないので周期の数を１と考える。３桁目を見ると，１と６で繰り返しているので周期の数は２となる。同じ視点で見ると，４桁目は４，５桁目は８，６桁目は１６が周期の数となっているので，n桁目の周期の長さは，2^{n-2}と考えられる。

【定理１】m を２以上の自然数とする。このとき，

$$5^{2^{m-2}} \equiv 1 \mod 2^m$$

（証明）$m=2$ の場合　$5^{2^0}=5=4+1$　より　$5\equiv 1 \mod 2^2$　で成り立つ。

$m=k$ まで成り立っていると仮定する。このとき　$5^{2^{k-2}}=q\cdot 2^k+1 \quad (q\in\mathbf{N})$　という形になっている。

$m=k+1$ のとき

$$5^{2^{k-1}}=(5^{k-2})^2=(q\cdot 2^k+1)^2=q^2\cdot 2^{2k}+q\cdot 2^{k+1}+1$$

したがって

$$5^{2^{k-1}} \equiv 1 \mod 2^{k+1}$$

よって数学的帰納法より定理１は成り立つ。（証明終）

【系１】$n\geq m+2$ とする。このとき，

$$5^{n+j\cdot 2^m} \equiv 5^n \mod 10^{m+2} \quad (j=1,2,\cdots)$$

（証明）　定理１より　$5^{2^m}=q\cdot 2^{m+2}+1 \quad (q\in\mathbf{N})$　とできる。また，$n\geq m+2$ より，

$5^n=q'\cdot 5^{m+2}$　となる $q'\in\mathbf{N}$ が存在する。$j=1$ のとき，

$$5^{n+2^m}=5^n(q\cdot 2^{m+2}+1)=q'q\cdot 10^{m+2}+5^n$$

よって，$5^{n+2^m}=5^n \mod 10^{m+2}$ が成り立つ。

$j=k$ まで成り立っていると仮定する。すなわち，$5^{n+k2^m}=q''10^{m+2}$ を仮定する。$j=k+1$ のとき

$$5^{n+(k+1)2^m}=5^{n+k2^m}\cdot 5^{2^m}=(q''\cdot 10^{m+2}+5^n)(q\cdot 2^{m+2}+1)$$

$$=q''\cdot q\cdot 10^{m+2}\cdot 2^{m+2}+q''10^{m+2}+q'q\cdot 10^{m+2}+5^n$$

よって，$5^{n+(k+1)2^m}\equiv 5^n \mod 10^{m+2}$ が成り立つ。

従って数学的帰納法により系１は成り立つ。（証明終）

【オイラーの定理】　mを正整数とする。もし，$\gcd(a,z)=1$ならば，$a^{\phi(m)} \equiv 1 \mod m$ である。ここで，$\phi(m)$ は m のオイラー関数である。

次の定理２は定理１を一般化したものである。

【定理２】$\gcd(a,z)=1$ とし，$a^d \equiv 1 \mod z^u$ を満たす最大な u を t とする。このとき，

$$a^{dz^m} \equiv 1 \mod z^{m+t}$$

（証明）　仮定より $a^d \equiv 1 \mod z^t$ なので，$m=0$ のときは成り立つ。

$m=k$ の時まで成り立っていると仮定する。すなわち，$a^{dz^k} = q'z^{k+t}+1 \quad (q' \in \mathbf{N})$ となっているとする。

$m=k+1$のとき

$$a^{dz^{k+1}} = \left(a^{dz^{k+1}}+1\right)^z = (q')^z z^{z(k+t)} + \cdots + {}_z\mathrm{C}_1 q' z^{k+1+t} + 1$$

したがって

$$a^{dz^{k+1}} \equiv 1 \mod z^{k+1+t}$$

よって数学的帰納法により定理２は成り立つ。（証明終）

【系２】　$n \geq m+t$ のとき

$$a^{n+jdz^m} \equiv a^n \mod (az)^{m+t} \quad (j=1,2,\cdots)$$

（証明）　定理２より $a^{dz^m} = qz^{m+t}+1 \quad (q \in \mathbf{N})$ と書ける。また，$n \geq m+t$ より $a^n = q'a^{m+t}+1$ となる $q' \in \mathbf{N}$ が存在する。 $j=1$ のとき

$$a^{n+dz^m} = a^n a^{dz^m} = a^n(qz^{m+t}+1) = q'q(az)^{m+t} + a^n$$

よって $a^{n+dz^m} = a^n \mod (az)^{m+t}$

$j=k$ まで成り立っていると仮定する。すなわち，$a^{n+kdz^m} = q''(az)^{m+t} + a^n$ を仮定する。$j=k+1$ のとき

$$a^{n+(k+1)dz^m} = a^{n+kdz^m} \cdot a^{dz} = (q''(az)^m + a^n)(qz^{m+t} + 1)$$
$$= q''q(az)^{m+t} z^{m+t} + q''(az)^{m+t} + q'q(az)^{m+t} + a^n$$

したがって，$a^{n+(k+1)dz^m} \equiv a^n \quad \bmod (az)^{m+t}$ である。

よって数学的帰納法により系２は成り立つ。（証明終）

４．十進数における a^n の考察

a が５で割り切れない奇数の場合について考える。このとき $\gcd(a,10)=1$ なので，系２より

$$a^{n+j10^m} \equiv a^n \quad \bmod (10a)^{m+t}$$

よって

$$a^{n+jd10^m} \equiv a^n \quad \bmod 10^{m+t} \qquad （４．１）$$

を得る。式（４．１）より a^n は $m+t$ 桁において $d \cdot 10^m$ で周期していることを意味する。

例えば $a=3$ ならば $3^4 = 8\times 10+1$ より $d=4, t=1$ である。よって 3^n の $m+1$ 桁の周期の長さが $4\cdot 10^m$ といえる。$a=19$ ならば $19^2 = 36\times 10+1$ より $d=2, t=1$ である。よって，19^n の $m+1$ 桁において $2\cdot 10^m$ で周期している。

a が５で割切れない偶数の場合について考える。このとき $\gcd(a,5)=1$ なので系２より

$$a^{n+jd5^m} \equiv a^n \quad \bmod (5a)^{m+t}$$

よって，

$$a^{n+jd5^m} \equiv a^n \quad \bmod 10^{m+t} \qquad （４．２）$$

を得る。（４．２）より a^n は $m+t$ 桁において $d \cdot 5^m$ で周期していることを示す。

例えば，$a=2$ なら $2^4 = 3\times 5+1$ より $d=4, t=1$ なので 2^n の $m+1$ 桁において $4\cdot 5^m$ で周期している。$a=24$ なら $24^2 = 115\cdot 5+1$ より $d=2, t=1$ なので 24^n の $m+1$ 桁において 2×5^m で周期している。

５． a^n と群

前節の考察により十進数における a^n の $m+t$ 桁の周期は a の一桁の周期は同じ周期をもつ。つまり，a_1 を a の一桁の数とし，z を a が奇数なら $z=10$，a が偶数なら $z=5$ として考えると，

$$a_1^{n+jdz^m} \equiv a_1^n \quad \bmod 10^{m+t} \qquad （５．１）$$

$$a^{n+jdz^m} \equiv a^n \quad \bmod 10^{m+t} \qquad （５．２）$$

であり，$m+t$ 桁目において dz^m で周期している。

ところで，加法群 $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ の部分群 $\langle a_1 \rangle$ を考える。そして，その位数を $\#\langle a_1 \rangle$ と表す。この時，明らかに（５．１）を満たす z について，

$$z = \#\langle a_1 \rangle = \#\langle a \rangle$$

が成り立つ。　このことは，系２から一般的な進数に関してもいえる．

６． a^n の周期の特性

【定理３】a を偶数とし，a^n の m 桁目の１周期列を $\{b_1, b_2, \cdots, b_{5w}\}$ とし，$b_{w+1} \neq b_1$ とする。このとき集合 $\{b_i, b_{w+i}, \cdots, b_{4w+i}\}$ $(1 \le i \le w)$ はすべて異なる偶数か，全て異なる奇数である。

（証明）以下，$\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ で考える。

a^n の $m-1$ 桁目の数列に a をかけたとき，繰り上がりが加算されて m 桁目の b_i を得るとき，加算される数列を $\{l_1, l_2, \cdots, l_w\}$ とする。すなわち，$b_0 = b_{5w}$ とすると

$$b_1 \equiv ab_0 + l_1 \quad , \quad b_2 \equiv ab_1 + l_2 \quad , \quad \cdots \quad , \quad b_{jw+i} \equiv ab_{jw+i-1} + l_i, \quad \cdots$$

とする。ここで $x_1 \equiv b_{w+1} - b_1$ とおくと，$b_{w+1} \neq b_1$ より $x_1 \neq 0$ であり，

$$b_{w+1} \equiv x_1 + b_1 \quad , \quad b_{w+2} \equiv ab_{w+1} + l_2 \equiv ax_1 + ab_1 + l_2 \equiv ax_1 + b_2, \cdots$$

$$b_{2w} \equiv a^{w-1}x_1 + b_w \quad , \quad b_{2w+1} \equiv a^w x_1 + b_{w+1} \equiv (a^w + 1)x_1 + b_1$$

さらに，$x_2 \equiv b_{2w+1} - b_{w+1}$ とおくと，

$$b_{2w+1} \equiv x_2 + b_{w+1},$$

$$b_{w+2} \equiv ab_{2w+1} + l_2 \equiv ax_2 + ab_{w+1} + l_2 \equiv ax_2 + b_{w+2},$$

$$\vdots$$

$$b_{3w} \equiv a^{w-1}x_2 + b_{2w},$$

$$b_{3w+1} \equiv a^w x_2 + b_{2w+1} \equiv (a^w + 1)x_2 + b_{w+1}$$

さらに $x_3 \equiv b_{3w+1} - b_{2w+1}$ とおいて

$$b_{3w+1} \equiv x_3 + b_{2w+1} \quad , \quad b_{3w+2} \equiv ax_3 + b_{2w+2} \quad ,\cdots$$

$$b_{4w} \equiv a^{w-1}x_3 + b_{3w} \quad , \quad b_{4w+1} \equiv (a^w + 1)x_3 + b_{2w+1}$$

さらに，$x_4 \equiv b_{4w+1} - b_{3w+1}$ とおいて

$$b_{4w+1} \equiv x_4 + b_{3w+1} \quad , \quad ax_4 + b_{3w+2} \quad ,\cdots$$

$$b_{5w} \equiv a^{w-1}x_4 + b_w$$

$$b_{5w+1} \equiv (a^w + 1)x_4 + b_{4w+i}$$

よって，

$$b_i, \quad b_{w+i} \equiv a^{i-1}x_1 + b_i, \quad b_{2w+i} \equiv a^{i-1}x_2 + b_{w+i}, \quad b_{3w+i} \equiv a^{i-1}x_3 + b_{2w+i}, \quad b_{4w+1} \equiv a^{i-1}x_4 + b_{3w+i}$$

ところで，

$$x_j \equiv b_{jw+1} - b_{(j-1)w+1} \equiv (ab_{jw} + l_1) - (ab_{(j-1)w} + l_1) \equiv a(b_{jw} - b_{(j-1)w})$$

より，x_j は偶数である。よって $b_{jw+i} \quad (1 \le j \le 4)$ は，b_i が偶数ならすべて偶数で，b_i が奇数ならすべて奇数となる。

次に $b_{jw+i} \equiv b_{kw+i} \quad (0 \le j,k \le 4,\ j \ne k)$ となる j,k が存在することを仮定し，矛盾を導く。

$$ab_{jw+i} + l_{i+1} \equiv ab_{kw+i} + l_{i+1} \text{ より } b_{jw+i+1} \equiv b_{kw+i+1}$$

これを繰り返して$b_{jw+1} \equiv b_{kw+1}$を仮定してよい。

　一方，$w = 2 \cdot 5^m, w = 4 \cdot 5^m$であり$a^w \equiv 6$となる。また簡単な計算により

$$
\begin{aligned}
&b_{w+1} \equiv x_1 + b_1, \\
&b_{2w+1} \equiv x_2 + b_{w+1} \equiv (a^w + 1)x_1 + b_1 \equiv 7x_1 + b_1, \\
&b_{3w+1} \equiv x_3 + b_{2w+1} \equiv (a^{2w} + a^w + 1)x_1 + b_1 \equiv 3x_1 + b_1, \\
&b_{4w+1} \equiv x_4 + b_{3w+1} \equiv (a^{3w} + a^{2w} + a^w + 1) + b_1 \equiv 9x_1 + b_1
\end{aligned}
$$

を得る。これは，$b_{jw+1} \equiv b_{kw+1}$が存在していることに矛盾する。（証明終）

注意　定理３で$b_{w+1} \neq b_1$を仮定したが，この条件ははずすことが可能であると考えている。

一般カプレカー数の研究

中村 和樹，細尾 倫成，竹久 和宏
津山工業高等専門学校電気電子工学科４年

１．はじめに

我々の研究は，カプレカー数というものによく似た性質を持つ数の研究である。例えば $34^2=1156$ であるが 56－2×11＝34 となっており，同じように $334^2=111556$ を考えると 556－2×111＝334 となっている。そして 33…34 はすべてこのような性質をもつ。これは細尾の発見である。そこで $k^2=q\cdot 10^n+r$， $k=r-2q$ となる数 k をＨ数と呼び，Ｈ数をコンピュータでリストアップした。すると 33…34 以外にも 166…68 という数の系列がＨ数であった。しかし５桁目に突然 14287 という系列をもたないＨ数が現れ，それ以降にも系列を持たないＨ数がたくさん現れた。

以下において H 数の構造及び，カプレカー数と H 数をより一般化した一般カプレカー数の構造を研究する。

２．カプレカー数と H 数の類似性

カプレカー数のリスト

１桁　１，９　　＊１＋９＝１０
２桁　４５，５５，９９　　＊４５＋５５＝１００
３桁　２９７，７０３，９９９　　＊２９７＋７０３＝１０００
４桁　２２２３，２７２８，４９５０，５０５０，７２７２，７７７７，９９９９
＊２３３３＋７７７７＝１００００，２７２７＋７２７２＝１００００
４９５０＋５０５０＝１００００

H 数のリスト

１桁のＨ数　１，４
２桁のＨ数　１８，３４　　＊３４+１８=５２
３桁のＨ数　１６８，３３４　　＊３３４+１６８=５０２
４桁のＨ数　１６６８，３３３４　　＊３３３４+１６６８=５００２
５桁のＨ数　１４２８７，１６６６８，１９０４８，３０９５４，３３３３４，
３５７１５
＊１４２８７＋３５７１５＝５０００２，１６６６８＋３３３３４＝５０００２
１９０４８＋３０９５４＝５０００２

カプレカー数には，同じ桁どうしで適当な数のペアを作ってその和をとるとすべて１０・・００系の数になる。この観点から，H 数でも同じようにペアを作ってその和をとると，上に示したように 50・・・02 系の数になっていることがわかる。

３．一般カプレカー数

カプレカー数とＨ数をより一般的に扱うため次を定義する．

【定義１】 ｋ，ｎを自然数 ，α，ｔ（$|t|$）を整数とする。このとき，次の条件をみたすｋの集合をＫ（α， ｔ，ｎ）と書き，タイプ（α， ｔ）のｎ桁カプレカー数という。

条件：ある自然数ｑとｒ（$0 \leqq r < 10^n$）が存在し，

$$k^2 = q \cdot 10^n + r \ , \ \alpha k = tq + r$$

特に Ｋ（１，１，ｎ）をｎ桁カプレカー数，Ｋ（１，－２，ｎ）をｎ桁Ｈ数という

【定義２】ｄ，ｄ’を自然数で，gcd（ｄ，ｄ’）＝１とする。またαを$\alpha^2 < dd'$なる整数とする。
このとき，Inv_α（ｄ，ｄ’）を$dm \equiv \alpha \mod dd'$となる最小の自然数mとする。
特にα=1 のとき，Inv_α（ｄ，ｄ’）を単に Inv（ｄ，ｄ’）とかく。

【補題】 ａ，ｂを自然数とし gcd(ａ，ｂ)＝１とし，$\alpha^2 < ab$とする。このとき，
$m = \mathrm{Inv}_\alpha(a, b)$かつ$n = \mathrm{Inv}_\alpha(b, a)$ ⇔ ｍとｎは自然数でかつ$am + bn = ab + \alpha$をみたす。

（証明） ⇒を示す。$am \equiv \alpha \mod b$より，$am = sb + \alpha$となるｓが存在する。$0 < m < b$で，$am > sb$なので$a > s$である。よって，$am +(a-s)b = ab + \alpha$である。$a - s = n + u$（$0 \leqq u < a$）とおく。

$$ma + (n+u)b = ab + 1$$

であり，

$$ma + nb = (a-u)b + 1$$

となる。ここで，$mb \equiv 1 \mod a$より

$$ub \equiv 0 \mod a$$

gcd（a，ｂ）＝１で$0 \leqq u < a$より，$u = 0$，すなわち$a - \alpha = n$である。

⇐ を示す。$am \equiv \alpha \mod b$，$bn \equiv \alpha \mod a$が成り立つことは明らかである。
$m_0 = \mathrm{Inv}_\alpha$（ａ，ｂ），$n_0 = \mathrm{Inv}_\alpha$（ｂ，ａ）とおき，$m_0 = m$，$n_0 = n$を示す。
前半に証明したことより，$am_0 + bn_0 = ab + \alpha$が成り立つ。よって，

$$am_0 + bn_0 = am + bn$$

である。したがって，

$$a(m - m_0) + b(n - n_0) = 0$$

であり。$m \geqq m_0$，$n \geqq n_0$より$m = m_0$，$n = n_0$が成り立つ。 （証明終）

【定理】ｄ，ｄ’を自然数で gcd（ｄ，ｄ’）＝１，$dd' = 10^n - t$とする。
さらに，ｍ＝Inv_α（ｄ，ｄ’），ｍ’=Inv_α（ｄ，ｄ’）とおく。もし$0 \leqq (\alpha - t)dm + tmm' <$

１０ⁿならば，ｄm∈K（α，ｔ，ｎ）である。

逆にもし，ｋ∈K(α，ｔ，ｎ)で gcd(ｋ，ｋ－α)＝１ならば gcd（ｄ，ｄ’）＝１，ｄｄ’＝１０ⁿ－ｔとなるｄ，ｄ’が存在して，ｋ＝ｄ・Inv_α（ｄ，ｄ’）となる。

（証明）前半を示す。　　ｄm＝10^n＋ｔ’－d’m’　　(N=10^n，ｔ’＝α－ｔ）とする。

$$
\begin{aligned}
(dm)^2 &= (N+t')^2-(N+t')d'm'-(N+t')d'm'+(d'm')^2\\
&= (N+t')^2-(N+t')d'm'-(dm+d'm')d'm'+(d'm')^2\\
&= N^2+2t'N+t'^2-N d'm'-t'd'm'-dd'mm'\\
&= N^2+2t'N+t'^2-N d'm'-t'd'm'-(N+t'-\alpha)mm'\\
&= (N+t'-d'm'-mm')N+t'^2-t'd'm'+t'N-(t'-\alpha)mm'\\
&= (dm-mm')N+t'(t'-d'm'+N)-(t'-\alpha)mm'\\
&= (dm-mm')N+t'dm-(t'-\alpha)mm'\\
&= (dm-mm')N+(d-t)dm+tmm'
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
&t(dm-mm')+(d-t)dm+tmm'\\
&= tdm-tmm'+\alpha dm-tdm+tmm'\\
&= \alpha dm
\end{aligned}
$$

となる。したがって，ｄm∈K（α，ｔ，ｎ）である。

後半を示す。ｋ∈K（α，ｔ，ｎ）とする。定義１より，ある自然数ｑ，ｒ（$0 \leqq r < 10^n$）により，

$$k^2 = q\,10^n + r, \qquad k = tq + r$$

である。よって，

$$k(k-\alpha) = (10^n - t)q \tag{1}$$

を得る。gcd（ｋ，ｋ－α）＝１より，

$$dd' = 10^n - t,\ \gcd(d, d') = 1$$

となる。ｄ，ｄ’が存在して，ｄ｜ｋ，ｄ’｜（ｋ－α）とできる。ｋ’＝10^n－ｔ－（ｋ－α）とおくと，ｄ’｜ｋ’である。よって，ｋ＝mｄ，ｋ’＝m’ｄ’となる自然数m，m’が存在する。

したがって，

$$dd' + \alpha = 10^n - t + \alpha = k + k' = md + m'd'$$

補題より，m＝Inv_α（ｄ，ｄ’），m’＝Inv_α（ｄ’，ｄ）なので，ｋ＝ｄ・Inv_α（ｄ，ｄ’）となる。

（証明終）

注意：α＝１のときは，gcd（ｋ，ｋ－１）＝１は必ず成り立つ。
しかしα＝≧2 のときは，gcd（k，k－α）≠１である一般カプレカー数ｋの構造を決定することが課題となった.

【例１】　定理を用いて５桁のＨ数を求める。

① 10^N＋2 を考える。　i.e. 100000＋2＝100002

② 100002 の互いに素な約数のペア（ｄ，ｄ’）を見 つける。

互いに素な約数の組み合わせは,

(2,50001),(3,33334),(6,16667),(7,14286),(14,7143),

(21,4762),(42,2381)

の７つある。

③ ｄｍ≡１ mod d’ となる最小な m を計算する。

例えば （７，１４２８６）を（ｄ，ｄ’）とする。

７ｍ≡１ (mod １４２８６)より，ｍ＝２０４１，同様に m’＝６ である。

条件: $0 \leqq 3dm-2mm' < 10^5$ より

ｄｍ＝７×２０４１＝１４２８７ （Ｈ数）

条件: $0 \leqq 3d'm'-2m'm < 10^5$ を満たさないので

ｄ’m’＝１４２８６×６＝８５７１６ ×

同様に他の約数の組み合わせを計算していくと，$\alpha=1$ であることと定理より，５桁のＨ数をすべて導くことができる。

【例２】 定理を用いて $\alpha=2$，$t=4$，5 桁のときの一般カプレカー数を求める。

① $10^n - t$ を考える。 i.e. $10^5 - 4 = 99996$

② 99996 の互いに素な約数のペア（ｄ，ｄ’）を見つける。

互いに素になる約数の組み合わせは

(3，33332)，(4，24999)，(12，8333)，(13，7692)，(39，2564)，(52，1923)，(156，641)

の７つである。

③ｄｍ≡2 mod d’ となる最小な m を計算する。例えば，(156,641）を（ｄ，ｄ’）と置いて考えると，156m≡2 (mod 641)よりｍ＝452，同様にｍ’＝46 が得られるとすると，

条件 $0 \leqq (-2)dm + 4mm' < 10^n$ を満たさないので

ｄｍ＝156×452＝70512 ×

条件 $0 \leqq (-2)d'm' + 4m'm < 10^n$ より

ｄ’m’＝641×46＝29486 (K(2,4,5)の一般カプレカー数)

同様に互いに素になる約数の組み合わせを同じように計算すると，$\alpha=2$ であることと $\gcd(k,k-\alpha)=1$ とは限らないので，K(2,4,5)の一般カプレカー数の一部を求めることが出来る。

レプユニット数のカプレカー操作

中村 和樹

津山工業高等専門学校　電気電子工学科 3 年

1. はじめに

私たちは自分たちが興味を持った数を研究する内に，カプレカー数の一般化である一般カプレカー数について研究を始めた。その過程でレプユニット数がすべて一般カプレカー数になるのではないかという予想をたてて，その性質に関する研究とその過程で新たにたてた予想の証明を目指して研究を続けている。研究過程において，新免 泰陽くんと竹久 和宏くんに一部協力してもらった．ここに感謝する．

【定義 1】　レプユニット数$\mathrm{R_k}$とは $\mathrm{R_k}=\underbrace{11\cdots1}_{k}$ のように 1 が並ぶ k 桁の数のことをさす。

[定義 2]　k 桁の自然数 a の **n 乗カプレカー操作**とは，a^nを下から k 桁ずつ区切ってそれらの和をとることをいう。自然数 a を，**L 桁についてカプレカー操作する**とは，a を下から L 桁ずつ区切って，それらの和をとることである。

例えば a=1111 とする。これを 3 乗して$1111^3=1371330631$となる。ここで下から 4 桁ずつ区切ってそれらの和をとると，$0631+7133+13=7777$となる。これが n 乗カプレカー操作である。また，a を 2 桁についてカプレカー操作するとは$11+11=22$ということである。

【定義 3】　$\mathrm{R_k}$ を，n 乗カプレカー操作して得られる数を次のように表す。

$$Kp[\mathrm{R_k^n}]$$

この論文の目的は，我々の研究データから得られた次の予想 1 と予想 2 を考察することにある。

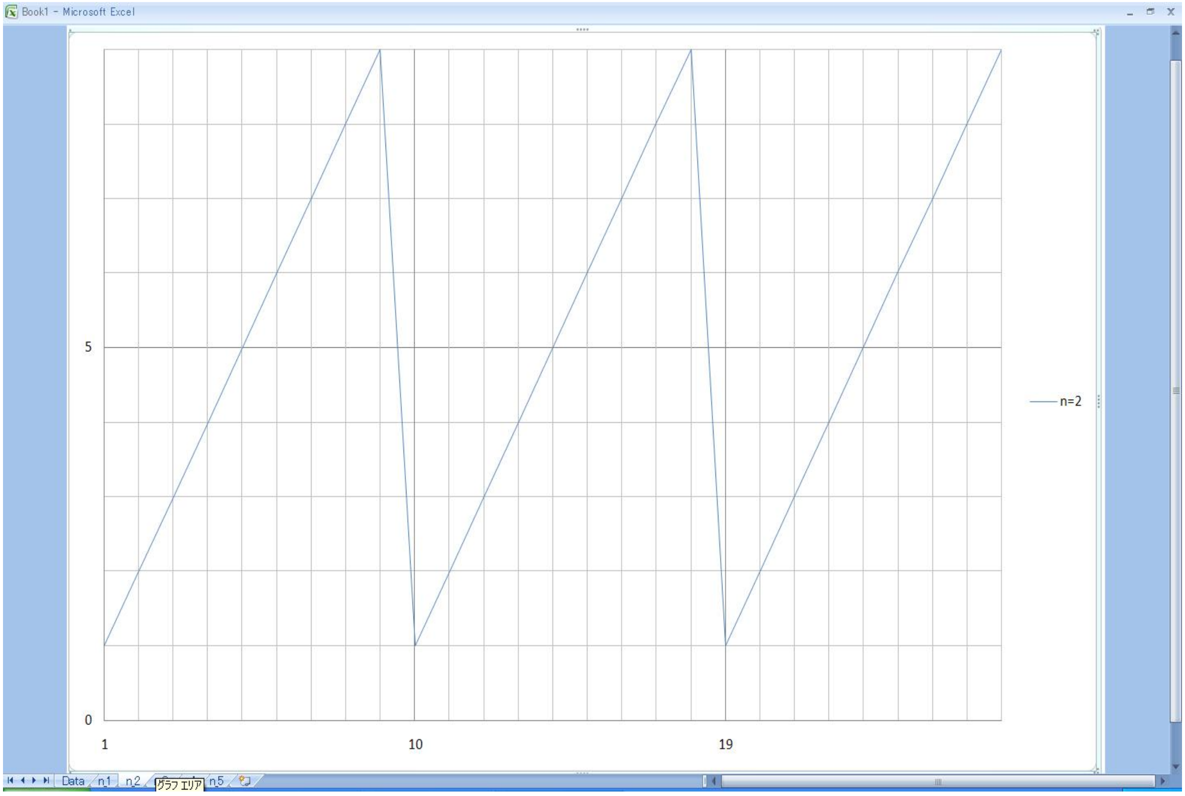
【予想 1】　レプユニット数を，n 乗カプレカー操作した数 $Kp[\mathrm{R_k^n}]$ について，

$Kp[\mathrm{R_k^n}]=\alpha_{k,n}\mathrm{R_k}$ とおいた時，$\alpha_{k,n}$ は自然数である。

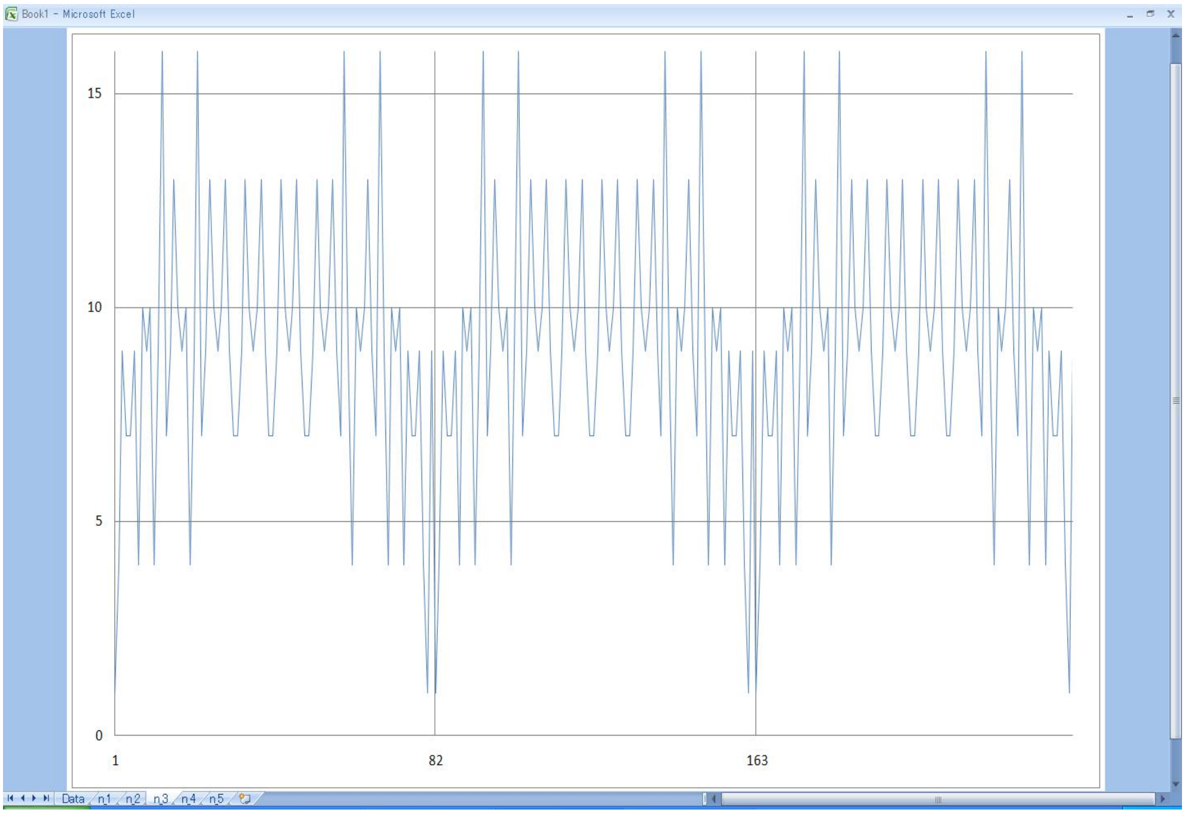
【予想 2】　乗数 n を固定して桁数 k を 1 ずつ増やしていったとき，数列 $\alpha_{k,n}$ は周期を持ち，その長さは 9^{n-1} である。

以下はそのデータを縦軸をα，横軸を k としたグラフである。

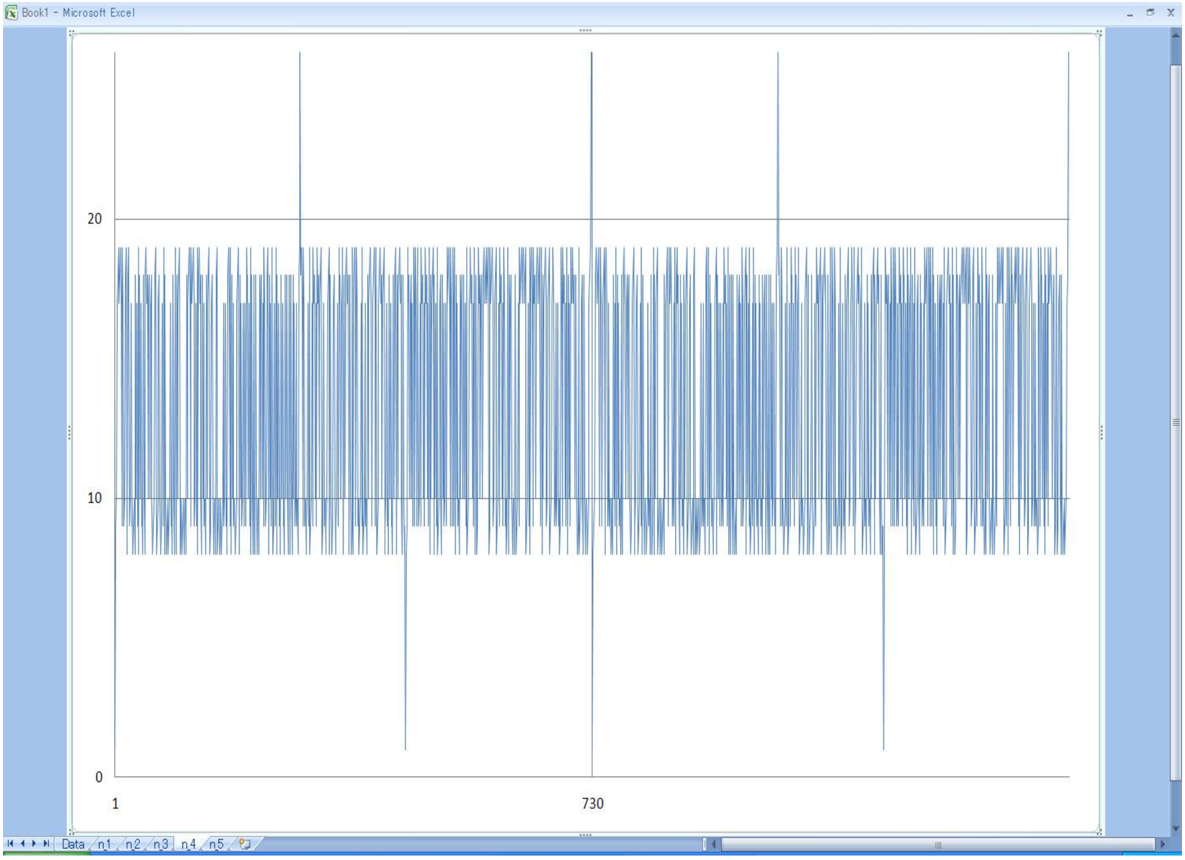
n=2,周期$9^{2-1} = 9$



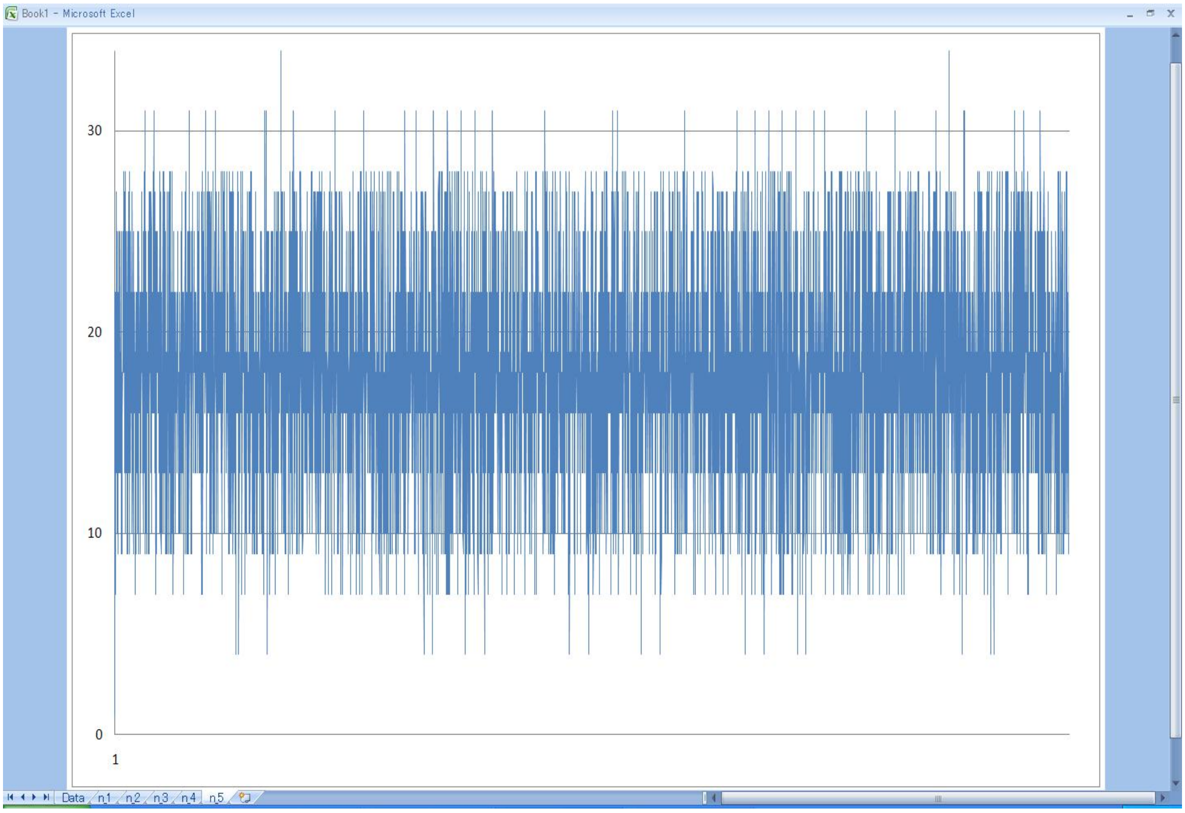
n=3,周期$9^{3-1} = 81$



n=4,周期$9^{4-1} = 729$



n=5,周期$9^{5-1} = 6561$(1 周期分)



2. k-パスカル三角形

【定義 4】$(X^{k-1}+X^{k-2}+\cdots+1)^n$の係数を並べて作った数の三角形を k-パスカル三角形という。
特に k=2 のときがよく知られたパスカル三角形である。

k-パスカル三角形は上の段の隣り合う k 個の数の和で下の段が形成されている。
さらに第 n 段(n=0,1,2,⋯)の和はk^nである。

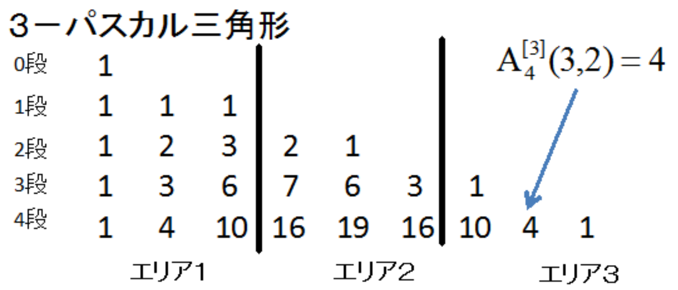
例　3-パスカル三角形

1								
1	1	1						
1	2	3	2	1				
1	3	6	7	6	3	1		
1	4	10	16	19	16	10	4	1

レプユニット数R_k と k-パスカル三角形の関係を考える。例えば$R_3^4=111^4$ は 3-パスカル三角形の 4 段目に対応している。このことから k-パスカル三角形の成分を調べていけば，予想 1 や予想 2 の証明ができるのではないかと考えた。

k-パスカル三角形にエリアという概念を導入する。

【定義 5】k-パスカル三角形を左から k 個ずつ区切り，それらの区画をエリア 1，エリア 2，・・・と呼ぶ。また,$A_n^{[k]}(i,j)$ を，k-パスカル三角形 n 段目のエリア i の中の左から j 番目 $(1\le j\le k)$ の数とする



各段目の任意の　j について，$\sum_{i=1}^{3}A_2^{[3]}(i,j)=3,\quad \sum_{i=1}^{3}A_3^{[3]}(i,j)=9,\quad \sum_{i=1}^{3}A_4^{[3]}(i,j)=27,\cdots$ となっている。

【命題 1】 K-パスカル三角形の n 段目, i 列目の数を(n,i)とすると (n,i)=(n,i-1)+(n-1,i)-(n-1,i-k)である。

（証明）

(n,j+1)+(n,j+2)+(n,j+3)+……+(n,j+k)=(n+1,J+k)　　　……(1)

(n,j)+(n,j+1)+…… +(n,j+k-1)=(n+1,J+k-1)　　　……(2)

(1)-(2)より (n,j+k)-(n,j)=(n+1,j+k)-(n+1,j+k-1)　より (n+1,j+k) =(n+1,j+k-1)+(n,j+k)-(n,j)である。

ここで，i=j+k とする。 (n+1,i) =(n+1,i-1)+(n,i)-(n,i-k)である。

よって ，(n,i) =(n,i-1)+(n-1,i)-(n-1,i-k)　である。（証明終）

【命題 2】 $\sum_{i=1}^{u} \mathrm{A}_n^{[k]}(i,j) = k^{n-1}$ 　ここで， $u = [n-(n+1)/k]$ はエリアの数を表す。

（証明）

$$(n,t)+(n,t+k)+(n,t+2k)+\ldots\ldots \qquad (2,1)$$

を考える。ここで十分大きい m について 0=(n,t+mK)= (n,t+(m+1)K)= …… 　である。b=m-1 とする。よって(2,1)は，

$$(n,t)+(n,t+K)+(n,t+2K)+\ldots\ldots+(n,t+bK)$$

となるので，上の和を S(t)とする。ここで S(t) =S(t+1)を示す。

$$S(t+1)= (n,t+1) +(n,t+1+k)+ (n,t+1+2k)+ \ldots\ldots+(n,t+1+bk)$$

ここで命題 1 より，

$$\begin{aligned}S(t+1)&=(n,t)+(n-1,t+1)-(n-1,t-k+1)+(n,t+k)+(n-1,t+k+1)-(n-1,t+1)+(n,t+2k)\\&\quad+(n-1,t+2k+1)-(n-1,t+k+1)+\ldots\ldots+(n,t+bk)+(n-1,t+bk+1)-(n-1,t+(b-1)k+1)\\&=(n,t)+(n,t+k)+(n,t+2k)+\ldots\ldots+(n,t+bk)\\&=S(t)\end{aligned}$$

よって，

$$k\sum_{i=1}^{u} \mathrm{A}_n^{[k]}(i,j) = k^{n}$$

したがって

$$\sum_{i=1}^{u} \mathrm{A}_n^{[k]}(i,j) = k^{n-1}$$

（証明終）

k －パスカル三角形の n 段目について

$$T = R_k \cdot k^{n-1}$$

とおく。　命題 2 より

$$T = \mathrm{R}_{\mathrm{k}} \sum_{i=1}^{u} \mathrm{A}_n^{[k]}(i,j)$$

となる。

ここで $R_k{}^n$ が k-パスカル三角形の n 段目に対応していることを考慮し，予想 1 の $Kp[\mathrm{R}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}] = \alpha_{k,n}\mathrm{R}_{\mathrm{k}}$ と比較すると $\alpha_{k,n}$ が $\sum_{i=1}^{u} \mathrm{A}_n^{[k]}(i,j) = k^{n-1}$ に対応しているように見える。

3. $\beta_{k,n}$ と $\alpha_{k,n}$ の関係

【定義 6】 k^{n-1} を k 桁についてカプレカー操作したものを

$$\beta_{k,n} = Kp[k^{n-1}]$$

とする。

一般に $\beta_{k,n} = \alpha_{k,n}$ とはならないが，上で述べたことから，$\beta_{k,n}$ の値から $\alpha_{k,n}$ の値を求めることができるのではないかと考えている。このことを確かめるために以下のような調査を行った。

$Kp[\mathrm{R}_5^2]$ の場合。

$k^{n-1} = 5^1 = 5$ より $\beta_{5,2} = Kp[5] = 5$ 　である。一方， $Kp[\mathrm{R}_5^2] = Kp[123454321] = 55555 = 5\mathrm{R}_5$ より，$\alpha_{5,2} = 5$ である。この場合は $\beta_{k,n} = \alpha_{k,n}$ 　である。

$Kp[\mathrm{R}_5^4]$ の場合。

$k^{n-1}=5^3=125$ より　$\beta_{5,4}=Kp[125]=125$　である。

一方，$Kp[\mathrm{R}_5^4]=Kp[15240969373571041]=188887=17\mathrm{R}_5$　より $\alpha_{5,4}=17$　である。

しかし，それぞれを 1 桁についてカプレカー操作すると 1+2+5=1+7=8 となる。もし操作したものが 2 桁以上になったときは，1 桁になるまでこの操作を繰り返す。このように 1 桁についてのカプレカー操作をとくに**単純カプレカー操作**と呼び，それぞれ　$\beta'_{k,n},\alpha'_{k,n}$　と表す。調べたすべての例で $\beta'_{k,n},\alpha'_{k,n}$ は一致した。以下にそのデータを記す。

【n を固定した時の $\beta'_{k,n},\alpha'_{k,n}$　のデータ】

$R_1^{\ 3}$ の場合

$Kp[R_1^{\ 3}]=1$

$Kp[1^{3-1}]=1$

α= 1, β= 1

α'= 1 β'= 1

$R_2^{\ 3}$の場合

$Kp[R_2^{\ 3}]=44$

$Kp[2^{3-1}]=4$

α= 1, β= 4

α'= 4 β'= 4

$R_3^{\ 3}$ の場合

$Kp[R_3^{\ 3}]=999$

$Kp[3^{3-1}]=9$

α= 9, β= 9

α'= 9 β'= 9

$R_4^{\ 3}$の場合

$Kp[R_4^{\ 3}]=7777$

$Kp[4^{3-1}]=16$

α= 7, β= 16

α'= 7 β'= 7

$R_5^{\ 3}$の場合

$Kp[R_5^{\ 3}]=77777$

$Kp[5^{3-1}]=25$

α= 7 , β= 25

α'= 7 β'= 7

$R_6^{\ 3}$の場合

$Kp[R_6^{\ 3}]=999999$

$Kp[6^{3-1}]=36$

α= 9, β= 36

α'= 9 β'= 9

$R_7^{\ 3}$の場合

$Kp[R_7^{\ 3}]=4444444$

$Kp[7^{3-1}]=49$

α= 4, β= 49

α'= 4 β'= 4

$R_8^{\ 3}$の場合

$Kp[R_8^{\ 3}]=111111110$

$Kp[8^{3-1}]=64$

α= 10, β= 64

α'= 1 β'= 1

$R_9^{\ 3}$の場合

$Kp[R_9^{\ 3}]=999999999$

$Kp[9^{3-1}]=81$

α= 9, β= 81

α'= 9 β'= 9

【k を固定した時の　$\beta'_{k,n},\alpha'_{k,n}$ のデータ】

$R_5^{\ 1}$の場合

$Kp[R_5^{\ 1}]=11111$

$Kp[5^{1-1}]=1$

α= 1,β= 1

α'= 1 β'= 1

$R_5^{\ 2}$ の場合

$Kp[R_5^{\ 2}]=55555$

$Kp[5^{2-1}]=5$

α= 5,β= 5

α'= 5 β'= 5

$R_5^{\ 3}$ の場合

$Kp[R_5^{\ 3}]=77777$

$Kp[5^{3-1}]=25$

α= 7,β= 25

α'= 7 β'= 7

$R_5{}^4$の場合

$Kp[R_5{}^4]=188887$

$Kp[5^{4-1}]=125$

α= 17,β= 125

α'= 8 β'= 8

$R_5{}^6$ の場合

$Kp[R_5{}^6]=222220$

$Kp[5^{6-1}]=3125$

α= 20,β= 3125

α'= 2 β'= 2

$R_5{}^8$の場合

$Kp[R_5{}^8]=255553$

$Kp[5^{8-1}]=78125$

α= 23 ,β= 78125

α'= 5 β'= 5

$R_5{}^5$ の場合

$Kp[R_5{}^5]=244442$

$Kp[5^{5-1}]=625$

α= 22,β= 625

α'= 4 β'= 4

$R_5{}^7$ の場合

$Kp[R_5{}^7]=211109$

$Kp[5^{7-1}]=15625$

α= 19,β= 15625

α'= 1 β'= 1

$R_5{}^9$の場合

$Kp[R_5{}^9]=377774$

$Kp[5^{9-1}]=90628$

α= 34,β= 90628

α'= 7 β'= 7

上のデータから次の予想を得た。

【予想 3】 $\alpha_{k,n}$ と $\beta_{k,n}$を単純カプレカー操作したとき， $\beta'_{k,n}, \alpha'_{k,n}$ は一致する。

【予想 4】n を固定する。その時， $\alpha_{k,n}$ の単純カプレカー操作で得られた数列 $\alpha'_{k,n}$ は周期である。

【予想 5】k を固定する。その時， $\alpha_{k,n}$の単純カプレカー操作で得られた数列 $\alpha'_{k,n}$ は周期である。

特に予想 3 は. $\beta_{k,n}$ と $\alpha_{k,n}$ の関係性を示しており，今後の研究の中でかなり重要な予想になると考えられる。

4. まとめと課題

最初に述べたようにこの論文の目的は，我々の研究データから得られた次の予想 1 と予想 2 を考察することである。まず命題 2 より $\beta_{k,n}$ は自然数である。自然数をカプレカー操作しても自然数になる。もし，予想 3 が証明できれば $\alpha_{k,n}$ は自然数になり，予想 1 が示される。さらに予想 4 が成り立てば，それが予想 2 の証明につながると考えている。