2008. 1. 12. 数学教育の会

数学史の窓から ── 教室で使える話題 ③

プセーポイ数学の底力

東京海洋大学名誉教授・学習院大学非常勤講師

中 村　滋

「数学史の窓から」シリーズの３回目です。きょうも、若い人たちに感動を与えられる話題の提供をします。舞台は２４００年以上前の古代ギリシアです。議論の好きなここの人たちは、政治も裁判も音楽も演劇もスポーツも、何でも議論の対象にしました。そして、数学までも皆で論じ合ったのです。そのような中で次第に証明の技術が発展し、エウクレイデスの『原論』に見られるような見事な成果に結晶していきました。

「プセーポイ数学」とは耳慣れない言葉ですが、プセーポイ（またはペッソイ）と言うのはギリシア語で小石のことです。小石を並べながら様々な数の性質を論じた、素朴で直感的な数論をこう呼ぶことにします。エウクレイデスの『原論』全１３巻全体の中でも頂点の一つをなす「エウクレイデスの素数定理（Ⅸ，２０）」の証明が終ると、突然「偶数･奇数論」になって、

「もし任意個の偶数が加えられるならば、全体は偶数である（Ⅸ，２１）」、

「もし任意個の奇数が加えられ、その個数が偶数個ならば、全体は偶数であろう（Ⅸ，２２）」、

「もし任意個の奇数が加えられ、それらの個数が奇数ならば、全体も奇数であろう（Ⅸ，２３）」、･･･

と、初等的な議論が続いて行きます。ここには恐らくピュタゴラス派の人たちによる古代ギリシアにおける最古の数論の原形が留められているものと推定されています（ベッカー、1934)。エウクレイデスの半世紀以上昔のプラトン（BC427-347）はマテーマタ（数学的諸学科）の第一に数論（算術）をおきました。彼にとって数論とは、「純粋に知性そのものによって数の本性の観得に到達する」(『国家論』）ものであり、具体的にイメージしていたのは「偶数･奇数論」だったようです。また、アリストテレス（BC384-322）も「√２が“無理数”である」ことを示す証明に言及して、

「もし（正方形の）対角線が辺と通約可能（整数比で書ける）ならば、同じ数が同時に奇数であり、かつ偶数である、･･･。」(『分析論前書』)

と書き、「偶数･奇数論」に通じていたことを示しています。多分この１世紀ほど以前に「偶数･奇数論」はまとめられたものと思われます。プラトンの友人アルキュタスの言葉をストバイオスが次のように伝えています。

「･･･、算術は知恵の点で（学問として）他の技術よりも大いに優れているが、とりわけ幾何学よりも優れており、望む事柄をより明確に解決する。」(『ソクラテス以前哲学者断片集』第Ⅲ分冊、岩波書店、1997)

このように、数論（算術）が幾何学よりも明瞭に証明し、明快な解決をもたらすことを述べていて、ギリシア数学の初期には幾何学よりも数論（算術）のほうが優位にあったことを示唆しています。それには小石を並べて議論を進めるプセーポイ数学の力が大きかったのでしょう。

偶数と奇数は、『原論』第７巻初めの定義において、

６．偶数とは２等分される数である。

７．奇数とは２等分されない数、または偶数と単位だけ異なる数である。

と定義されています。偶数は２等分出来る数なので、同数（半分づつ）の小石を２段に重ねて表すことができます。エウクレイデスの命題（Ⅸ，２１)、「もし任意個の偶数が加えられるならば、全体は偶数である」、は、したがって次のように証明したのだろうと推測されます：

(○○○○●●●●)＋(○○○●●●)＋(○○○○○○●●●●●●)＋(○○●●)

＝╭ ○○○○｜○○○｜○○○○○○｜○○╮
  ╰ ●●●●｜●●●｜●●●●●●｜●●╯

非常に直感的ですが、偶数の和が２等分できることは、このように小石を並べれば一目瞭然ですね。次の命題（Ⅸ，２２）は、「もし任意個の奇数が加えられ、その個数が偶数個な
らば、全体は偶数であろう」と述べます。定義によれば、奇数は偶数と１だけ異なる数です。だから、ここに出てきた奇数から１つづつ石を取り除き、脇にまとめると、「奇数･･･の個数が偶数個」でしたから、そこには偶数個の石が並びます。奇数から１を引いた偶数たちの和は、直前の命題で偶数であることが証明されていました。それに脇に並んだ偶数を加えてもやはり偶数です。これも石を並べれば簡単に納得できます。その次の命題では、「奇数･･･の個数が奇数個」ですから、脇の石が奇数個になりますので全体は奇数になります。代数記号を自由に使いこなす私達にとっては、例えば命題（Ⅸ，２１）は

$$2k+2l+2m+\cdots+2n=2(k+l+m+\cdots+n)$$

としてほとんど当たり前のことですが、このような直感的、直截的なところから証明の技術は進化を遂げて行ったのでした。「プセーポイ数学」においては、「証明（デイクサイ)」は文字通り「指し示す（デイクニューミ)」ことだったのです。

このような直感的・感覚的な証明法は、いつごろからから『原論』に見られるような純粋思惟による概念的な証明法に変わっていったのでしょうか？　既にプラトンが、

「この学問（数論）は魂をつよく上方へ導く力をもち、純粋に数そのものについて問

答するように強制するのであって、目に見えたり手で触れたりできる物体のかたちをとる数を魂に差し出して問答しようとしても、けっしてそれを受けつけない･･･」(『国家論』)

と述べているところから見ても、紀元前４世紀の始めには「直感的なものから概念的なものへの変換」（ライデマイスター）への強い動きがあったものと思われます。そして１００年位の極めて短い期間に『原論』という見事な成果に結晶したのです。だからプセーポイ数学は紀元前５世紀の頃、ギリシア数学初期の素朴な証明方法と考えられます。

それではプセーポイ数学の中でも一番見事な成果をお話ししましょう。１個の石から始めて、カギ形（⅃、これをグノーモンと言います）に石を並べることにより順に一回り大きな正方形を作ります。

● ○ ● ○ ●　　$1=1^2$

○ ○ ● ○ ●　　$1+3=4=2^2$

● ● ● ○ ●　　$1+3+5=9=3^2$

○ ○ ○ ○ ●　　$1+3+5+7=16=4^2$

● ● ● ● ●　　$1+3+5+7+9=25=5^2$

このようにすると、一般に

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

となります。きれいな公式ですね。１、３、５、･･･ と、１から始まる奇数を次々に加えると、加えた奇数の個数の２乗に等しくなるという公式です。他の人から「それがどうしたの？」と言われても別に関係ありません。美しい公式を知って感動できたのですから、もうそれだけで十分なのです。でも、こんな式を自分で見つけることが出来たら、もっともっとうれしいでしょうね。学校教育でも、このような発見の喜びを与える授業をもっと工夫すると良いのだと思います。

ところで、このきれいな公式を見つけて喜んでいるだけではまだ足りません。この公式から、もう一つの感動を引き出しましょう。古代の人たちの感動を追体験するのです。上図の脇に書いた式の、最後の二つを並べてみます。

$$1+3+5+7=16=4^2$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

最後に加えた奇数は９でした。この９は$9=3^2$と平方数になっています。１から７までの和が$4^2=16$でしたから、$(1+3+5+7)+9=4^2+3^2=5^2$ となります。順序を変えると、$3^2+4^2=5^2$ となります。お分かりですね。（3,4,5）が、$a^2+b^2=c^2$ を満たす整数、いわゆる「ピュタゴラスの三つ組」になるのです。これは古代エジプトで既に知られていたと言われる直角三角形の３辺です。もういくつか実際に確かめておきましょう。

$$1+3+5+\cdots+21+23=144=12^2$$

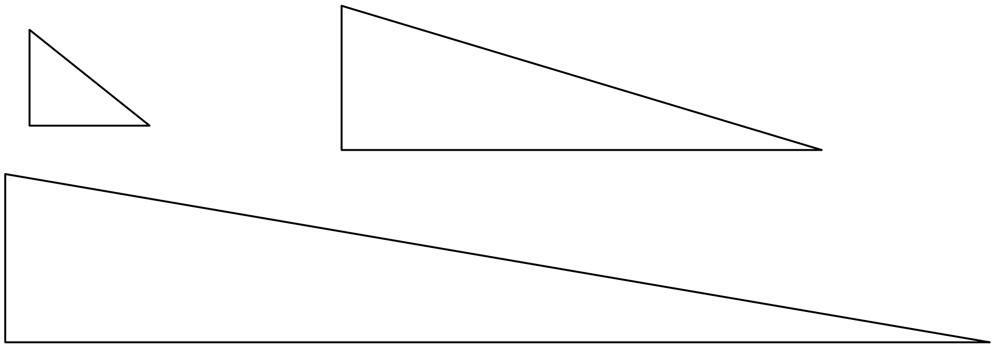
$1+3+5+\cdots+21+23+25=169=13^2$

ここで、$25=5^2$ と書き換えると、$12^2+5^2=13^2$ となります。なぜ、奇数の個数が１２，１３と分かるか不思議ですか？実は最後に加える奇数に１を加えて半分にすれば良いのです。最初の、$1=1^2$、$1+3=2^2$ をみればすぐに確かめられますね。今見つけた三つ組から、小さい順に書き直して、(５,１２,１３) という別の直角三角形の３辺が求まりました。これが直角三角形になることを知っている方もいらっしゃるでしょう。私も確か中学校で聞いた記憶があります。このやり方はどこまでも続けられます。最後の奇数が 3^2、5^2 のときを確かめましたから、次は $7^2=49$ の番です。

$1+3+5+\cdots+45+47=24^2$

$1+3+5+\cdots+45+47+49=25^2$

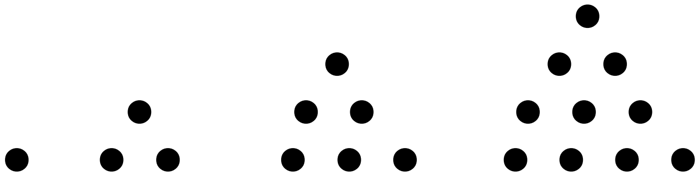
だから、(７,２４,２５) というまた別の直角三角形の３辺が求まります。その次の三つ組は、(９,４０,４１) になります。これらを３辺とする直角三角形は初めて聞く方が多いでしょう。このやり方を続けて行けば、“ピュタゴラスの三つ組”は無限にたくさん存在することが分かります。ただし、単に無限に存在すると言っただけでは、それほどの価値はありません。なぜなら、最初の三つ組（３,４,５）が見つかると、それをすべて２倍、３倍、･･･、としていくことにより、（６,８,１０）、（９,１２,１５）、･･･、はやはり直角三角形の３辺になるからです。でもこうして出来る直角三角形はみんな同じ形、相似形です。大きさが違うだけで、本質的には同じものと見ることが出来るのです。ですから、(５,１２,１３)、(７,２４,２５)、(９,４０,４１)、･･･ と、次々に全く形の異なる直角三角形が求まることが貴重なのです。形の異なる直角三角形に限定しても、それが無限にたくさん存在することに大きな意味があります。そうです、今から２５００年も前に、古代ギリシアの人たちは、小石を並べながら、本質的に異なるピュタゴラスの三つ組が無限にたくさん存在することを知っていたのです！美しい公式を見つけただけではなくて、その公式からとても大事な事実を発見していたのです。こうしてみると、プセーポイ数学の実力もなかなかの物だと思い知らされます。



形の異なるピュタゴラスの三つ組、(３,４,５)、(５,１２,１３)、(７,２４,２５)

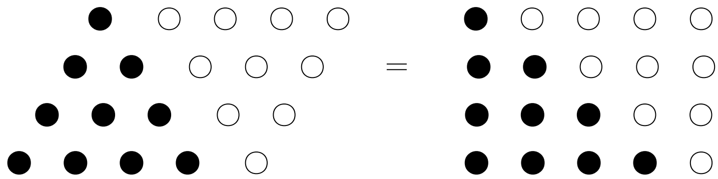
平方数は正方形の形に並べた小石の個数として表せますから、四角数(square number)という呼び方もあります。上手に選んだ２つの平方数の和が再び平方数になるという事実は、また別のところで話題に取り上げることにして、次に三角数について調べてみます。三角数

(triangular number)とは、正三角形の形に小石を並べたときの小石の個数、として表せる数のことです（このように、三角形、四角形、五角形、･･･、などの形に小石を並べたときに現れる数を一般に「図形数」といいます)。三角数は、



１、 １＋２＝３、１＋２＋３＝６、１＋２＋３＋４＝１０、･･････、

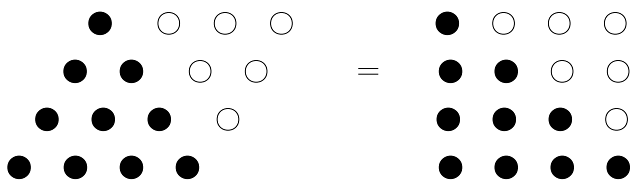
のように書けます。ｎ番目の三角数をt_n、ｎ番目の四角数をs_nと書くことにしましょう。同じ大きさの三角数を並べ、一つは上下を逆にします。右に傾いているので、これをまっすぐに並べ直すと次のようになります。



すなわち、一般的に書くと、$t_n + t_n = 2t_n = n(n+1)$、ゆえに

$$t_n = n(n+1)/2$$

となります。苦もなく三角数の一般公式が見つかりました。次に一つだけ大きさの違う三角数を今と同じように並べます。小さいほうを上下逆さまにして並べた上で、傾いた小石をまっすぐに並べ直すと次のようになります。



こうしてみると、右側は正方形の形に小石が並んでいます。これは平方数です。すなわち、

$$t_n + t_{n-1} = s_n = n^2$$

となります。平方数のことを英語で“square”と言います。この言葉は、元々「正方形」という「形」を表す言葉です。それがそのまま、ある数を２乗した数、平方数を表す言葉として使われているのです。意外にも、私たちは古代ギリシアのプセーポイ数学の影響の中で暮らしていたのです。小石を並べるだけで、こんな調子で次々に新しい関係式が得られます。関係式だけではありません。ピュタゴラスの三つ組が無限にたくさんあることも分かったのでした。こんな調子ですから、小石を並べながら、古代ギリシアの人たちは多分楽しくて仕

方がなかったことでしょうね。プセーポイ数学と言っても決してバカには出来ません。

最後に「素数」という言葉の元の意味を探って見ましょう。『原論』の定義では、

１２．素数とは単位によってのみ割り切られる数である。

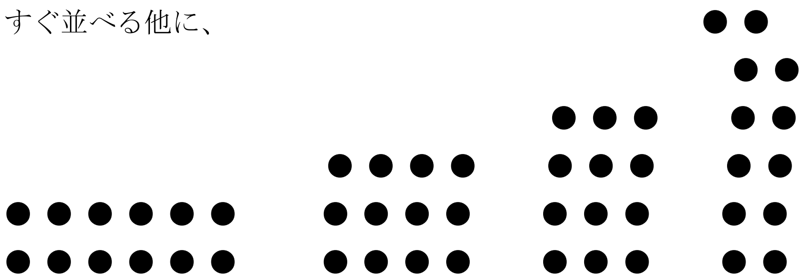
とあります。当時は自分自身を約数のうちに数えませんでしたから、これで素数が定義されたのです。分類好きの古代ギリシア人は、小石を長方形の形にきれいに並べられるかどうかで、自然数を「第一の数」、「第二の数」に分類しています。たとえば１１個と１２個の小石を並べて見ましょう。１１個の小石は、

●●●●●●●●●●●

とまっすぐに並べるほかありません。でも１２の方は、

●●●●●●●●●●●●

とまっすぐ並べる他に、



２×６　　３×４　　４×３　　６×２

などのように、様々な形にきれいに並べることが出来ます。そこで始めの１１のような数を「第一の数」または「直線的な数」、１２のような数を、「第二の数」または「合成的な数」と呼びました。今も生き残っている呼び方は、「第一の数（prime number）」と、「合成的な数（composite number）」です。お分かりでしょうか？英語の prime number は「第一の数」の直訳だったのです。もう一つの数は「合成数」と呼ばれています。別の言い方をすれば、素数とは１と自分自身以外に約数を持たない数のこと、合成数とは１と自分自身との間にそれ以外の約数を持つ数のことです。このように、「素数」と「合成数」の分類は、小石を並べながら議論をしていた古代ギリシアの人たちによる「プセーポイ数学」の雰囲気を今に伝えているのです。暗号理論の最先端で脚光を浴びている「素数」ですが、このような最古の数学の名残りを引きずっているのが面白いところです。

（以上、岩波書店から出版予定の本の原稿から一部引用。）

≪講演後の補足≫

以上の講演の後で、質問がありました。「１は何故素数ではないのか？」という鋭い質問でした。小川洋子さんの表現を借りると、

「分解されることを拒み、常に自分自身であり続け、美しさと引き換えに孤独を背負った者。　それが素数だ。」(「孤高の美しさ貫く「素数」」、朝日新聞のコラムより)

そうだとすれば、最も孤独で、分解そのものを拒んでいる「１」こそが、素数の中の素数と呼ばれて当然なのです。実際、２０世紀の初頭に１０００万までの素数表を出版したレーマー（D.N.Lehmer、1914）は１を素数に数えています。でもそうすると、素因数分解の一意性が成り立たなくなってしまいます。それでは困るので、「算術の基本定理」における素因数分解の一意性を保証するために、私達は「１」を素数からはずすのです。「美しさ」よりも「実利」を優先させた結果です。

エウクレイデスの『原論』を見ると、第７巻冒頭の定義で、

１．単位（モナス）とは存在するもののおのおのがそれによって１（ヘン）とよばれるものである。

２．数（アリトゥモス）とは単位からなる多（プレートス）である。

となっていて、単位すなわち１をいくつか集めたものが「数」で、２以上の整数に限定していたのです。「素数」を奇数（odd number）に限定していた時期もありました。紀元前４世紀中頃のアリストテレスは、２を素数に含めました。２はたった一つの偶数の素数、という意味で「最も奇妙な素数（the oddest prime number)」です（リーベンボイム)。このように、２については混乱がありましたが、「数」でない１は素数には含めなかったのです。

プリンプトン３２２、ついに解明される！

時間が少しあったので、数学史の窓から①　で紹介した粘土板、プリンプトン３２２についての室井和男さんの最新の研究成果を簡単に報告しました。それについてもここで簡単にまとめておきましょう。「数学粘土板 Plimpton ３２２におけるピタゴラスの数について」('08.1.）と題されたその論文（プレプリント）で、室井さんはいつものように手堅く、４欄からなる数表の一番上に書いてある表題の再検討から始めます。日常用語としての意味、そしてそれが転用されて数学の術語としてどう使われて来たか、などを検討した上で、左から順に、「１が引かれ幅が出てくる斜辺の平方完成」、「幅についての平方根」、「斜辺についての平方根」、「その名前」と翻訳を確定します。その上で、これまで誰も気に留めなかった右端の「その名前」の下に並んでいる「ｎの場所（すなわちｎ番目)」という言葉が、実は（ｎ＝１、２　のときを除いて）数学文書以外には使われない表現であり、しかも等差数列又はそれに近い数列にしか使われないことを解明したのです。したがって左端の欄がほぼ等差数列的に減少しているのは偶然ではないことを明らかにしました。次

に彼は、これらの数値を彼らはどうやって計算し、また何のためにこの数表を作ったのかと言う問題の核心部分に迫ります。先ず、ノイゲバウアーたちがこの粘土板を公表した１０年後（1955）に、オランダのブルインスが提唱したこの数表の作り方を追認しました。すなわち、バビロニア人がよく知っていた恒等式、

$$xy+\{(x-y)/2\}^2=\{(x+y)/2\}^2$$

において $xy=1$ と置いてこれを長さ（底辺）とし、続いて $(x-y)/2$ を幅（高さ）、$(x+y)/2$ を斜辺として、何らかの方法で選ばれた x と y に対して $\{(x+y)/2\}^2$ を計算したものだというものです。そして、古バビロニア時代から伝えられて来たに違いないセレウコス朝時代（BC312-63）の逆数表に注目します。ＡＯ６４５６と名付けられたこの数表は、１５７個の数とその逆数が詳しく（６０進法で１５,６桁のものまである）記されたもので、これまで何の目的で作られたのか分かっていませんでした。しかし $xy=1$ ですから、元の数とその逆数はちょうど x と y の候補になります。そして、プリンプトン３２２にある１５組のすべての値がこの逆数表（と、２つだけは古バビロニア時代の逆数表、ＣＢＳ２９.１３.２１ 等）から得られることが確かめられました！これは素晴らしいことです。人類の宝物と言ってよいプリンプトン３２２が、その作り方まで含めて完全に解明できた瞬間です。室井さんは自信を持って、この表の左端は、θ＝約４５°から約３１°までの $1+\tan^2\theta$ の表であると結論付けました。左端の表題「１が引かれ幅が出てくる斜辺の平方完成」は、$(x-y)/2=\sqrt{[\{(x+y)/2\}^2-1]}$ を意味します。

両端の解明が終ったので、今度は真中の２列の解明に進みます。幅 $(x-y)/2$ と斜辺 $(x+y)/2$ が求まったので、これらに最小公倍数（これが現在の左端の左に付いていたと推測される失われた列の値です）を掛けて整数に直すのです。これを全１５組について実行した上で、彼は古代バビロニア人が素因数分解を知っていたことを強調しています。“普通の因数”と呼ばれる、２，３，５ で括りだすことでそれは実行されました。そしてそのやり方で、$(x-y)/2$ と $(x+y)/2$ を整数に直すために、２と３と５がいくつ足りないか？と考えて最小公倍数を求めたのです。この失われた列が簡単な数値だったことから推測されてきたこれまでの解説はすべてその根拠を失いました。シャーロック･ホームズを名乗って精緻な推論を展開する論文もありましたが（私の大好きな論文でした）、今や、室井さんの地道な研究が実を結び、室井さんに軍配が上がったのです。間違いだらけの数表の山に取り組み、次々に謎を解き明かしていく室井さんに、心の底から「おめでとう、そして有難う」と言いたいと思います。これからの活躍を大いに期待します。

（２００８．１．３１．小訂）