2007. 1. 13. 数学教育の会

数学史の窓から ── 教室で使える話題 ①

粘土板に刻まれた √２ の値

東京海洋大学名誉教授・学習院大学非常勤講師

中 村 滋

「数学史の窓から ― 教室で使える話題」と題して、この数学教育の会でいくつかの話題を提供しようと思います。今日は古代バビロニアの粘土板に刻まれた驚くべき正確な√２ の値と、その頃すでに知られていたピュタゴラスの定理についてのお話です。

人類最古の文書による記録は、今から５０００年以上前のメソポタミアに始まります。川(ポタモス)の間(メソ)というギリシア語から名づけられたメソポタミア・両河地方は現在のイラクを中心とする、ティグリス･ユーフラテスという二つの大河にはさまれた地方です。北部の山岳地方と南部のシリア砂漠にはさまれた虹をかけたようないわゆる「肥沃な三日月地帯」とも重なり合う、豊かな自然の恵みに満ちた地帯でした。その大河の恵みを求めて、諸民族が次々にこの地で覇権を争い興亡を繰り返したので、安定した国家が出来難い地方でもありました。いつしか両河の下流域に住み着いたシュメール人たちはいくつもの小都市を作り、次第に大きな都市国家群に発展していきます。彼らは初めて文字を考え出し、数字と共に粘土板に刻み込みました。かなり古くから６０進法を使っていたようです。やがて北に興ったアッカド人がこの地を征服してアッカド王朝（初代サルゴン大王）を建てますが（ＢＣ２３３４－ＢＣ２１５４）、彼らはシュメールの高い文明をそのまま継承し、楔形文字で文学や取引の記録などを残しました。この後に再びシュメール人がウル第三王朝（ＢＣ２１１２－ＢＣ２００４）を建て、さらにその後のアモリ人によるバビロン第一王朝時代（ＢＣ１８９４－ＢＣ１５９５）にかけて膨大な粘土板文書が残されました。バビロン古王朝とも呼ばれるこの時代はハンムラビ大王（在位ＢＣ１７２８－ＢＣ１６８６）による法体系の整備が有名ですが、強力な王権と中央集権的な官僚機構を備え、大いに繁栄をしました。その後もこの地方は、諸王国が興亡を繰り返し、やがて世界最初の大帝国・アッシリア帝国がついにオリエント統一を果たします。その大帝国を亡ぼしてカルディア人が築いた、新バビロニア王国（ＢＣ６２５－ＢＣ５３９）と、その後しばし繁栄を誇ったペルシア大帝国の滅びたあと、セレウコス王朝(ＢＣ３１２－ＢＣ６３)がメソポタミア文明に最後の輝きを見せます。不思議なことに、数学に関係する文書は古バビロニア時代ＢＣ２０００－ＢＣ１６００年頃と、新バビロニア王国およびセレウコス王朝時代（ＢＣ６００－ＢＣ５０）に集中しています。まだまだ、発掘されずに埋もれている文書も多いのでしょう。そしてその特徴は、古い時代に信じられないような高度の発展を

したものの、その後の１０００年を越す長い期間にこれといった発展がほとんど見られない点です。でも、更なる発掘や未解読文書の解明が進んで、現在の謎が解けるのを期待しましょう。いまだに古代のバビロン市やアッカド市の場所がわからないのですから、もしかしたら古代史を大きく書き換えるような発見があって、この人類最古の文明に新たな光が当たる可能性も残っているのです。悲しい戦いの最中にあるこの地に早く真の平和が訪れて、学術的な研究が進展することを切に願っています。

　前置きが少し長くなってしまいました。「人類の宝物」と言っても良い粘土板の話に進みましょう。１９４５年にノイゲバウアーとサックスは、アメリカに保管されている数学関係の粘土板の解読結果をその著書で公表しました。その中に、イェール大学に保存されているＹＢＣ７２８９という整理番号で呼ばれる小さな粘土板があります。一辺が７－８ｃｍの四角い形をしていて、あちこち欠けていて今にも壊れそうな見栄えのしない粘土板でした。何やら正方形と覚しき形とその対角線らしい線が見えます。いかにも頼りないただの土の塊のようですが、解読してみたら驚くべきことが分かりました。書かれていたのは３つの数字で、そのうちの一つは今の十進法に直すと何と１.４１４２１２９６.... と読めたのです。一夜一夜に人見ごろ･･･、すなわち √２ の近似値ですね。他の２つの数字は３０と ４２.４２６３.... すなわち √２ の３０倍の値でした。こうなるとこれは事件です。紀元前１８００年の頃に、バビロニアでは √２ を小数点以下５桁まで正しく計算することが出来たことが分かったのです。砂漠の真ん中でこんなにも高度な数学が発展していたのです。今から４０００年近くも前に、小数点以下５桁まで正しい √２ の値が必要になったとか、測定できたとはとても思えません。人間は本来好奇心の強い生き物ですから、このように実用を大きく超えた値を人間理性が求めたのでしょう。

YBC7289（ほぼ実物大、Newton アーキオ vol.４『メソポタミア』より）

しかし、こんなにも正確な近似値を一体どうやって求めたのでしょう？私は次のように推測しました (「数学することの楽しさ」、『数学セミナー』2000･9、pp.2-5)。a が √２ の近似値だとします。すると、２／a も √２ の近似値になり、しかも、もしも a が √２ よりも大きいとすると、２／a は √２ の値よりも小さくなります。そこで、a と ２／a との平均を取ると、真の値よりも大きい値と小さい値を加えて２で割りますから、誤差が相殺して真の値にぐっと近づくことが期待できます。これを繰り返すと急速に真値に近づくのです。実験してみましょう。最初は何でも良いので、a＝１ とします。すると２／a＝２ になります。そこで、１と２の平均をとると、(１＋２)／２＝３／２＝１.５ となり、真の値に近づきました。２回目はa＝３／２ から始めます。２／a＝４／３ なので、
(３／２＋４／３)／２＝１７／１２ が出てきます。１７／１２＝１.４１６６６･･･ は、たった２回で得た値としては十分に良い近似ですね。この値を書いた粘土板も出土しています。さて、３回目に挑戦しましょう。a＝１７／１２、２／a＝２４／１７ の平均を取ると、(１７／１２＋２４／１７)／２＝５７７／４０８＝１.４１４２１５６８･･･ となります。驚くべき速さで、正確な値が得られました。先ほど示した値との違いは実は６０進法にあります。６０進法を使っていた彼らは、当然この値も６０進法で書き表しました。すると、１；２４，５１，１０，３５，１７，･･･＝１＋２４／６０＋５１／６０^{2}＋１０／６０^{3}＋･･･ と書けます。今紹介した粘土板には、１；２４，５１，１０ と書いてあったのです。この切捨てのために6桁目からずれたのでした。なお、他の粘土板の中には、１；２５ と書かれているものもあり、これは１０進法では１＋２５／６０＝１７／１２ となります。こんなところから、私は上記の方法で求めたに違いないと推測したのです。今なら、ニュートン法とか連分数を使った方法でもこの値が出せますが、上記の方法は単純さの点でも格別で、多くの専門家の意見もほぼ一致しています。また、不思議なことに、インドでは全く違う方法を使って、５７７／４０８ を得ています(中村滋「数学における他者 － 先輩エジプト･バビロニアからインド･アラビアまで」、『ギリシア・ローマ世界における他者』(彩流社刊）所収、pp.355-399,特に p.377)。

こんな結果を見ると、人間って何て素晴らしいのだろう、と誇りに思いたくなります。さらに誇らしく思うのは、こんなにも正確で実用目的を大きく超えた近似値を求めていたにもかかわらず、「近似」に飽きたらず、√２ が整数の比では書けないことを示さなければ気がすまない人たちが登場したことです。古代ギリシアでのことです。いわば、√２ の本質を突き止めずにはおかない、という強い意思の表明です。これによって「数学」は知識の寄せ集めではない「学問としての数学」になるのですから、とても大切な出来事であり、正に画期的なことでした。でも今日は、もう一つのバビロニア数学の宝物を紹介します。コロンビア大学に保存されているプリンプトン３２２（Plimpton ３２２）と名づけられた粘土板です。数がたくさん並んでいるので、１９４３年の大学のカタログでは「商業計算」に分類されていました。解読結果は１９４５年に上記の同じ本で公表されました。粘土板の左側は欠けているようです。左上と右側中ほどには割に大きな欠損が見られます。

全部で１５行からなり、一番右に上から順に１から１５まで番号が振ってあります。左側には３列に数字が並んでいて、一番左には細かい数字（小数）、その隣２列には大小様々な整数が並んでいます。真ん中の２列の上には、「幅」と「対角線」と書いてあります。これを今仮に　ｂ　と　ｃ　で表します。すると左端の列は、$a^2=c^2-b^2$、とした上で、c^2/a^2 の値でした。しかも　ａが一番簡単で、２と３と５　だけを素因数に持つような整数でした。恐らく今ある粘土板の左に、この　ａの値が書いてあったのでしょう。そして、ａを底辺、ｂを高さ（「幅」）、ｃを斜辺（「対角線」）とする直角三角形の２辺の長さと　$1+\tan^2\theta$　を表にしたものなのでした。何らかの目的で作られた数表の一部です。でもどのように使われたのか、いまだに謎です。直角三角形の大きさはまちまちですが、角度がおよそ４５度から３１度まで、ほぼ等間隔で減少していきます。３辺の内で一番簡単なａで見ると、最小のものが６０、最大のものは１３５００になります。ａ＝６０のものは、ｂ＝４５、ｃ＝７５となって、有名な３：４：５の３辺を持つ直角三角形です。最大のものは（ａ,ｂ,ｃ)=(１３５００,１２７０９,１８５４１）で、偶然に見つかるような代物ではありません。このことから、いわゆる「ピュタゴラスの定理」とその３辺の求め方は既に知られていたことが確実になりました。何らかの計算の規則のような形で、直角三角形の３辺を自由に計算出来たに違いありません。**[後注：数学史の窓から③補足　を参照のこと]**

はじめに述べた２の平方根の求め方といい、大小の三角形を取り混ぜて何らかの目的のために系統的に直角三角形を求めたことといい、私は古代バビロニアの人たちの成し遂げたことを本当にすごいと思い、これらの人たちのことを心から尊敬します。古代にこれほどの高い文化的な発展を見せた民族が今直面している悲劇的な状況が一刻も早く解消され、再び平和が訪れるように祈らざるを得ません。最後にプリンプトン３２２の写真を見ていただいて、今日のお話を終りにします。ご清聴有難うございました。(2008.1.31.小訂)

プリンプトン３２２