媒介変数を利用した高専2年生のグラフアート

一関工業高等専門学校

梅野 善雄*

1 グラフアート

高専では主要な初等関数の多くは1年で学習する。2年ではそれらの関数の微分積分を学ぶと同時に、媒介変数表示された関数についても学習する。このような関数理解にはグラフ電卓が有効に活用できる。特に、グラフ電卓を利用すれば、関数のグラフを組み合わせて絵(グラフアート)を作成できる。そのような絵の作成を通して、学生は楽しみながら関数グラフを理解することができる。

このようなグラフをつないで絵を作成させる試みは、日本では金沢高専で最初に行われた。現在は、福井高専が中心になって全国関数グラフアートコンテスト(実行委員長は一松信先生)が実施されている。平成19年度は第4回目になり、中学生から大学生まで全国から多数の応募がなされている。実施要綱等の詳細については、大会事務局が置かれている福井高専の長水により後述する。

グラフアートの作品をみると、一見すると単純な「お絵かき」のように見えるが、その輪郭線は全て関数のグラフを繋ぎ合わせて作成されていることに留意する必要がある。このグラフアートを作成するには、学生は次のことを考えなければならない。

(1) 作成しようとする図形の構成曲線は、どのようなタイプの関数のグラフであるかを見抜くこと。
(2) その関数のグラフが図形の該当部分に表示されるには、どのような平行移動や対称移動を行えばよいかを考えること。
(3) 係数等を適切に決めて、その関数の式を具体的に決定すること。
(4) 複数のグラフで構成されるときは、その接続箇所の座標を決定すること。

学生にグラフアートを作成させることは、以上のことを自分で考えさせることになる。これにより、学生はいろいろなグラフの性質を実感として体得していくことが期待される。

2 関数の媒介変数表示

関数を媒介変数表示を利用すると、多彩な関数を表現できる。また、そのグラフ上の点の動き方を詳細に把握することができる。しかし、実際の授業では、このような理解を学生に得させるのはなかなか難しいものがある。多くは、媒介変数を消去した式から曲線の形を理解させるのが通常ではないかと思われる。

*E-mail: umesan@ichinoseki.ac.jp [URL] http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/mathnavi/

しかし、ここでグラフ電卓を利用すれば、媒介変数表示と曲線上の点の動きをストレートに理解させることが可能である。著者は、担当クラス (高専 2 年) の学生全員にグラフ電卓 TI–89 を 1 年間貸与し、自由に利用させた。この電卓は数式処理機能もあるので、学生は微分や積分の計算の答え合わせにも利用した。そして、媒介変数に関して通常の説明や問題をやり終えた後に、次のような作業を行わさせた。

まず、$x = \cos t,\ y = \sin t$ のグラフを表示させる (図 1)。何度も再表示させる中で、x 座標の変化や y 座標の変化に注目すると三角関数のグラフと同一であることを理解させる。その理解を得た上で、次のような動きをするにはどのような式とすればよいかを考えさせた。

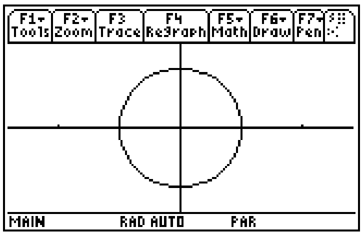


図 1

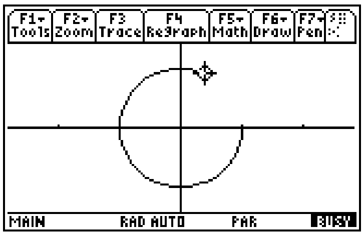


図 2

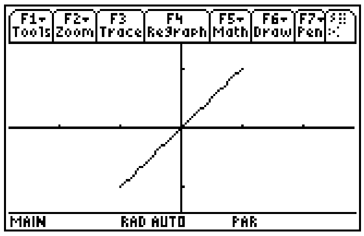


図 3

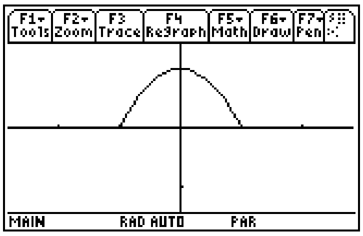


図 4

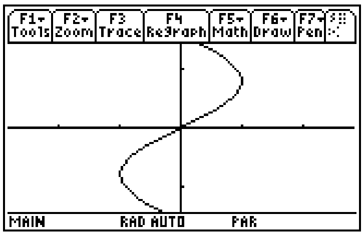


図 5

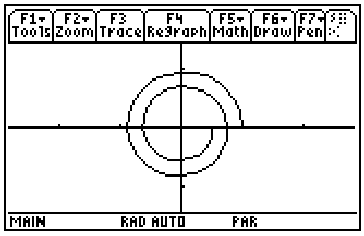


図 6

(1) 回転の向きを逆にする (図 2)。

(2) 点が直線 $y = x$ 上を次のように移動する (図 3)。

$$(1, 1) \to (0, 0) \to (-1, -1) \to (0, 0) \to (1, 1)$$

(3) 点が放物線 $y = 1 - x^2$ 上を次のように移動する (図 4)。

$$(1, 0) \to (0, 1) \to (-1, 0) \to (0, 1) \to (1, 0)$$

(4) 点が曲線 $x = \sin y$ 上を次のように移動する (図 5)。

$$(0, -\pi/2) \to (-1, -\pi/4) \to (0, 0) \to (1, \pi/4) \to (0, \pi/2)$$

(5) 点が $(1, 0)$ から左回りに 2 回転して、最後は $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ になる (図 6)。

このような理解を得させた上で、媒介変数表示された関数を繋ぎ合わせて、グラフアートを作成させる課題を与えた。ただし、t の範囲は $0 \leqq t \leqq 2\pi$ とし、$x,\ y$ の範囲は $-7.9 \leqq x \leqq 7.9,\ -3.8 \leqq y \leqq 3.8$ で作成するよう指示した。その作成の過程では、いろいろな試行錯誤が必要になる。その作業を通して、媒介変数表示された関数の理解を深めさせることを意図したものである。なお、曲線の描画範囲の指定や、太線・細線等の指定方法については事前に説明済みである。

3　学生の作品例

ここでは、学生がどのような作品を作成したか、その幾つかの作品を紹介する。

3.1　リース

この作品は、全部で 14 組の媒介変数表示された関数で作成されている (図 7)。上部のリースの「柄」の部分は 4 組からなり、t の範囲は $0 \leqq t \leqq 2\pi$ のままである。

まず、波打つ円は、次の式で定義される (図 8)。

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin(5t)\cos(t) + 2\cos(t) \\ y = \dfrac{1}{2}\sin(5t)\sin(t) + 2\sin(t) \end{cases}$$

上式の後に $\mid t = \dfrac{2}{3}t$ という条件をつけると、t の範囲が $0 \leqq t \leqq 2\pi/3$ となり穴ができる (図 9)。記号「$\mid$」は、$\mid$ の左側の式に右側の条件をつける記号である。通常は「$t = \pi$」という値の代入や、「$t < \pi$」のように範囲を制限する場合に利用される。学生はプログラミングと同じスタイルで自然に指定したと思われるが、このような指定が有効であることは、マニュアルにはどこにも記載されていない。学生が自分で見出したものである。そして、この穴の位置を中央になるよう調整するため、さらに次の指定を行って柄の回転を行っている。

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin(5t)\cos(t) + 2\cos(t) \mid t = \dfrac{2}{3}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\sin(5t)\sin(t) + 2\sin(t) \mid t = \dfrac{2}{3}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

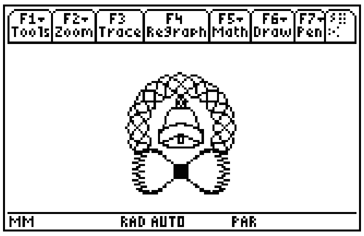


図 7

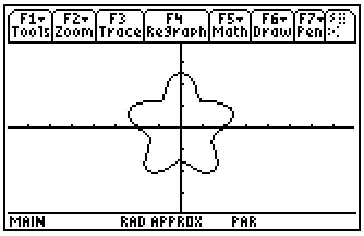


図 8

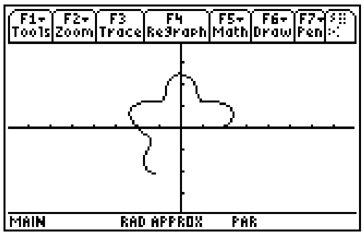


図 9

下部のリボンは 3 組の関数で構成され、右側のリボンは次式で定義されている。

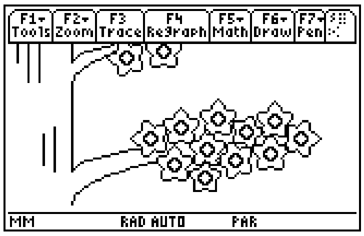
$$\begin{cases} x = 2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) + \dfrac{1}{4}\sin(23.5t) \\ y = \sin(t) - 2 \end{cases}$$

グラフ電卓の液晶精度では、x 軸方向の振動を表示しきれなくて、図 7 の下部右側のように表示される。

3.2　春の訪れ

この作品は、37 組の媒介変数表示された関数からなる。桜の一つ一つの花びらは 1 組の媒介変数で表現されている。

具体的には次の式である。

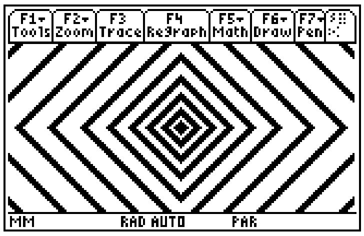


$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{7}\cos(7t)(5 - \sin(5t)) \\ y = -\dfrac{1}{7}\sin(t)(5 - \cos(5t)) \end{cases}$$

この花びらを平行移動することで桜が表現されている。

3.3　ワープ空間

この作品は、一見すると直線を少しずつずらして作成されているように思えるが、一つ一つの太枠は、次のような 1 組の媒介変数表示された関数である。

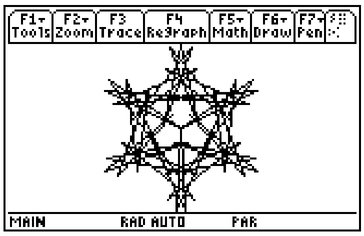


$$\begin{cases} x = \left(1.6 - \dfrac{t}{6\pi}\right)\cos(12t) \\ y = \left(1.6 - \dfrac{t}{6\pi}\right)\sin(12t) \end{cases}$$

グラフ電卓では、媒介変数表示された関数のグラフは、t の値を少しずつ変えながら $x,\ y$ の値を計算し、隣り合う 2 点を直線で結ぶことにより全体のグラフが表示される。標準では t のステップ幅は $\pi/24$ であるが、上式ではステップ幅が期せずして $\pi/2$ 刻みになる。後で学生に聞くと、「いろいろ試しているうちに面白い形ができたので $\cdots$」ということであり、意図的に行ったものではないようである。

3.4　雪の結晶

この作品は 1 組の媒介変数表示で表現されている。



$$\begin{cases} x = 2(\sin(22t) + \sin(t)) \\ y = 2(\cos(22t) + \cos(t)) \end{cases}$$

ステップ幅が $\pi/24$ のため、このような形となる。

4　今後の課題

グラフ電卓を貸与して使い方を教えるだけで、学生はいろいろなことを試みる。偶然にできた形であっても、定義式との関係から理由を考えさせることができる。グラフアートの作成にはかなりの試行錯誤を伴うが、学生は「大変だった」「面倒くさかった」とは思っても、最後は「面白かった」「達成感があった」「関数の勉強になった」という感想を漏らしている。このツールを利用することで、学生に数学を楽しみながら学ばせていることにもなっているのではないかと思われる。この課題の発展の仕方として、先に完成図を示して、それを自分で再現させることも効果的と思われる。媒介変数 t のステップ幅を意図的に制御させることも理解を深めるには有効であろう。