ピタゴラスの三角形の面白い性質の新発見

細矢　治夫
お茶の水女子大学名誉教授

2008年９月１３日
数学教育の会
学習院

？ピタゴラスブームの到来？

2008年

細矢治夫　ピタゴラスの三角形の面白い性質の再発見

２月　パズる会　（箱根）

３月　フィボナッチ集会　（海洋大学)

Gathering for Martin Gardner（米国アトランタ）

５月　ホームカミングデイ　（お茶の水女子大学)

E.マオール (伊里由美 訳），ピタゴラスの三角形，岩波書店 (2008).

小林吹代，ピタゴラス数を生み出す行列のはなし, ベレ出版 (2008).

寺井伸浩，　ピュタゴラス数，数理科学，2008年8月号.

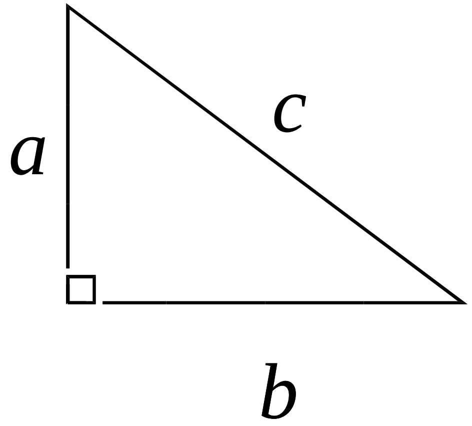
cf.　A. Hall, *Mathematical Gazette*, **54** (1970) 377-379.

J. Roberts, *Elementary Number Theory*, MIT Press, Cambridge, MS (1977).

ピタゴラスの三角形 (Pythagorean triple)

三辺が整数の直角三角形

$$a^2 + b^2 = c^2$$



足（leg） $\left\{ \begin{array}{ll} a & \text{奇数} \\ b & \text{偶数} \end{array} \right.$

斜辺（hypotenuse） c 奇数

a, b, c が互いに素

$\Downarrow$

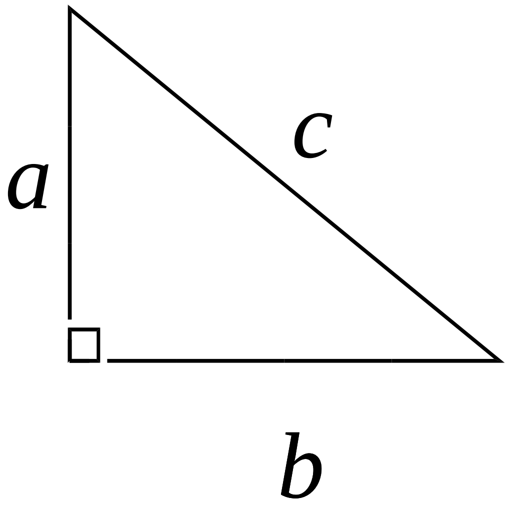
既約ピタゴラス三角形（pPT）

（3　4　5），　（5　12　13），　（21　20　29），　他無数

primitive

既約PTは一対の整数(m,n)で表される

既約ピタゴラス三角形（pPT）



$$a = m^2 - n^2$$ 奇数

$$b = 2\,m\,n$$ 偶数

$$c = m^2 + n^2$$ 奇数

ただし，mとnは，

互いに素で，

かつ，偶と奇　又は　奇と偶

既約ピタゴラス三角形

$0 < a, b, c < 100$ の既約ピタゴラス三角形は１６種類

a	b	c	m	n	記号	分類	a	b	c	m	n	記号	分類
3	4	5	2	1	3+1	$\Delta 1$, $d1$	63	16	65	8	1	63–47	$\delta 2$
5	12	13	3	2	5+7	$\Delta 1$	21	20	29	5	2	21–1	$d1$
7	24	25	4	3	7+17	$\Delta 1$	45	28	53	7	2	45–17	$\delta 8$
15	8	17	4	1	15–7	$\delta 2$	33	56	65	7	4	33+23	$\Delta 9$
9	40	41	5	4	9+31	$\Delta 1$	77	36	85	9	2	77–41	$\delta 8$
11	60	61	6	5	11+49	$\Delta 1$	39	80	89	8	5	39+41	$\Delta 9$
35	12	37	6	1	35–23	$\delta 2$	55	48	73	8	3	55–7	$d7$
13	84	85	7	1	13+71	$\Delta 1$	65	72	97	9	4	65+7	$d7$

$0 < a, b, c < 1000$ では 158 種類. その分布はほぼ一様.

0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
16	16	15	16	17	15	17	16	12	18	

ピタゴラスの三角形の歴史

BC 1800　バビロニアの粘土板 (Plimpton 322)

(3, 4, 5) から (12709, 13500, 18541) まで15種のPT

BC 550　ギリシャのピタゴラス (Pythagoras)

平方根が有理数で表せないことを証明

BC 5世紀　インドのシュルバスートラ

(3, 4, 5) (5, 12, 13) (8, 15, 17) (7, 24, 25) (12, 35, 37)

BC 300　ギリシャのディオファントス (Diophantus)

$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$の発見

AD 263　中国「九章算術」

(3, 4, 5) (5, 12, 13) (55, 48, 73) (91, 60, 109)

AD 600　インドのブラマグプタ

$(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$の発見

AD 1970　米国の A. Hall

系統樹（行列 U, A, D）の発見

既約 PT と行列 U, A, D の関係
A Hall (1970)

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

これらの行列を $(3\ \ 4\ \ 5)^T$に掛けると,

$\mathbf{U}\,(3\ \ 4\ \ 5)^T = (5\ \ 12\ \ 13)^T$, $\mathbf{U}\,(5\ \ 12\ \ 13)^T = (7\ \ 24\ \ 25)^T, \ldots$

Δ1グループ

$\mathbf{A}(3\ \ 4\ \ 5)^T = (21\ \ 20\ \ 29)^T$, $\mathbf{A}\,(21\ \ 20\ \ 29)^T = (119\ \ 120\ \ 169)^T, \ldots$

d1グループ

$\mathbf{D}\,(3\ \ 4\ \ 5)^T = (15\ \ 8\ \ 17)^T$, $\mathbf{D}\,(15\ \ 8\ \ 17)^T = (35\ \ 12\ \ 37)^T, \ldots$

δ1 グループ

また，全ての既約 PT (a, b c), は, progenitor (3 4 5) に**U, A, D**を

ある順序で掛け合わせたものを掛けることで一意的に表せる**.**

genealogy

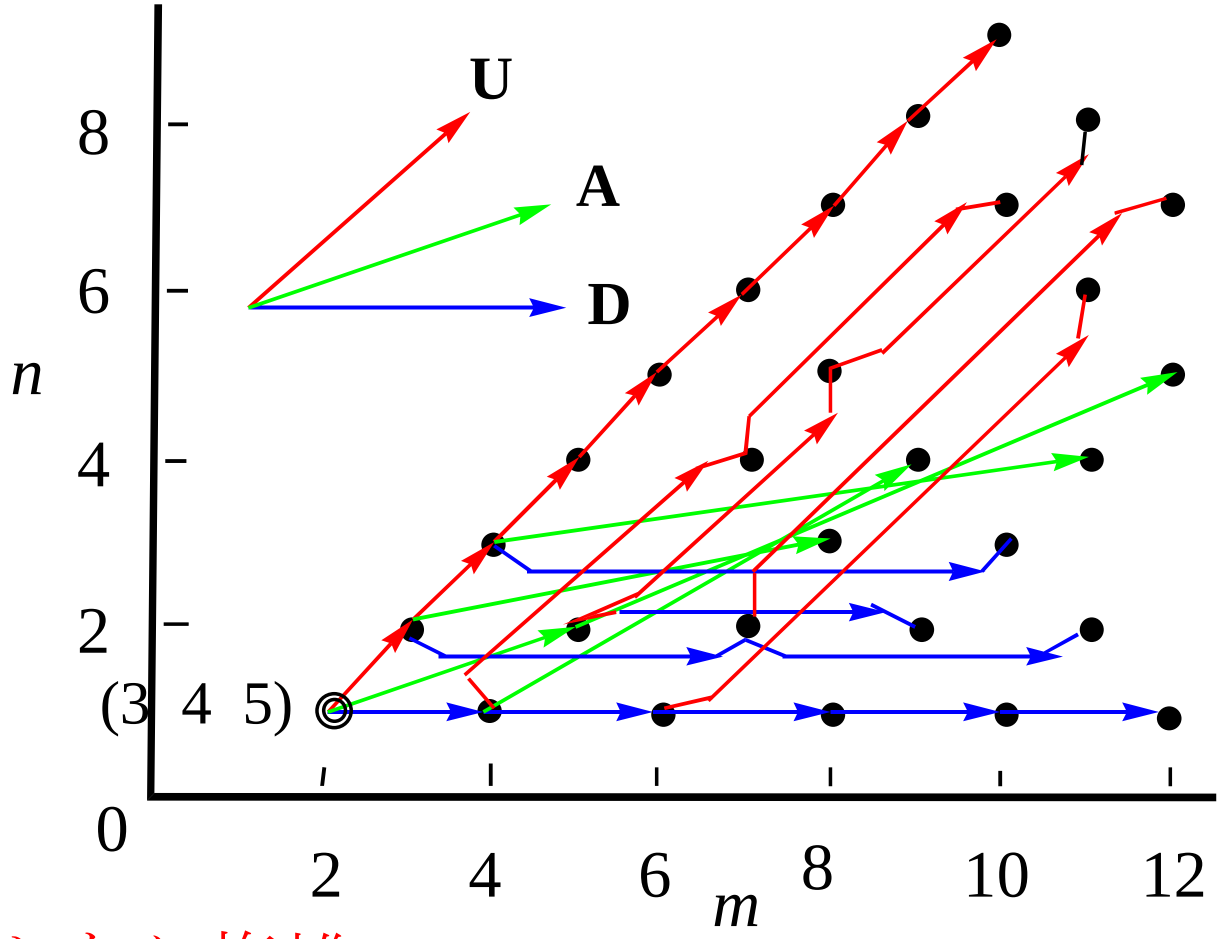
既約PTの U, A, D による系統樹

A. Hall (1970)

			U	(7 24 25) (4,3)
	U	(5 12 13) (3,2)	A	(55 48 73) (8,3)
			D	(45 28 53) (7,2)
			U	(39 80 89) (8,5)
(3 4 5) (2,1)	A	(21 20 29) (5,2)	A	(119 120 169) (12,5)
			D	(77 36 85) (9,2)
			U	(33 56 65) (7,4)
	D	(15 8 17) (4,1)	A	(65 72 97) (9,4)
			D	(35 12 37) (6,1)

—> Easy, but <— Difficult

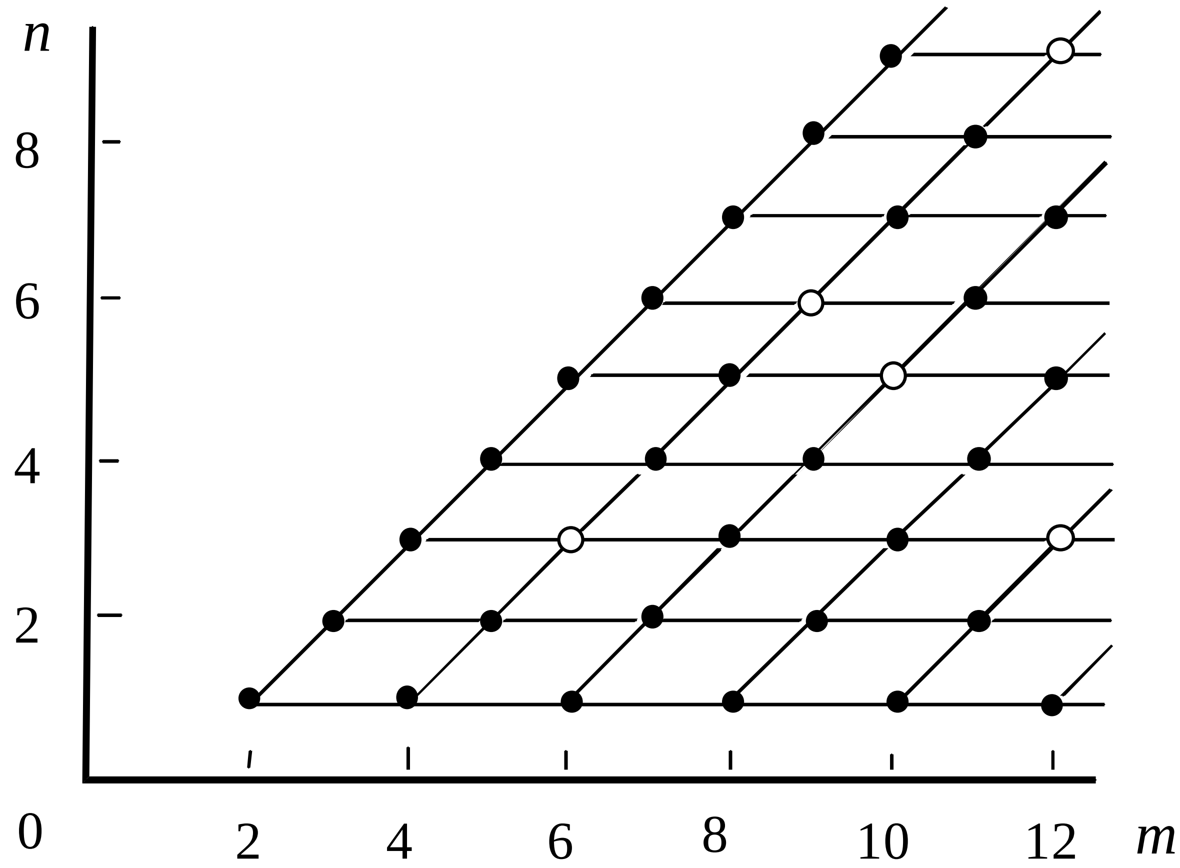
Hall の系統樹を (m,n) 格子上にマップ



かなり複雑！

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

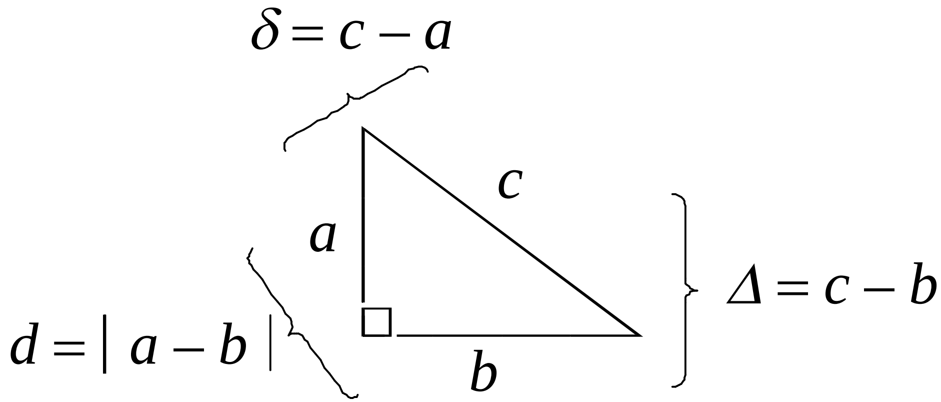
(m,n)　格子上の既約（●）と可約（○）PTの関係



合体させて分類した方がすっきりする

ピタゴラス三角形の分類

PT の表し方と分類　　　　二辺間の差をとる



Δ = 1, 9, 25, 49, 81, 121, 169 ⋯　　$(2k+1)^2$　奇数の平方　　Δk

δ = 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, ⋯　　$2k^2$　平方数の 2 倍　　δk

d = 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, ⋯　　$p \equiv \pm 1$ (mod. 8)

8 で割った余りが +1 か -1 の素数，及び p の積　$d\ p$

既約PTの分類（$0 < c < 100$）

a	*b*	*c*	*m*	*n*	Δ	δ	*d*	*a*	*b*	*c*	*m*	*n*	Δ	δ	*d*
3	4	5	2	1	1-1	1-1	1	63	16	65	8	1	7-1	1-4	47
5	12	13	3	2	1-2	2-1	7	21	20	29	5	2	3-2	2-2	1
7	24	25	4	3	1-3	3-1	17	45	28	53	7	2	5-2	2-3	17
15	8	17	4	1	3-1	1-2	7	33	56	65	7	4	3-4	4-2	23
9	40	41	5	4	1-4	4-1	31	77	36	85	9	2	7-2	2-4	41
11	60	61	6	5	1-5	5-1	49	39	80	89	8	5	3-5	5-2	41
35	12	37	6	1	5-1	1-3	23	55	48	73	8	3	5-3	3-3	7
13	84	85	7	6	1-6	6-1	71	65	72	97	9	4	5-4	4-3	7

各グループの漸化関係 (recursive relation)

Δ 1			Δ 3			δ 1			δ 2			*d* 1			*d* 7		
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
3	4	5	15	8	17	3	4	5	5	12	13	3	4	5	15	8	17
5	12	13	21	20	29	15	8	17	21	20	29	21	20	29	65	72	97
7	24	25	*27*	*36*	*45*	35	12	37	45	28	53	119	120	169	403	396	565
9	40	41	33	56	65	63	16	65	77	36	85	697	696	985			
11	60	61	39	80	89	99	20	101	117	44	125				5	12	13
13	84	85	*45*	*108*	*117*										55	48	73
															297	304	425

a: $f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2}$

b, c: $f_n = 3f_{n-1} - 3f_{n-2} + f_{n-3}$

a, c: $f_n = 3f_{n-1} - 3f_{n-2} + f_{n-3}$

b: $f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2}$

a, b: $f_n = 5f_{n-1} + 5f_{n-2} - f_{n-3}$

c: $f_n = 6f_{n-1} - f_{n-2}$

共通

d グループでは漸化式と行列 $\mathbf{A}$ の作用が一致！

$d1$ グループ

$$(3\ \ 4\ \ 5) \xrightarrow{\mathbf{A}} (21\ \ 20\ \ 29) \xrightarrow{\mathbf{A}} (119\ \ 120\ \ 169) \xrightarrow{\mathbf{A}} (697\ \ 696\ \ 985) \rightarrow$$

$$\overset{\mathbf{O}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{pmatrix}, \quad \overset{\mathbf{O}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 \\ 120 \\ 169 \end{pmatrix}, \quad \overset{\mathbf{O}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 119 \\ 120 \\ 169 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 697 \\ 696 \\ 985 \end{pmatrix}, \cdots$$

$$f_n = 5f_{n-1} + 5f_{n-2} - f_{n-3}$$

$$f_n = 6f_{n-1} - f_{n-2}$$

			697	119	21	3
169	29	5	696	120	20	4

$\Delta 1$ グループでも漸化式と行列 **U** の作用が一致！

$$(3\ \ 4\ \ 5) \xrightarrow{\mathbf{U}} (5\ \ 12\ \ 13) \xrightarrow{\mathbf{U}} (7\ \ 24\ \ 25) \xrightarrow{\mathbf{U}} (5\ \ 40\ \ 41) \rightarrow$$

O **O** **O**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 40 \\ 41 \end{pmatrix}, \cdots$$

$$f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2}$$

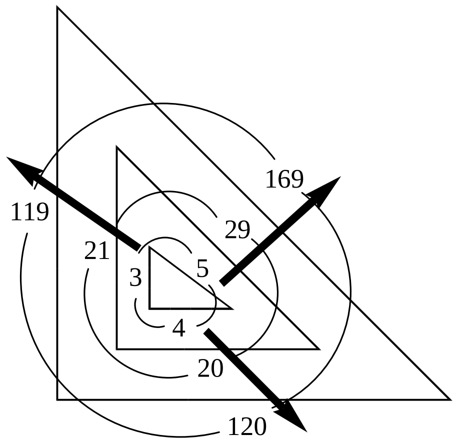
7 5 3

$$f_n = 3f_{n-1} - 3f_{n-2} + f_{n-3}$$

40 24 12 4

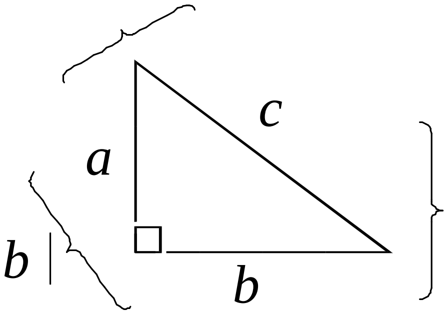
41 25 13 5

PT 探索の作戦とその戦果



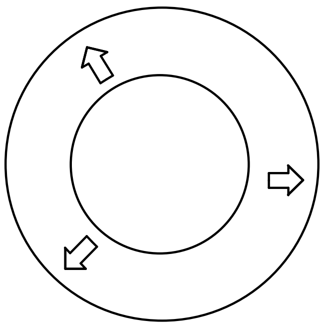
PT の表し方と分類　　　二辺間の差をとる

$$\delta = c - a$$



$$d = | a - b |$$

$$\Delta = c - b$$



中から同心円的に広げるのが
U, A, D 行列（３行３列）

operator technique

演算子法で両者の
関係をつなげた

同じ辺の増加傾向を見るのが
漸化式（３次）

この関係は演算子法で説明がつく

H. Hosoya, N. Ohkami, *J. Comput. Chem.*, **4**, 585 (1983).

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

演算子 **O** を定義し、上の行列の特性多項式を計算する。

$$\mathbf{O}\, f_n = f_{n+1}$$

$$\det(\mathbf{U}-\mathbf{OE})=\begin{vmatrix}1-\mathbf{O} & -2 & 2\\ 2 & -1-\mathbf{O} & 2\\ 2 & -2 & 3-\mathbf{O}\end{vmatrix}=-(\mathbf{O}-1)^3=-(\mathbf{O}-1)(\mathbf{O}^2-2\mathbf{O}+1)=-(\mathbf{O}^3-3\mathbf{O}^2+3\mathbf{O}-1)=0$$

この演算多項式は、以下の漸化式を意味する。

$$f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2} \qquad \text{for} \quad a$$
$$f_n = 3f_{n-1} - 3f_{n-2} + f_{n-3} \qquad \text{for} \quad b,\quad c$$

同様に

$$\det(\mathbf{D}-\mathbf{OE})=-(\mathbf{O}-1)^3=0,\quad \text{and}$$
$$\det(\mathbf{A}-\mathbf{OE})=-(\mathbf{O}+1)(\mathbf{O}^2-6\mathbf{O}+1)=-(\mathbf{O}^3-5\mathbf{O}^2-5\mathbf{O}+1)=0$$

Δ3 グループは行列 **U** と漸化式の作用が合わない！

①	(Ğ21 20 29) →	(Ğ3 Ğ4 5) →	(**15 8 17**) →	(**33 56 65**) →	(**51 140 149**)
	(Ğ2, Ğ5)	(1 ,Ğ2) ↓	(4, 1) → U	(7, 4)	(10, 7)
	↓	↓	↓	↓	↓
②	(Ğ15 8 17) →	(3 Ğ4 5) →	(**21 20 29**) →	(**39 80 89**) →	(**57 176 185**)
	(Ğ1, Ğ4)	(2, Ğ1) O	(5, 2) → U	(8, 5)	(11, 8)
	↓	↓	↓	↓	↓
③	(Ğ9 0 9) →	(9 0 9) →	(*27 36 45*) →	(*45 108 117*) →	(*63 216 225*)
	(0, Ğ3)	(3, 0) ↓	(6, 3) → U	(9, 6)	(12, 9)

Primitive and *non-primitive* PT

→: U matrix, ↓: recursive formulas

(m,n) コード の数列 に注意 ！

Δ5 グループも行列 **U** と漸化式の作用が合わない！

①	(−115 252 277)	→	(−65 72 97)	→	(−15 −8 17)	→	(**35 12 37**)	→	(**85 132 157**)	→	U
	(9, 14)		(4 ,9)		(1, 4) ↓		(6, 1)		(11,6)		
	↓		↓		↓		↓		↓		
②	(−105 208 233)	→	(−55 48 73)	→	(−5 −12 13)	→	(**45 28 53**)	→	(**95 168 193**)	→	U
	(8, 13)		(3, 8)		(2, 3) 0		(7, 2)		(12, 7)		
	↓		↓		↓		↓		↓		
③	(−95 168 193)	→	(−45 28 53)	→	(5 −12 13)	→	(**55 48 73**)	→	(**105 208 233**)	→	U
	(7, 12)		(2, 7)		(3, 2) ↓		(8, 3)		(13, 8)		
	↓		↓		↓		↓		↓		
④	(−85 132 157)	→	(−35 12 37)	→	(15 −8 17)	→	(**65 72 97**)	→	(**115 252 277**)		
	(6, 11)		(1, 6)		(4, 1)		(9, 4)		(14, 9)		
	↓		↓		↓		↓		↓		
⑤	(−*75 100 125*)	→	(−*25 0 25*)	→	(*25 0 25*)	→	(*75 100 125*)	→	(*125 300 325*)		
	(5, 10)		(0, 5)		(5, 0)		(10, 5)		(15, 10)		

(*m*,*n*) コード の数列に注意！　　一つずつ変化している

$\mathbf{U}^{1/n}$ の発見

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{U}^2=\begin{pmatrix}1 & -4 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 4 & -8 & 9\end{pmatrix},\quad \mathbf{U}^3=\begin{pmatrix}1 & -6 & 6\\ 6 & -17 & 18\\ 6 & -18 & 19\end{pmatrix},\quad \mathbf{U}^4=\begin{pmatrix}1 & -8 & 8\\ 4 & -31 & 32\\ 8 & -32 & 33\end{pmatrix}$$

等から

$$\mathbf{U}^n=\begin{pmatrix}1 & -2n & 2n\\ 2n & 1-2n^2 & 2n^2\\ 2n & -2n^2 & 1+2n^2\end{pmatrix},\quad \mathbf{U}^{j/k}=\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix}k^2 & -2jk & 2jk\\ 2jk & k^2-2j^2 & 2j^2\\ 2jk & -2j^2 & k^2+2j^2\end{pmatrix}$$

を発見、従って

$$\mathbf{U}^{1/3}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & -6 & 6\\ 6 & 7 & 2\\ 6 & -2 & 11\end{pmatrix}$$

が得られた。それを使って

$$\mathbf{U}^{1/3}(15\ \ 8\ \ 17)^{\mathrm{T}}=(21\ \ 20\ \ 29)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{U}^{1/3}(21\ \ 20\ \ 29)^{\mathrm{T}}=(27\ \ 36\ \ 45)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{U}^{1/3}(27\ \ 36\ \ 45)^{\mathrm{T}}=(33\ \ 56\ \ 65)^{\mathrm{T}},\ \ etc.,$$

が得られる。

$\mathbf{D}^{1/n}$ の発見

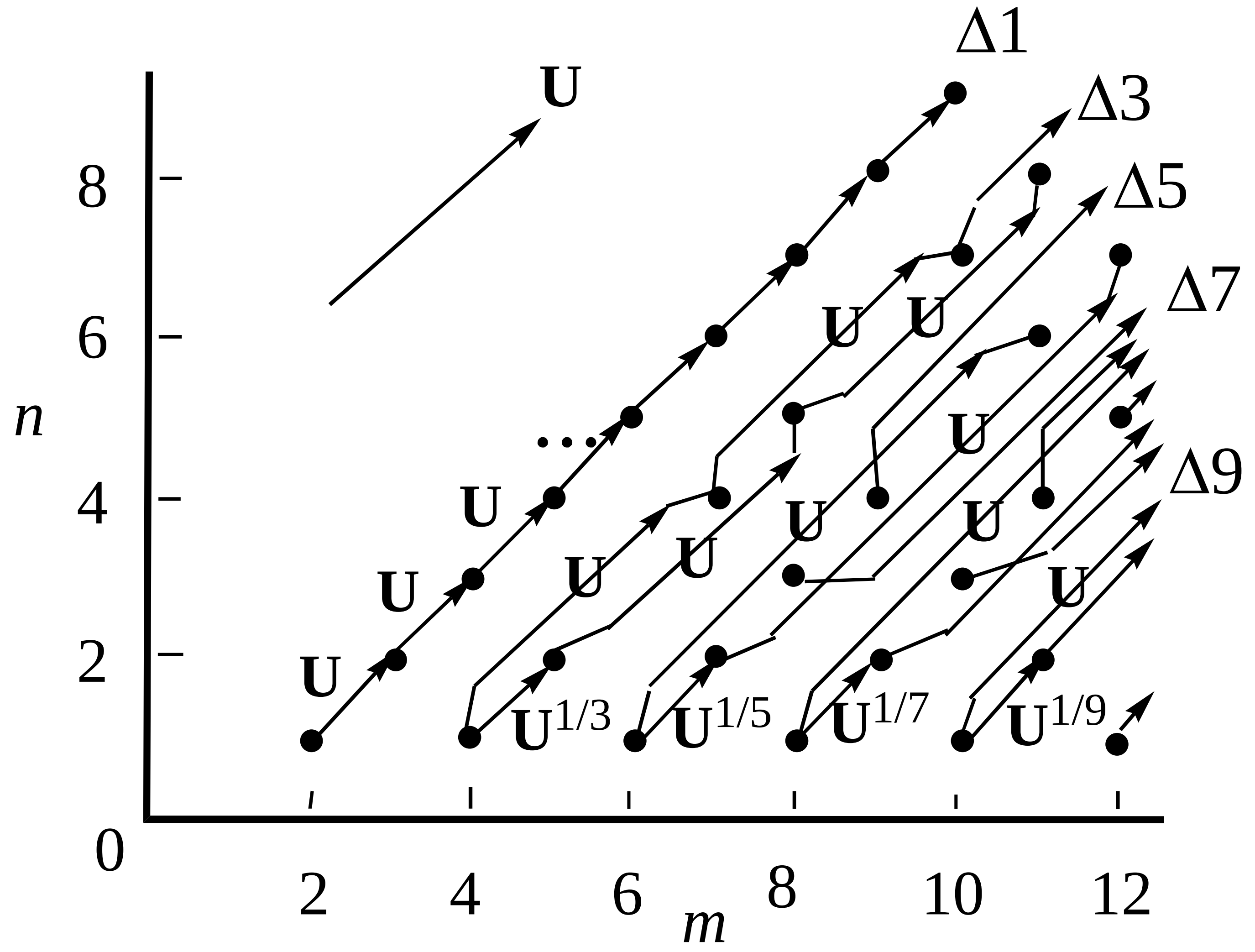
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 8 \\ -4 & 1 & 4 \\ -8 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^3 = \begin{pmatrix} -17 & 6 & 18 \\ -6 & 1 & 6 \\ -18 & 6 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} 1-2n^2 & 2n & 2n^2 \\ -2n & 1 & 2n \\ -2n^2 & 2n & 1+2n^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{j/k} = \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} k^2-2j^2 & 2jk & 2j^2 \\ -2jk & k^2 & 2jk \\ -2j^2 & 2jk & k^2+2j^2 \end{pmatrix}$$

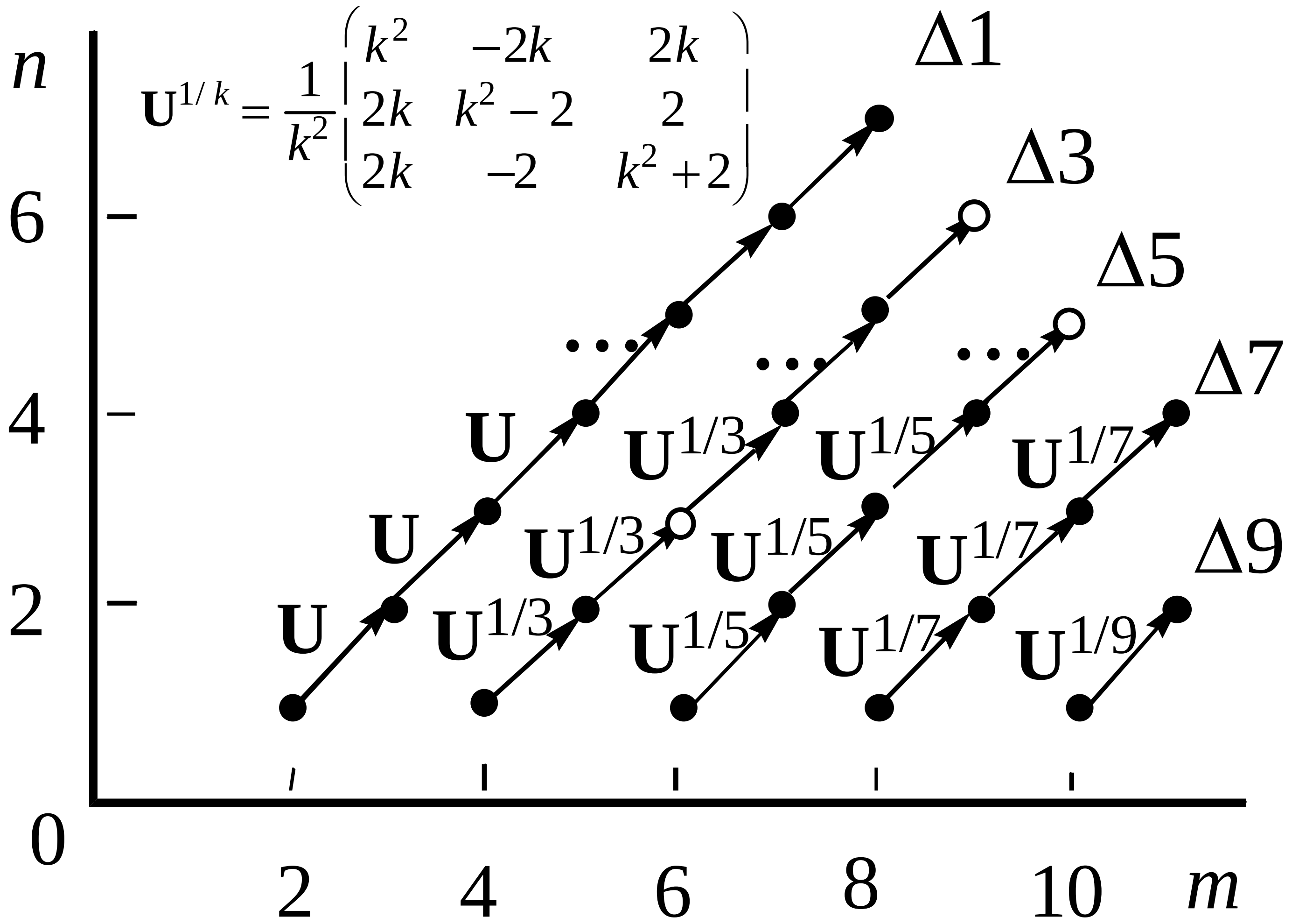
$$\mathbf{D}^{1/3} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -6 & 9 & 6 \\ -2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{D}^{1/3}(7\ \ 24\ \ 25)^{\mathrm{T}} = (\mathit{27}\ \ \mathit{36}\ \ \mathit{45})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{D}^{1/3}(\mathit{27}\ \ \mathit{36}\ \ \mathit{45})^{\mathrm{T}} = (55\ \ 48\ \ 73)^{\mathrm{T}}$

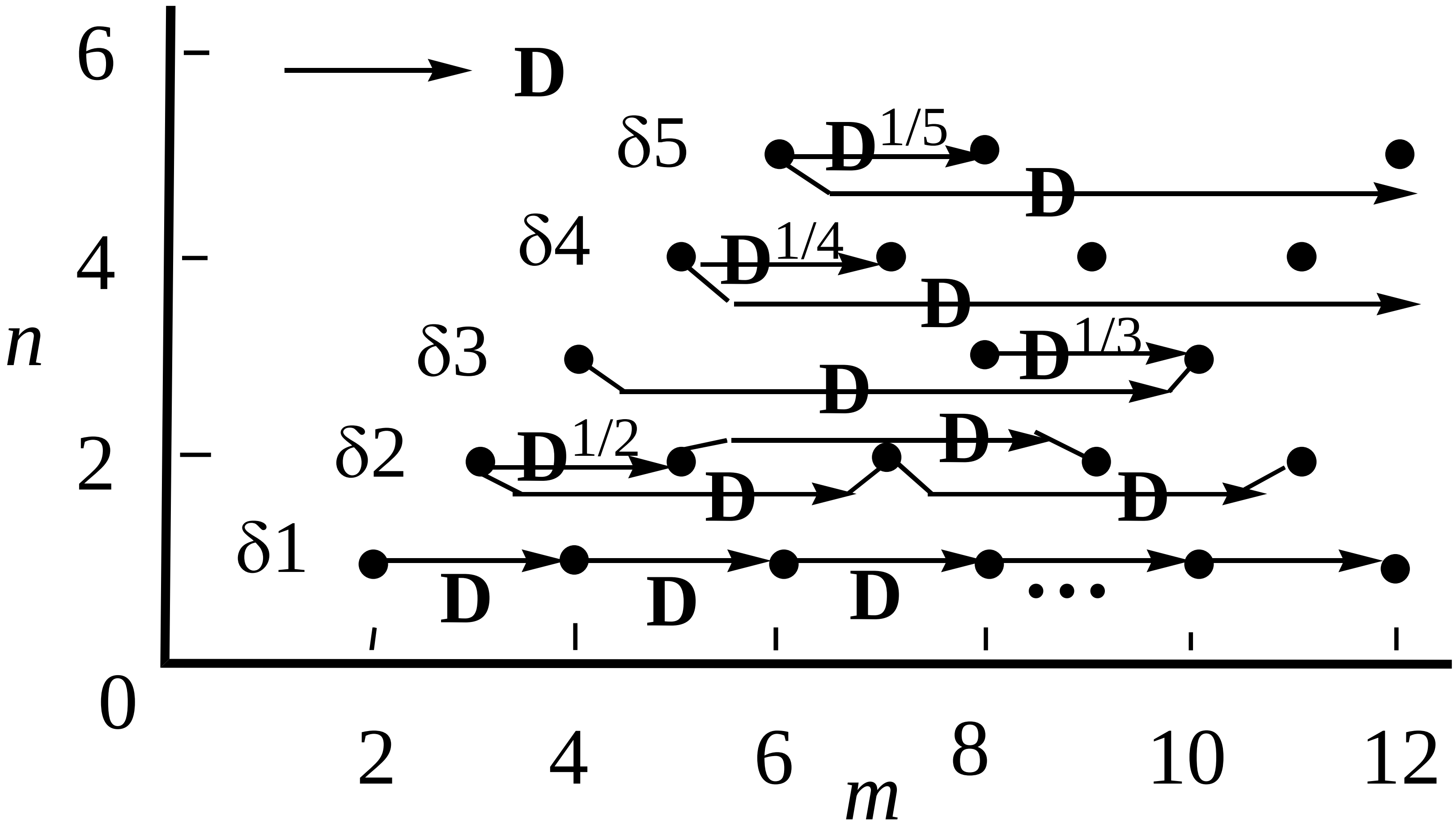
$\mathbf{D}^{1/3}(55\ \ 48\ \ 73)^{\mathrm{T}} = (91\ \ 60\ \ 109)^{\mathrm{T}}$, *etc.*, All the pPT's are related with $\mathbf{U}^{1/n}$ but not with $\mathbf{U}$



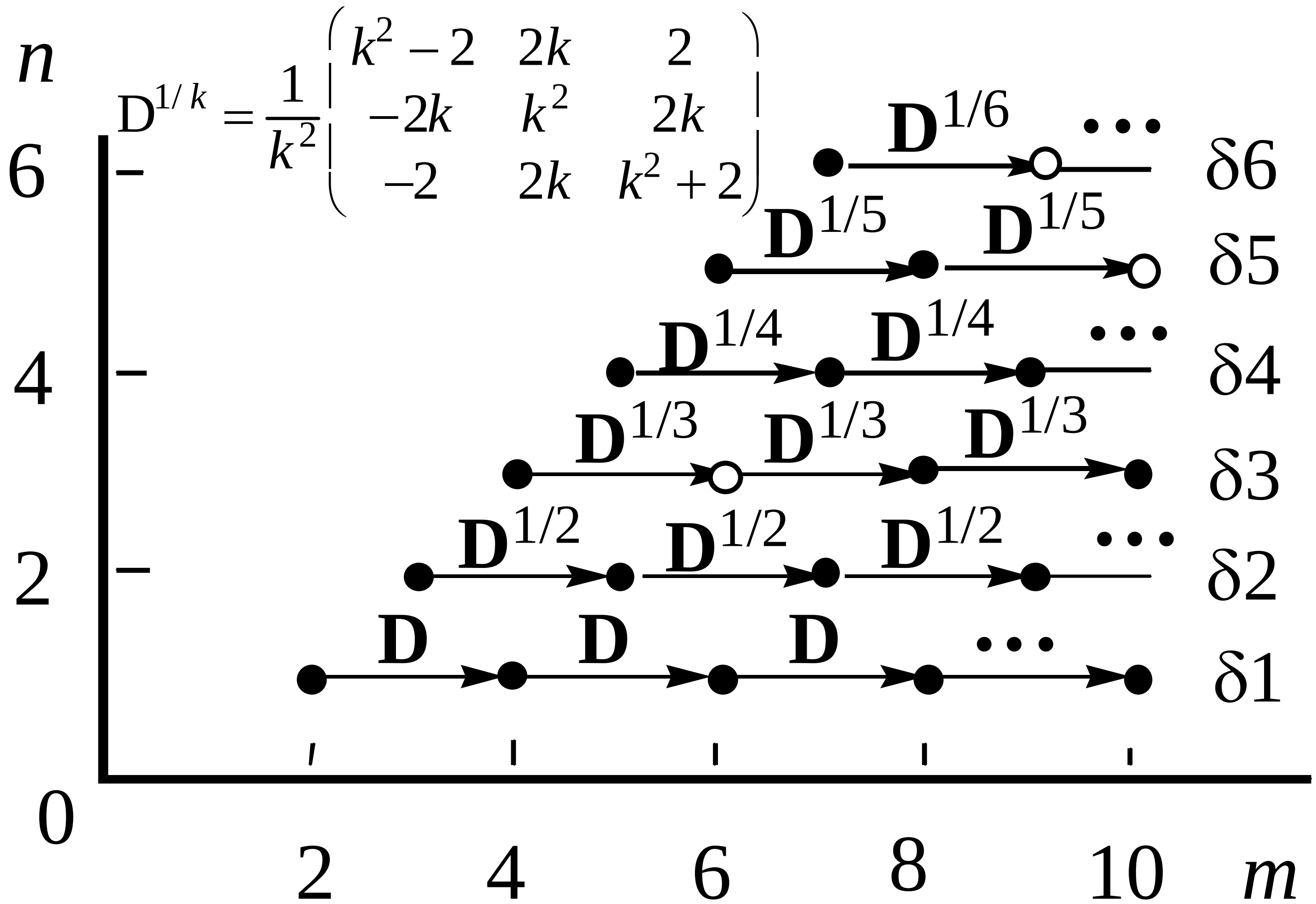
$\mathbf{U}^{1/n}$を使えば Δ グループは全て漸化式と同じ繋がり方になる



All the pPT's are related with $\mathbf{D}^{1/n}$ but not with $\mathbf{D}$



$\mathbf{D}^{1/n}$ を使えば δ グループは全て漸化式と同じ繋がり方になる



ここまでのまとめ
（ピタゴラス三角形の系統的分類と体系的な理解）

1) (既約)ピタゴラス三角形の新しい分類
   二辺間の差 (Δ, δ, d)
2) Hall の行列 UとD の j / k 乗根の一般式の導出とその意味付け
3) 全てのPTを $U^{j/k}$ $(3\ 4\ 5)^T$ 又は $D^{j/k}$ $(3\ 4\ 5)^T$で表す
4) A, U, D 系列の漸化式を行列 A, U, D から導出
   （演算子法）

更に

5) トポロジカルインデックス Z による 1) の図形的意味付け
   （グラフ理論）
6) 整数 n の平方根を近似するPTの系列の発見
   （無理数の有理数近似）
7) アポロニウス の窓

トポロジカルインデックス *Z*

H. Hosoya, *Bull. Chem. Soc. Jpn.*, **44**, 2332 (1971).

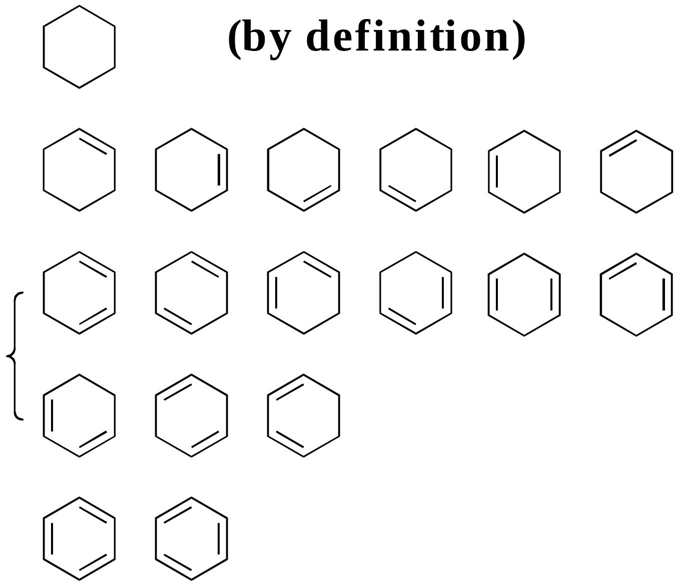
非隣接数 $p(G, k)$

グラフ G の中から互いに隣り合わない k 本の辺を選ぶ組合せの数

トポロジカル インデックス *Z*

$p(G, k)$ の総和

k	$p(G,k)$	
0	**1**	**(by definition)**
1	**6**	
2	**9**	
3	**2**	

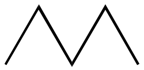


$Z_G = 18$

$Q_G(x) = 1 + 6x + 9x^2 + 2x^3$

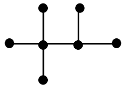
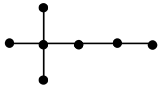
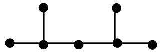
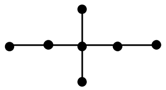
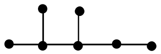
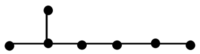
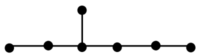
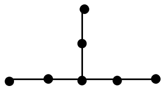
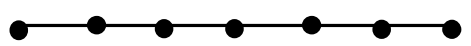
$M_G(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2$

経路グラフの Z はフィボナッチ数

N	G	$k =$	$p(\mathrm{G}, k)$				Z_{G}
		0	1	2	3	4	
1							1
2		1					2
3		1	2				3
4		1	3	1			5
5		1	4	3			8
6		1	5	6	1		13
7		1	6	10	4		21
8		1	7	15	10	1	34

Fibonacci numbers

Z は異性体の構造を識別できる

	$p(\mathrm{G},k)$				
k =	0	1	2	3	Z_{G}
	1	6	6	0	13
	1	6	7	0	14
	1	6	8	0	15
	1	6	7	2	16
	1	6	8	2	17
	1	6	9	2	18
	1	6	9	3	19
	1	6	9	4	20
	1	6	10	4	21

更に

アルカンの沸点 $\propto$ Z

etc.

Z の整数論の中での役割

連分数 (continued fraction)

連分多項式 (continuant proposed by Euler)

毛虫グラフ (caterpillar graph)

ペル方程式（Pell equation）とその最速解法

一般フィボナッチ数　(generalized Fibonacci series)

ペル数（Pell number）及びそれらの Z グラフ

ピタゴラスの三角形 (Pythagorean triangle)

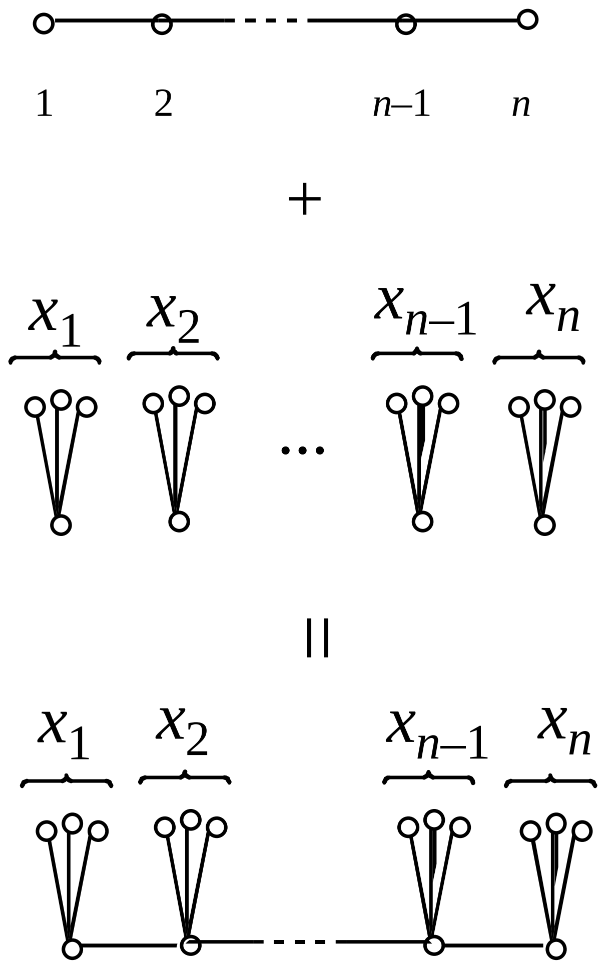
ヘロンの三角形 (Heronian triangle)

毛虫グラフ（ caterpillar graph ）

経路グラフ
path graph P_n

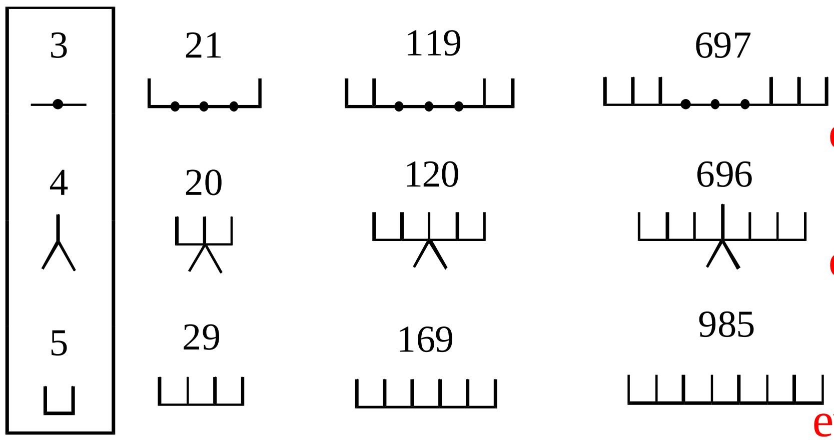
星グラフ
star graph
$S_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

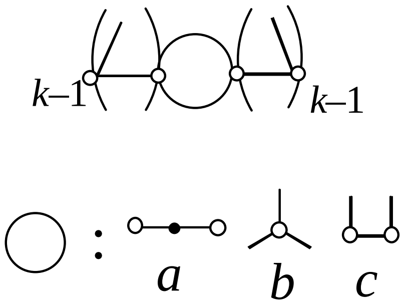
毛虫グラフ
caterpillar graph
$C_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

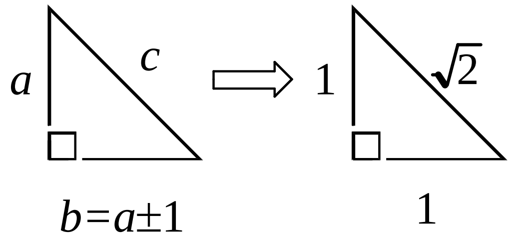


ピタゴラスの三つ子は「けむしグラフ」の Z

k	1	2	3	4	
(m, n)	(2, 1)	(5, 2)	(12, 5)	(29, 12)	
a_k	3	21	119	697	odd
b_k	4	20	120	696	odd
c_k	5	29	169	985	even







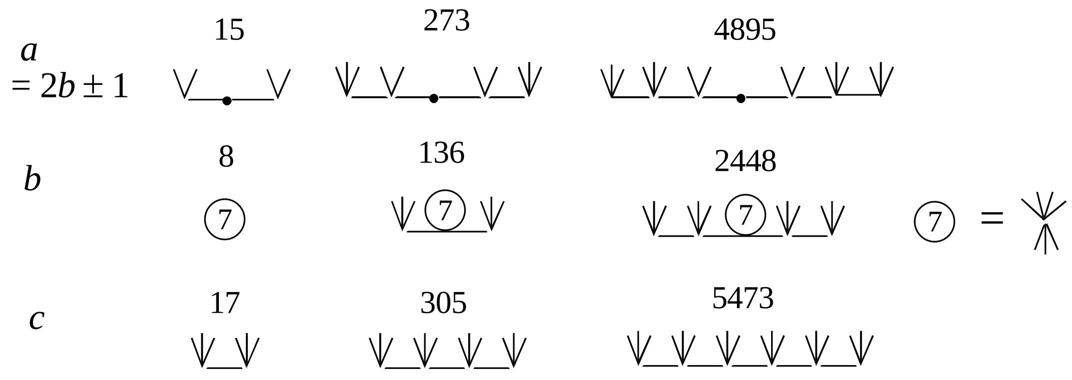
$$a, b : f_k = 5\, f_{k-1} + 5\, f_{k-2} - f_{k-3} \qquad c, a+b : f_k = 6\, f_{k-1} - f_{k-2}$$

しかも、全て **SymCat (symmetrical caterpillar)**

$(1,2,\sqrt{5})$ PT を表す Z

これも SymCat (symmetrical caterpillar)

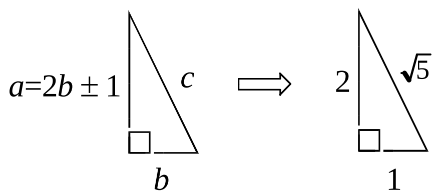
トポロジカルインデックスZとの対応



$a, b : f_k = 17\, f_{k-1} + 17\, f_{k-2} - f_{k-3}$

$c : f_k = 18\, f_{k-1} - f_{k-2}$

$m, n : f_k = 4\, f_{k-1} + f_{k-2}$



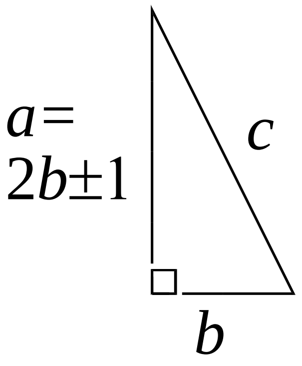
変換行列と漸化式との関係

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}(1 \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}} = (15 \quad 8 \quad 17)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{X}(15 \quad 8 \quad 17)^{\mathrm{T}} = (273 \quad 136 \quad 305)^{\mathrm{T}}, \text{etc.}$$

$$\det(\mathbf{X} - \hat{\mathrm{O}}\mathbf{E}) = -[\hat{\mathrm{O}}^3 - 17\hat{\mathrm{O}}^2 - 17\hat{\mathrm{O}} + 1] = -(\hat{\mathrm{O}} + 1)(\hat{\mathrm{O}}^2 - 18\hat{\mathrm{O}} + 1)$$

$\sqrt{n}$ を近似するPTの系列



$$a^2 + b^2 = c^2$$

に　$a=2b\pm1$　を代入すると

$$(5b\pm2)^2 + 1 = 5c^2$$

ここで　$x=5b\pm2,\quad y=c$　と置けば，問題は

ペル方程式　$x^2 - 5y^2 = -1$　に帰結する．

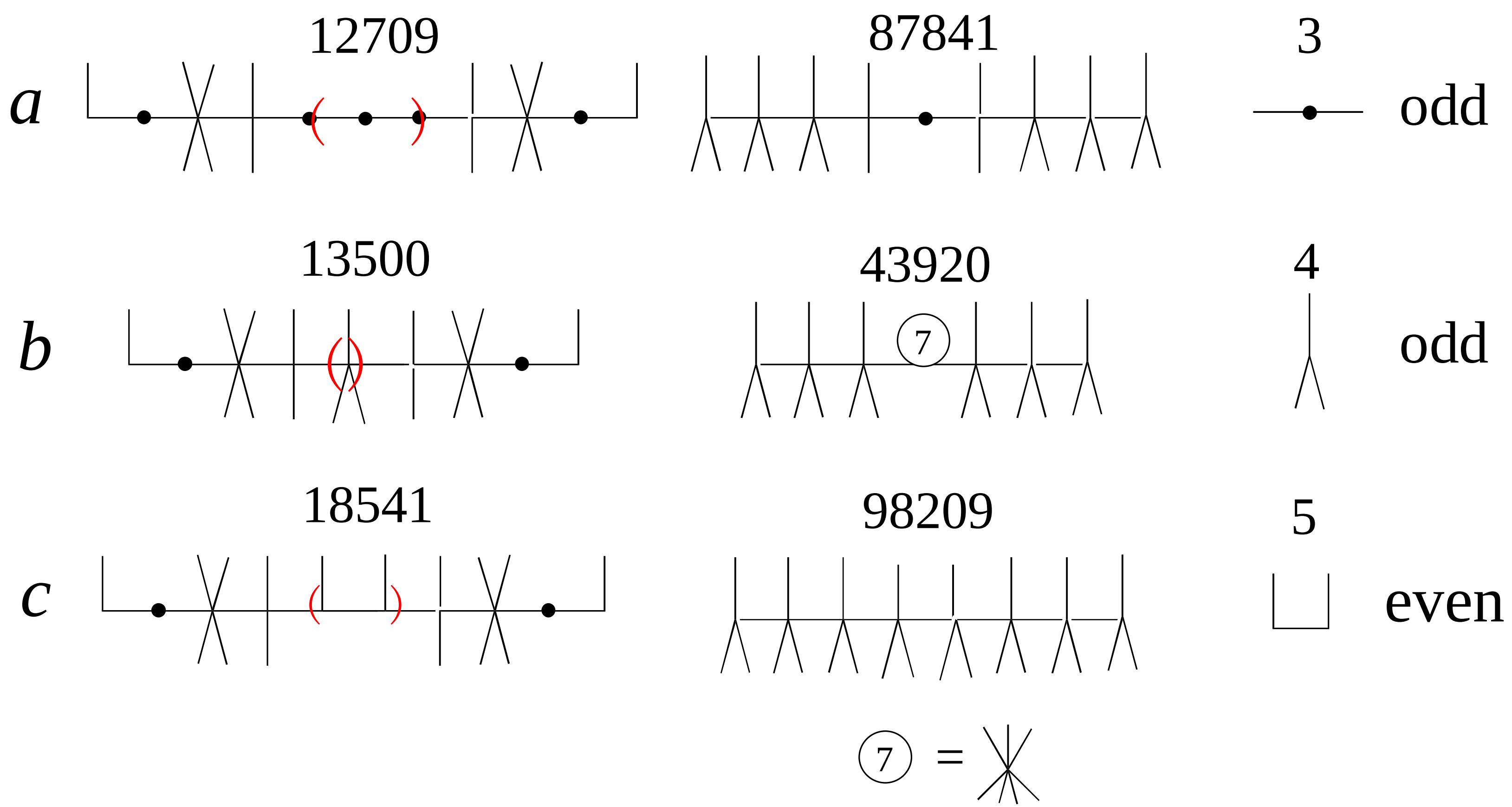
この結果，次のような系列のPTが得られる．

Pell equation

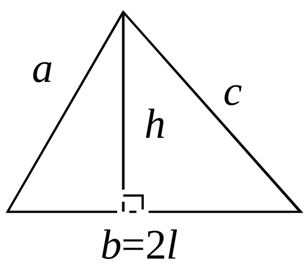
l	$x=5b\pm2$	$y=c$	$\pm$	b	$a=2b\pm1$	m	n	$(2a+b)/c$
1	38	17	–	8	15	4	1	2.23529
2	682	305	+	136	273	17	4	2.23606557
3	12238	5473	–	2448	4895	72	17	2.2360679700
4	219602	98209	+	43920	87841	305	72	2.2360679774766

全ての pPT の３辺は SymCat の Z で表される

バビロニア　　　$\sqrt{5}$を近似する pPT



ヘロンの三角形も topological index で整理される！



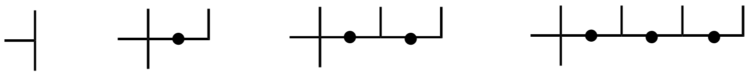
$$s = (a + b + c)/2$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

a, b, c, S : All integers

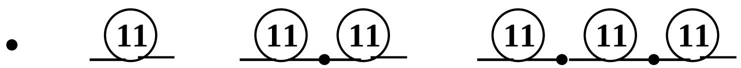
l	2	7	26	97
$a = 2l-1$	3	13	51	193
$b = 2l$	4	14	52	194
$c = 2l+1$	5	15	53	195

b



non-SymCat

$S = hl$	6	84	1170	16296
$S / 6$	1	14	195	2716



SymCat

アポロニウスの窓

QuickTimeý Ç²
TIFF (LZW) êLí£ÉvÉçÉOÉâÉÄ
Ç™Ç±ÇÃÉsÉNÉ`ÉÉÇ¾å©ÇÈÇžÇ½Ç…ÇÕïKóvÇ-ÇÅB

Hosoya items

- Hosoya point
- Hosoya’s triangle
- Hosoya cube
- Hosoya index = topological index
- Hosoya matrix
- Hosoya polynomial
- Hosoya mystery

- # Haruo Hosoya
- From Wikipedia, the free encyclopedia
- Jump to: navigation, search
- **Haruo Hosoya** (b. 1936) is a Japanese chemist, emeritus professor of the Ochanomizu University, Tokyo, Japan, the namesake of the Hosoya index used in computational chemistry.[1]
- Haruo Hosoya was born in Kamakura, Japan to a family of an office worker. During 1955-1959 he studied at the University of Tokyo. In 1964 he wrote his Ph.D. thesis, "Study on the Structure of Reactive Intermediates and Reaction Mechanism". After postdoc work abroad (Ann Arbor, Michigan, with prof. John Platt), in 1969 he became associate professor at the Ochanomizu University, where he worked for 33 years until his retirement in 2002. After retirement he keeps working in computational chemistry.[1]
- In 1971, Hosoya defined topological index (a graph invariant) as the total number of matchings of a graph plus 1[2]. The Hosoya index is often used in computer (mathematical) chemistry investigations for organic compounds.
- In 2002-2003 the *Internet Electronic Journal of Molecular Design* dedicated a series of issues to commemorate the 65th birthday of professor Hosoya.[3]
- Hosoya's article "The Topological Index Z Before and After 1971" describes the history of the notion and the associated inside stories and details other Hosoya's achievements. [4].

- [edit] ## References

- 1. ^ ***a*** ***b*** "Haruo Hosoya",by Ante Graovac, *Croatian Chemical Acta* 80 (2) XXI–XXII (2007)
- 2. **^** Hosoya H., Bull. Chem. Soc. Japan, 44, 1971, 2332
- 3. **^** Special issues dedicated to Professor Haruo Hosoya on the occasion of the 65th birthday, Internet Electronic Journal of Molecular Design, 2002, vol 1 no. 9 Å¥ 2003, Volume 2, Number 6).
- 4. **^** Hosoya H., *The Topological Index Z Before and After 1971*, *Internet Electronic Journal of Molecular Design*, 2002, 1, 428–442

- # Hosoya index
- From Wikipedia, the free encyclopedia
- Jump to: navigation, search
- The **Hosoya index**, also known as the **topological index** or **Z index** of a graph is the total number of matchings in it plus 1 ("plus 1" accounts for the number of matchings with 0 edges). Its computational complexity is $O(\exp(E))$, where E is number of edges[1]. This graph invariant was introduced by Haruo Hosoya in 1971.[2]. The Hosoya index is often used in chemoinformatics for investigations of organic compounds [3] [4]
- In his article "The Topological Index Z Before and After 1971" on the history of the notion and the associated inside stories, Hosoya writes that he introduced the Z index to report a good correlation of the boiling points of alkane isomers and their Z indices, basing on his unpublished 1957 work carried out while he was an undergraduate student at the University of Tokyo.[3].
- [edit] ## References

- 1. ^ Trofimov M. I., *An Optimization of Procedure for Calculation of Hosoya's Index*, J. Math. Chem., 1991, 8, 327.
- 2. ^ Hosoya H., Bull. Chem. Soc. Japan, 44, 1971, 2332
- 3. ^ ***a b*** Hosoya H., *The Topological Index Z Before and After 1971*, *Internet Electronic Journal of Molecular Design*, 2002, 1, 428–442
- 4. ^ Special issues dedicated to Professor Haruo Hosoya on the occasion of the 65th birthday, Internet Electronic Journal of Molecular Design, 2002, vol 1 no. 9 Å¥ 2003, Volume 2, Number 6).
- * Roberto Todeschini, Viviana Consonni (2000) "Handbook of Molecular Descriptors", *Wiley-VCH*, ISBN 3527299130

- # Topological index
- From Wikipedia, the free encyclopedia
- Jump to: navigation, search
- In chemical graph theory and in mathematical chemistry, a **topological index** is any of several numerical parameters (which are usually graph invariants) of a graph which characterize its topology. It is a kind of a molecular descriptor.[1] The Hosoya index is the first topological index recognized in chemical graph theory, and it is often referred to as "the" topological index. Another examples are the Wiener index, RandiçÅfs molecular connectivity index, BalabanÅfs J index, and others.[2] Usually topological indices do not recognize double bonds and atom types (C,N,O etc.), ignore hydrogen atoms and defined for connected undirected molecular graphs only.[3]
- **Contents** [hide]

- [edit] Global and local indices
- Hosoya index and Wiener index are **global (integral) indices** to describe entire molecule, Bonchev and Polansky introduced **local (differential) index** for every atom in a molecule.[3] Another examples of local indices are modifications of Hosoya index.[4]