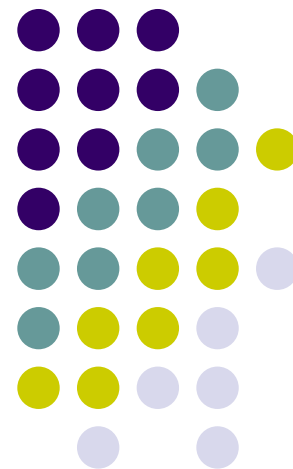
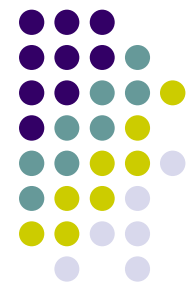


首都大学東京における 理工系線形代数・微積分 初等教育

首都大学東京
都市教養学部 数理科学コース
小林正典

平成20年9月13日 数学教育の会





目次

- 背景
- 目的
- 現状
- 総括

(線形代数について主にお話しします)

背景

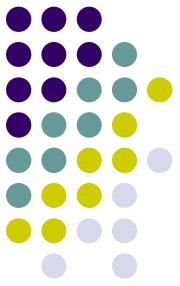


授業に期待される内容



+ 首都大独自の事情

入学時に前提とできる知識



前提知識の多様化(低下)

- 週休2日・ゆとり教育
- 「学力低下」・理工離れ
- 少子化
- 大学の競争
- 入試の多様化



課程を充実させる必要

- 理学・工学は変化(進化)する
 - 教育内容の整理・追加, カリキュラムの進歩
- 大学の差別化, 大学評価への対応, FDの必要性
 - 授業進度がシラバスと合わない, など
 - 学生からの質問に対応
 - 単位取得の実質化・自宅学習の促進
- 負のイメージの払拭
 - 数学を学ぶご利益が学生に見えにくい
 - 「数学の先生が好き勝手に講義してきた」 負の遺産



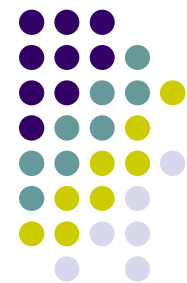
首都大学東京独自の事情

- 授業負担の増加
 - 合併による学生増 (3/2倍)
 - リストラによる数学教員減 (2/3倍)
- 授業内容の増加
 - 詰まった時間割, 履修単位数制限
 - 演習の必要性, やや進んだ内容まで含めたい
- 公平性の確保 (GPAの導入)
- 落第率は低くせよ (マルチキャンパス・教室サイズ)
- 過去の学生のレベルとの比較の目がある
- 学生の向学意欲はある. 概してまじめ
- 数学教室に対する風当たり(以上を無視できない)



目的

- 以上の課題に応えた基礎教育を行う。
 - 誰もができるように
 - できる学生の引き上げも
 - 教員の負担も減らしたい



現状

(都立大)

- 平成15年度 計画立案
- 平成16年度 一部学科で実施

(都立4大学→首都大)

- 平成17年度 全体に拡大(数物を除く)
- 平成18年度 テキスト作成
- 平成19年度～ 本格実施(数物を除く)



現状

- 共通化
- 演習
- テキスト
- 評価方法
- クラス分け
- オフィスアワー
- 他大学との連携
- カリキュラム
- 年次ごとの実施状況

線形代数 I (b, c, d, e, f, g)

クラス	時間	教室	担当教員	研究室	内線	メール(@tmu.ac.jp)	TA
線形代数 Ib	金曜3時限	1-201	横田 佳之	8-626	3133	jojo	松本 響
線形代数 Ic	水曜1時限	1-110	相馬 輝彦	8-625	3146	tsoma	西本 啓一郎
線形代数 Id	水曜1時限	1-210	今井 淳	8-630	3137	ohara	田中 覚
線形代数 Ie	水曜1時限	1-220	徳永 浩雄	8-673	3173	tokunaga	白根 竹人
線形代数 If	金曜3時限	1-210	小林 正典	8-670	3134	kobayashi-masanori	佐藤 宏平
線形代数 Ig	金曜3時限	1-301	間庭 正明	8-627	3163	mmaniwa	保村 匡亮

オフィスアワー

月曜日 5時限 (16:20-17:50): 徳永 (8-673) ・ 横田 (8-626)
火曜日 5時限 (16:20-17:50): 相馬 (8-625)
水曜日 5時限 (16:20-17:50): 今井 (8-630)
木曜日 3時限 (13:00-14:30): 小林 (8-670)
木曜日 4時限 (14:40-16:10): 津村 (8-674)
金曜日 5時限 (16:20-17:50): 間庭 (8-627)

- 質問などあれば、上記の時間に自由に来てください(予約不要)。担当教員と異なる先生でも構いません。

教科書:「線形代数 講義と演習」小林・寺尾著 培風館
できるだけ早く上記の教科書を用意しておいてください。

問題の解答(PDFファイル)

- [演習問題](#)
- [中間試験\(b,f,gクラス\)](#)
- [中間試験\(dクラス\)](#)
- [期末試験\(b,f,gクラス\)](#)
- [期末試験\(dクラス\)](#)

講義について

1. 線形代数 I (b, c, d, e, f, g) は、6人の教員が共同で責任を持ちます。同一の教科書を用い、同じ進度で進む予定です。
2. 自分の頭を働かせ、手を動かして、問題を解く能力をつけることを目標とします。そのために、TAの協力を得て、毎回の授業の終わりの30分ほどを演習形式で行います。解く問題は基本的で易しい問題ですが、その問題を自分で解くことによって、その日の講義の内容のエッセンスを自分のものにするを目指します。解いている間に、TAと二人で机間巡回し、学生を助けたり、質問に答えたりします。解いた結果は授業の最後に提出してもらい、出席点とします。ただし、内容によっては(白紙など)評価しません。
3. 成績は、期末試験40%とその他(授業参加度、演習、レポート、試験)60%で評価します。



共通化

- 目的
 - 毎週の学習内容を決め, 続く発展講義への前提となる内容を確保
 - クラス間の進度のばらつきをなくし, 難易度の不公平感を減らす
- 内容
 - カリキュラム・進度・シラバス・テキスト・演習問題・オフィスアワー・HP
- 試験は共通化の縛りは入れない(事前に問題例は配布)
 - 実施日が複数にまたがる. 単位の責任者は各教員にある.
- 毎週の最低学習内容は
「共通演習問題が解けるようになること」
 - あとは自由だが, 講義時間の余裕はない
 - 余裕のある学生には, テキストの進んだ記述や問題を学習させる
- 4月に担当教員全員でミーティング, 実施内容を確認

線形代数 I 演習問題 (第 10 回)

学修番号

氏名

10.

(1) \mathbf{R}^4 において, 方程式 $x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$ の解空間 V の次元と一組の基底 \mathcal{A} を求めよ.

(2) $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ に対し, $W_1 + W_2$ の一組の基底 \mathcal{B} を求めよ.

(3) 実は $V = W_1 + W_2$ である. \mathcal{A} の 1 次結合として \mathcal{B} のベクトルを表せ (基底の変換行列を求めよ).

解答例

(1) 係数行列 $[1 \ 2 \ -1 \ 3]$ は階段行列であり階数は 1 である. よって解空間の次元は, \mathbf{R}^4 の次元から階数を引いて, $4 - 1 = 3$ に等しい. 先頭の 1 に対応する x_1 を残りの未知数で表すと, $x_1 = 2x_2 + x_3 - 3x_4$.

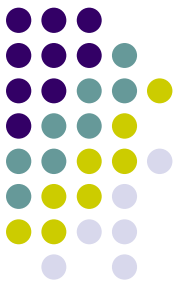
$$\text{よって一般解は } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_3 - 3x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これより, 基底として, 基本解を並べた $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れる.



共通化

- そのほかの利点
 - 担当教員の間には話が生じる
 - 評価基準のクラス間の比較ができる
 - 休講になりにくい(代講をしやすい)
 - 経年的なデータ・ノウハウの蓄積とフィードバック



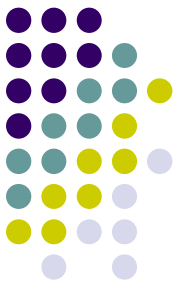
講義時間内の演習

- 1コマ = 講義60分 + 演習30分
- 時間内の演習により, 講義内容が身につくようにする
- 教員とTAが巡回し, 個別の質問に対応
 - 学生の理解状況を把握
 - 学生の質問に応じた補足もできる
- 出席点により毎週の参加を促す
- 解答をホームページに掲示
 - 一定期間後に復習させる



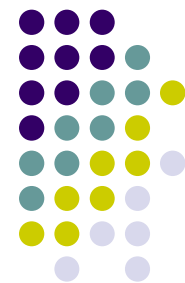
テキスト

- 確定したシラバスに準拠したテキストの作成
- 学生のレベルが幅広いことに対応
 - テキストをすべて講義する必要はない
- 自宅学習(予復習)の促進・担当者への配慮
 - 各章のまとめ
 - 演習問題の充実: 例題, 章末問題
 - 章末問題の解答は奇数番号のみ
 - 解答は試験で使えるような詳細な解答をつける



評価方法

- シラバスの記述：
期末試験40%＋その他60%
その他＝授業参加度，演習，レポート，試験
- 実質，授業参加度20%＋中間40%＋期末40%
 - クラスによっては，期末試験100%との最大を取る
- 出席点により，毎週の参加を促す。（白紙は0点）
 - 微積分は，宿題あり・4回欠席で不可。
- 中間試験と期末試験を実施
 - まんべんなく勉強させる。中間試験で安心する学生も
- 試験内容は，毎週の演習内容を基準に作成
 - 学習目標は明確



クラスわけ

- コース指定
 - 1コース1クラスではない
 - クラスごとの, 興味・レベルをだいたい揃える
- 難易度別編成はしない
 - 現状ではそこまでの必要はないと判断
- クラス人数は100人を越える
 - 演習を含めるため適正規模の確保は課題



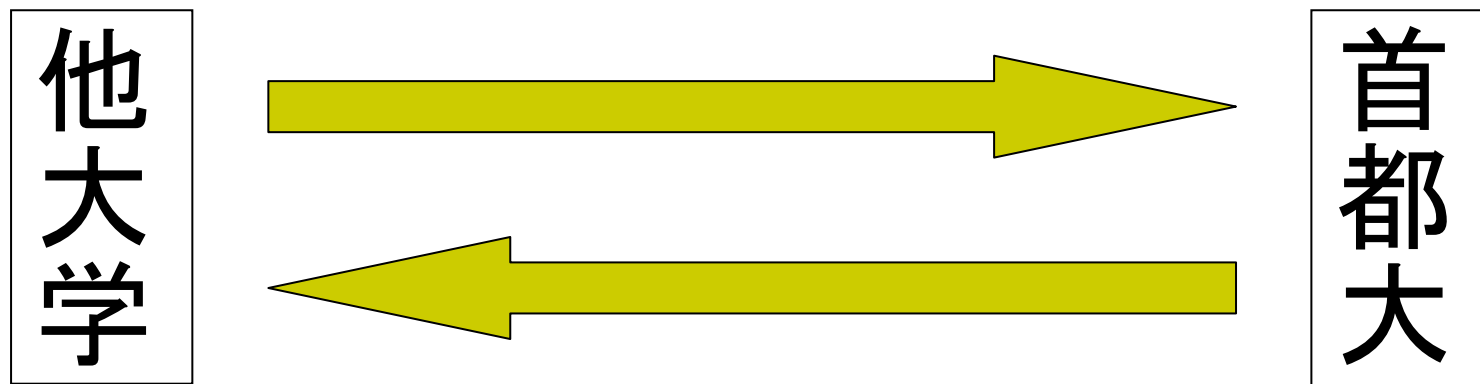
オフィスアワー(OH)

- 数理科学コース全教員がOHを設定
- 毎日誰かのOHがある
- 毎週木曜にはTAによる‘Math Clinic’がある
 - 共通化により質問・応答しやすい
- ただし質問にくる学生はさほど多くない



他大学との連携

同じテキストを利用する教官からのフィードバック



演習問題・テキスト偶数問題解答の提供

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ とする.}$$

(1) 行列式 $|A|$ を計算せよ. (15 点)

(2) $|A^3|$ はいくらか. (5 点)

$$2. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ とする.}$$

(1) A の余因子行列 \tilde{A} を求めよ. (10 点)

(2) A^{-1} を求めよ. (10 点)

(3) $Ax = b$ となるベクトル x を求めよ. (5 点)

$$3. R^4 \text{ の部分空間 } W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ について次の問いに答えよ.}$$

(1) W の次元と一組の基底を求めよ. (10 点)

(2) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \\ c \end{bmatrix}$ が W に属するとき, c を求めよ. (10 点)

$$4. R^3 \text{ のベクトル } a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ について次の問いに答えよ.}$$

(1) a_1, a_2, a_3 にグラム・シュミットの直交化を施してできる R^3 の正規直交基底を求めよ. (15 点)

(2) (1) で求めた正規直交基底に関する a_3 の成分表示を求めよ. (10 点)

(3) 原点を通り a_1 と a_2 で張られる平面 α と点 a_3 との距離を求めよ. (10 点)



カリキュラム(線形代数)

前期: 行列の計算

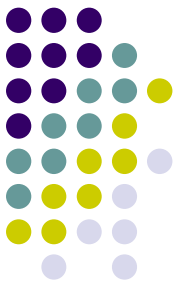
1. 行列とその演算
2. 正方行列
3. 正則行列, 行列のブロック分割
4. 連立1次方程式の解法(掃き出し法)
5. 連立1次方程式の解の構造
6. 行列式とその性質

7. 余因子展開
8. 行列の積の行列式, 行列式の逆行列・連立一次方程式への応用
9. ベクトル空間
10. 部分空間
11. 計量ベクトル空間
12. 空間ベクトル・外積

後期: 固有値・固有空間

1. 線形写像
2. 行列の定める線形写像
3. 線形写像の表現行列
4. 固有多項式・固有値・固有ベクトル・固有空間
5. ケイリー・ハミルトンの定理・最小多項式
6. 対角化可能性

7. 一般固有空間
8. ジョルダンの標準形
9. 行列のべき乗と指数関数
10. 直交行列と直交変換
11. 実対称行列と直交対角化可能性
12. 実2次形式



カリキュラム(微積分)

前期:

1. 数列と関数の極限
2. 連続関数, 初等関数
3. 微分係数, 導関数
4. 平均値の定理, テイラーの定理
5. 微分法の応用
6. 不定積分と定積分
7. 積分の計算
8. 広義積分
9. 積分の応用
10. 級数の収束・発散
11. べき級数
12. 多変数関数の極限
13. 偏導関数
14. 高次偏導関数

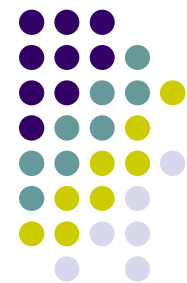
後期:

1. 多変数関数の極値
2. 陰関数
3. 条件付き極値問題
4. 重積分, 累次積分
5. 重積分の変数変換
6. 広義重積分, 重積分の応用
7. ベクトルの内積と外積
8. ベクトル値関数の微積分
9. スカラー場の勾配, ベクトル場の発散と回転
10. 線積分
11. グリーンの公式
12. 面積分
13. ガウスの発散定理
14. ストークスの定理



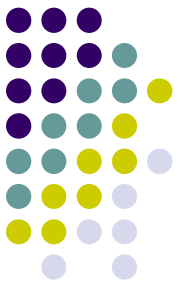
平成15年度(都立大)

- 工学部のコースと相談(寺尾)
 - 線形代数・微分積分のカリキュラムについて
- いくつかの事項を標準カリキュラムに追加
 - ジョルダン標準形・ベクトル解析の初歩
- 証明による一般論の構築を, 実例に対し行うなど工夫し, 必要時間を短縮する
- 計算力をつけさせるため, 問題演習を行う



平成16年度(都立大)

- パイロットプログラムとして実施
 - 線形代数(寺尾・小林), 微積分(高桑)
- 1コマ90分=講義60分+演習30分
- TA(演習中の質問対応, 出席チェック)
- カリキュラム(線形代数):
 - 寺尾: 演習書をテキストに指定
 - 小林: 他学科の方の著書をテキストに指定



平成17・18年度(首都大)

- 全学の理工系に拡大(数理科学・物理以外)
- 共通のカリキュラム・テキスト(演習書)・進度
- 証明は必ずしもつけない
- オフィスアワーの設置, Math Clinic
- 演習問題の作成とHPへの掲示
- 平均点等の情報を担当教員で共有
- クラス規模(最大180人超)



平成19・20年度(首都大)

- 教科書を使用開始(微積分は18年度末～)
- 教科書に準拠した演習問題の作成
- 新コース増加(インダストリアルアート)
- クラス規模(120人程度)
- 担当者の増加(非常勤講師)
- メーリングリスト(線形代数)の作成
- 予備知識が不足する学生への対応
 - オフィスアワーに指導
 - 文系向け科目との棲み分けの明確化



総括

- 成果
 - 大抵の学生が、一定の計算力をつけて単位修得
 - 「数学はよくやっている」 他コースからの評価
- 反省
 - 理論的側面の理解や、教員のコメントによる涵養は、時間の面で不足しがち
 - 予算の不足・制度上の制約により、TA確保が困難
- 次の目標
 - 予備知識が少ない学生にも、教師のスキルが多少低くても、あるレベルの学習を確保するシステムの構築
 - 学習効果の検証

終わり



ご清聴を感謝いたします。