# k-ピタゴラス数の幾何学

松田　修 (津山工業高等専門学校)



## k-ピタゴラス数とは

- ピタゴラス数とは $x^2+y^2=z^2$ をみたす自然数の組 のこと
- k-ピタゴラス数とは $x^2+k\cdot y^2=z^2$ をみたす自然数の組 のこと



## 歴史

- 古代ギリシアのピタゴラス数の研究
- フェルマー，オイラー，ラグランジュ等の研究。
  ピタゴラス数と4n+1型の素数の研究。
  k-ピタゴラス数と8n+1型，8n+3型素数の研究。
  平方剰余の相互法則の発見。



## 本研究のねらい

数学教育において、ピタゴラス数は重要である。

数論的な研究ではなく、
幾何学的な性質はないのだろうか？

その幾何学をk-ピタゴラ数へ一般化できるか？

工学系という高専における
新しい数学教材の可能性をみいだす。



## 定理

$p, q$ を互いに素な整数とする。

このとき，（既約）k -ピタゴラス数 $(x, y, z)$ は

$$x=p^2-k\cdot q^2,\quad y=2pq,\quad z=p^2+k\cdot q^2$$

である。



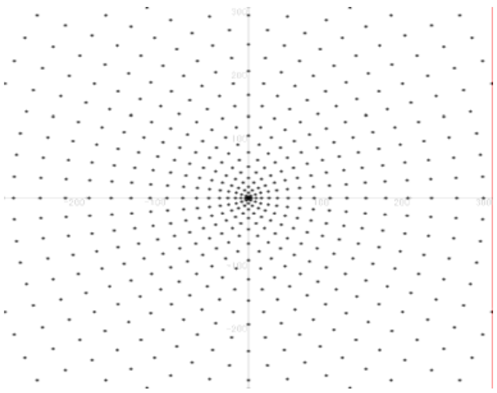
## ピタゴラス点の様子

（既約）ピタゴラス数を，$xy$ 平面に射影する。

これらの点を（既約）**ピタゴラス点**と呼ぶ。

ピタゴラス点の様子を，津山高専の多くの1年生にみせた。

**放物線が何本もみえる！！**



ピタゴラス点の様子

7

## 問題

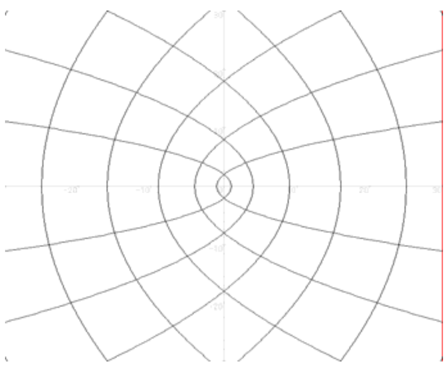
それは本当に放物線か．もしそうならばその式を導出せよ。

（ポイント）：パラメータを消去して放物線の式を導出できるか。

答　$y^2 = 4q^2(x + kq^2)$

8

## ピタゴラス放物線の様子



どういうことがいえそうか？

9

## 学生の予想から作った定理

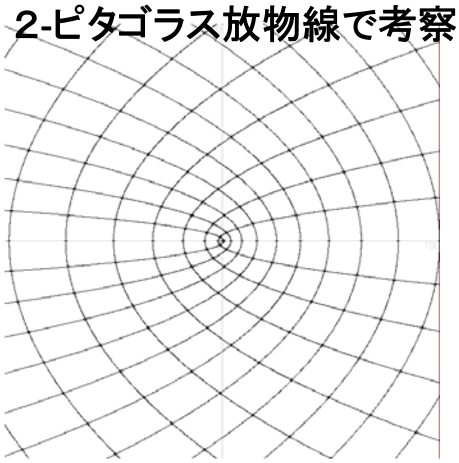
ピタゴラス放物線について以下が成り立つ。

(1) すべてのピタゴラス放物線の**焦点は原点**である。

(2) ２つのピタゴラス放物線 と が交わるとき，その交点はピタゴラス点であり，それらは**直角に交わる。**

10

## 2-ピタゴラス放物線で考察



11

## k-ピタゴラス放物線で考察

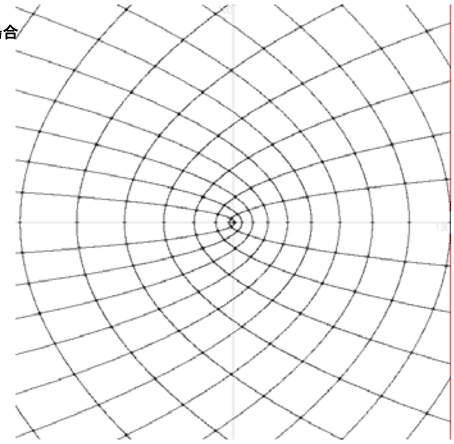
(1) k-ピタゴラス放物線の焦点は$\left(-(k-1)q^2, 0\right)$である。

(2) ２つのピタゴラス放物線 と が交わるとき，その交点はk-ピタゴラス点である。

**それらはどのように交わるか？**
[内積（交わる角度）は？]

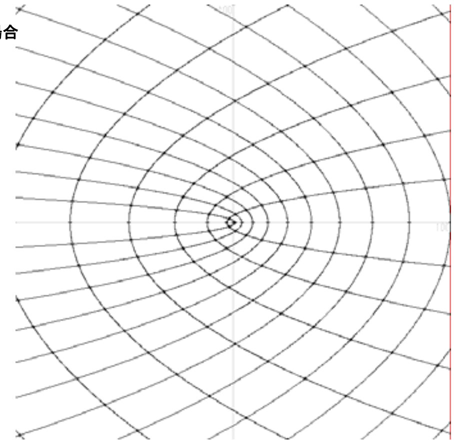
12

K＝2の場合



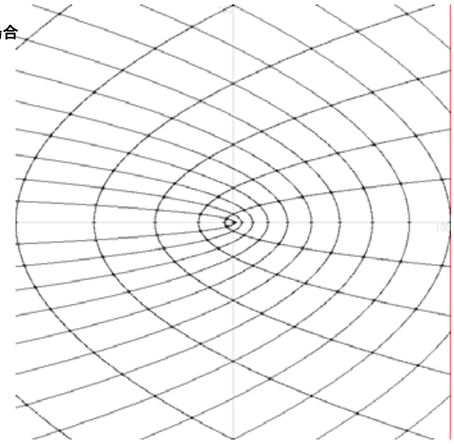


K＝3の場合



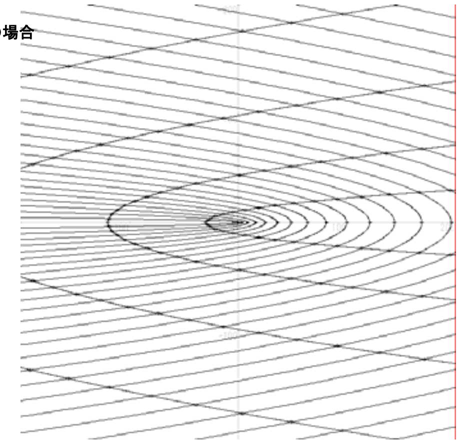


K＝4の場合





K＝30の場合





## その他に見えること

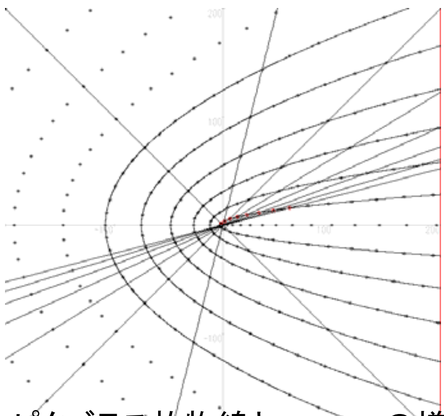
k-ピタゴラス放物線を, $H_q : y^2 = 4q^2(x+kq^2)$ とし，k-ピタゴラス放物線上のパラメータ $(p,q)$ に対応する点を，$\mathrm{P}(p,q)$ とする。

さらに，$\mathrm{P}(p,q)$ と原点を結ぶ直線を $L_q(p)$ とする。このとき，

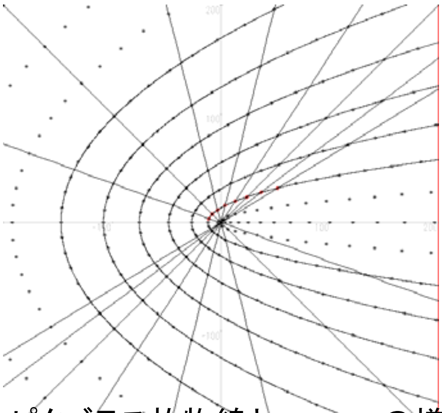
(1) $L_q(p)$ と $H_{jq}$ の交点はk-ピタゴラス点である。

(2) $p \equiv 0 \bmod q$ ならば $L_q(p)$ と $H_{q'}$ $(q \neq q')$ の交点はk-ピタゴラス点である。



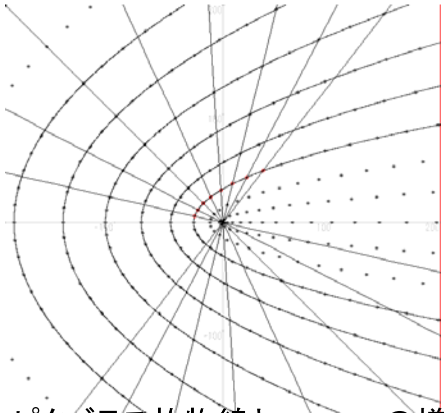


3ーピタゴラス放物線と $L_1(p)$ の様子



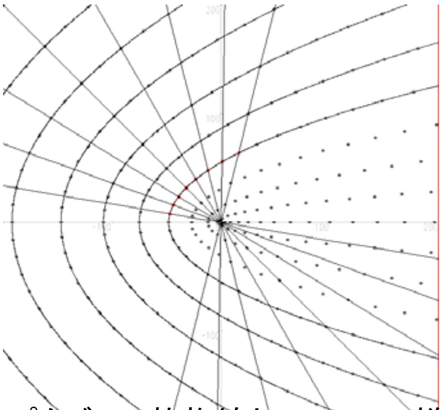
3ーピタゴラス放物線と $L_2(p)$ の様子

19



3ーピタゴラス放物線と $L_3(p)$ の様子

20



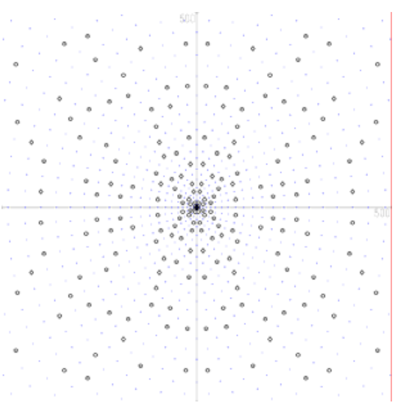
3ーピタゴラス放物線と $L_4(p)$ の様子

21

K-ピタゴラス数(x,y,z)の
Zが素数のときの
(x,y)分布図の考察

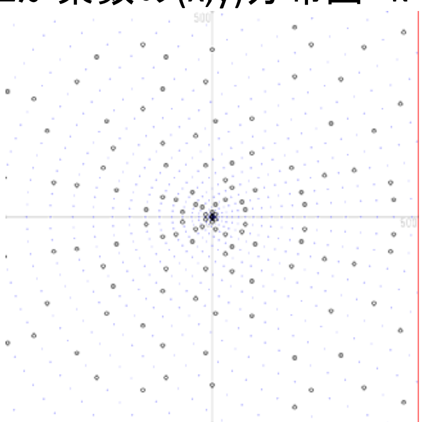
22

Zが素数の(x,y)分布図　k=1



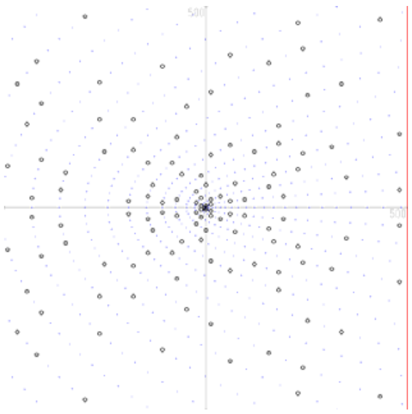
23

Zが素数の(x,y)分布図　k=2



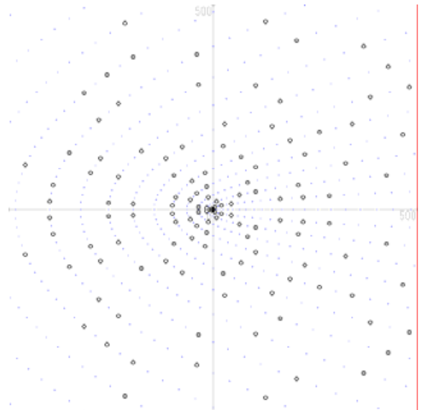
24

## Zが素数の(x,y)分布図　k=3



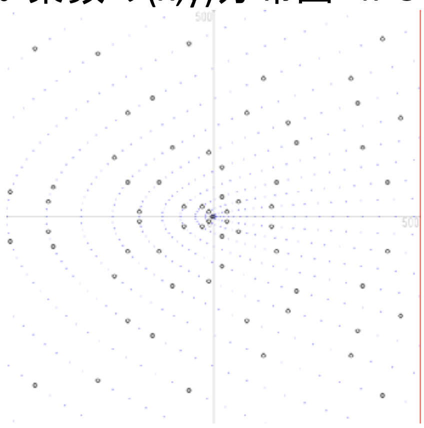


## Zが素数の(x,y)分布図　k=4





## Zが素数の(x,y)分布図　k=5





## Zが素数の(x,y)分布図　k=6