数学教育の会　2008.9.14

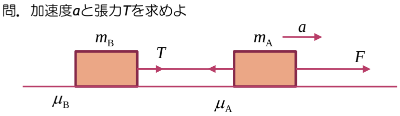
物理答案に頻出する計算間違い

ミスのパターンと原因の考察

津山高専　一般科目・物理　佐藤誠

２年生前期中間試験での例

問．加速度aと張力Tを求めよ



なんらかの解を記述している学生　２０名／４５名
（部分点を獲得）

正答している学生　５名

理屈が解っていない訳ではない．計算ミスが理解を妨げている．

計算ミス→誤答→物理が解らない

２年生前期中間試験での例

方程式を解く意味が解っていない例

例１．

$$\begin{cases} m_A a = F - T \\ m_B a = T \end{cases} \qquad a = \frac{F-T}{m_A} \qquad a = \frac{T}{m_B}$$

$$a = \frac{F-T}{m_A} = \frac{T}{m_B} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_A T - m_B(F-T)}{m_A m_B}$$

例２．

$$m_A a = F - m_B a$$

$$a(m_A + m_B) - F = 0 \quad \Rightarrow \quad T = a(m_A + m_B) - F$$

２年生前期中間試験での例

例３．

$$a = \frac{F - (\mu_A N_A + \mu_B N_B)}{m_A + m_B}$$

$$T = \frac{m_B a}{\mu_B N_B}$$

$$= \frac{\cancel{m_B}\dfrac{F-(\mu_A N_A + \mu_B N_B)}{m_A + \cancel{m_B}}}{\mu_B N_B}$$

← 乗算の分配則ミス

$$= \frac{\dfrac{F-(\mu_A N_A + \mu_B N_B)}{m_A}}{\mu_B N_B}$$

← 別の分数としてみなす

$$= \frac{F\mu_B N_B - (\mu_A N_A + \mu_B N_B)}{m_A}$$

← 乗算の分配則ミス

２年生前期中間試験での例

例４．

$$2F = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{m_A + m_B}{2F}$$

移項と乗除算の同時処理に伴う計算ミス

例５．

$$T = \frac{Fm_B}{m_A + m_B} = \frac{Fm_B}{m_A} + F$$

分母で分解

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

確信的勘違いパターン

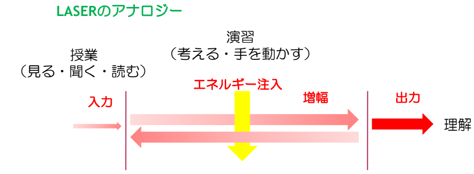
例６．

$$T = m_B \frac{F}{m_A + m_B} = \frac{F}{m_A}$$

← 乗算の分配則ミス

多くの学生にとっての理解の筋道

LASERのアナロジー



正答を得る → 理解の増幅率＞１ → 発振（楽しい）

誤答を得る → 理解の増幅率＜１ → 吸収（辛いだけ）

・物理概念の誤解であれば修正が効く（正統な学習筋道）

・正しい理解＋計算ミス　→　混乱　→　理解の放棄

３年生の例（学年末試験）

剛体の回転運動の問題

例1．
$$I_0=\frac{1}{12}ML^2+Mx^2=\frac{13}{12}ML^2x^2$$

例2．
$$I_0=\frac{1}{12}ML^2+Mx^2=\frac{1}{12}ML^2x^2$$

例3．
$$I_0=\frac{1}{12}ML^2+Mx^2=\frac{1}{12}M\left(L^2+x^2\right)$$

例4．
$$I_0=\frac{1}{12}ML^2+Mx^2=\frac{M\left(L^2+x^2\right)}{12}$$

同じ誤計算でもこれだけのバラエティが存在

３年生の例（学年末試験）

剛体の回転運動の問題

例1．
$$\left(\frac{1}{12}ML^2+Mx^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}=-Mg\theta x$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{gx}{12x^2+L^2}\theta$$ ← 除算ミス
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{12x+L^2}\theta$$ ← 除算ミス

例2．
$$\frac{1}{12}M\left(L^2+12x^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}=-Mgx\theta$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{gx}{12(L^2+12x^2)}\theta$$ ← 除算ミス

３年生の例（学年末試験）

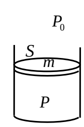
剛体の回転運動の問題

例3．
$$\left(\frac{L^2}{12}+x^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}=-xg\theta$$
$$\frac{L^2}{12}\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{x}\theta$$ ← 移項と除算の取り違え
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{12g}{L^2x}\theta$$

３年生の例（学年末試験）

圧力の問題

例：シリンダー内部の圧力を求めよ



$$SP-mg-SP_0=0$$
$$P=mg+P_0$$

移項と除算同時処理，除算分配則ミス

複数計算同時処理によるミス

例1．
$$I=60\times0.3-40\times0.3=0.6$$

減算と乗算同時処理

例2．
$$\lambda=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=-1\pm2i$$

平方根と徐算同時処理

分数に関係するミス

例1．
$$\frac{2a+b}{2}=a+b$$

例2．
$$\frac{-xMg}{ML^2+Mx^2}=-\frac{g}{L^2+x}$$

例3．
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

方程式の複数同時処理によるミス

例1.

$$m_B a = T - \mu m_B g$$

$$T = \frac{\mu g}{a}$$

加算が除算に

例2.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$h = 2gv^2$$

移項により乗除算にミス

例3.

$$ev = v_A - v_B$$

$$v_B = \frac{v_A}{ev}$$

加算が除算に

例4.

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2g}{y}}$$

移項により乗除算にミス

13

方程式の複数同時処理によるミス

例1.

$$2m_A v_A + v_B\cancel{(m_B - m_A)} = v'_B\cancel{(m_B - m_A)}$$

$$v'_B = 2m_A v_A + v_B$$

例2.

$$-\frac{v'_A - v'}{-v} = 1$$

$$v'_A + v' = v$$

符号ミス

例3.

$$v = -v_B + v_A$$

$$v_A = v - v_B$$

符号ミス

例4.

$$\frac{5}{2}F = Mg\sin\theta - F$$

$$(\frac{5}{2} - \frac{2}{2})F = Mg\sin\theta$$

移項ミス

$$F = \frac{3Mg\sin\theta}{2}$$

乗算ミス

複数処理によるミスの典型例

14

方程式の割り算のミス

例1.

$$(1 - \frac{m}{M})v_A = \frac{mv(1-e)}{M}$$

$$v_A = \frac{mv(1-e)}{M}(1 - \frac{M}{m})$$

ここだけ逆数

$$= \frac{v(1-e)(m-M)}{M}$$

この学生は、$\frac{1}{1-\frac{m}{M}} = 1 - \frac{M}{m}$ と確信している。

15

方程式の割り算のミス

例2.

$$(\frac{1}{12}ML^2 + Mx^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -xMg\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -xMg\theta(\frac{12}{ML^2} + \frac{1}{Mx^2})$$

例3.

$$(\frac{1}{12}ML^2 + Mx^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -xMg\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-xMg}{12ML^2 + Mx^2}\theta$$

例4.

$$M(\frac{1}{12}L^2 + x)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -xMg\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -x(\frac{12}{L^2} + \frac{1}{x})g\theta$$

16

比計算の形式に引きずられるミス

例1.

$$2m_B v = \frac{2}{\sqrt{3}}m_A v$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2}$$

例2.

$$2m_A = 2\sqrt{3}m_B$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

$a \cdot b = c \cdot d$ を、

$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ もしくは $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$

とする学生が多い

$$a : b = c : d$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

形式的に記憶している？

17

比計算の形式に引きずられるミス

例3.

$$m_A : m_B = \sqrt{3} : 1$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \longleftarrow$$ 比が逆

形式的で曖昧な記憶であることが推測される

18

形式に引きずられるミス

例1.

$$\frac{2}{5}MR^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}RF$$

$$MR^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=5\sqrt{3}RF$$

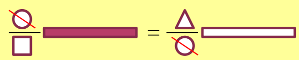
例2.

$$12-2^3\div\frac{1}{2}=8$$

例3.

$$\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\cancel{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

つい,



と機械的に処理してしまう

19

暗記した形に引きずられるミス

例1.

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}\qquad f=\frac{\omega}{2\pi}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

共振周波数を「にパイルートエルシーぶんのイチ」の語呂で記憶

例2.

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=Mg\sin\theta$$

かなりアクロバティックな計算

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{Mg\sin\theta}{I}}$$

振り子の角速度と振動の各振動数を混同

$$\omega=\sqrt{\frac{Mg\sin\theta}{I}}$$

20

文字ミス

（馬鹿げたミスだが，意外に多い）

例1.

$$mv=mv_A+Mv_B$$

$$v=v_A+v_B$$

Mとmの区別がつかない

例2.

$$e=\frac{\frac{m(v-v_B)}{M}-v_B}{v}$$

$$=-\frac{mv-mv_B-mv_B}{mv}$$

Mがmに変身

$$=-\frac{mv-2mv_B}{mv}$$

$$emv=mv-2mv_B$$

移項，乗算ミス

$$v_B=-ev$$

21

文字ミス

例3.

$$m(v-V)+MV=0$$

$$mv+(M-m)V=0$$

$$V=-\frac{m}{M-m}V$$

vがVに変身

例4.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{1}{R}\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{5}{7}g\sin\varphi$$

$$\longrightarrow\quad\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{5}{7}\frac{5}{12}\sin\varphi$$

Rが１２に gが５に変身

22

文字ミス

例5.

$$F\left(\frac{MR^2}{\frac{2}{5}MR^2}+1\right)=Mg\sin\varphi$$

$$\frac{7}{2}F=Mg\sin\varphi$$

$$F=\frac{1}{2}Mg\sin\varphi$$

除算ミス
７が１に変身

23

方程式を解く意味が理解できていない

例1.

$$m_Aa=F-T-\mu m_Ag$$

$$m_Ba=T-\mu m_Bg$$

ａとＴを求めよ

$$a=\frac{T}{m_B}-\mu g$$

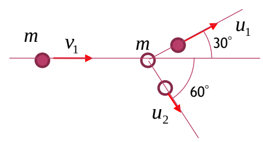
$$T=m_Ba+\mu m_Bg$$

解答に解が含まれる自己言及的解答

24

sinとcosの取り違え

例１．



運動量保存則から

$$v_1 = u_1 \cos 30° + u_2 \cos 60°$$

$$v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_2$$

sinとcosの取り違え

意外なほど多く散見される

？ $$v_1^{\,2} = \frac{1}{4}u_1^{\,2} + \frac{3}{4}u_2^{\,2}$$

エネルギー保存則と連立させたい

$$v_1^{\,2} = u_1^{\,2} + u_2^{\,2}$$

25

sinとcosの取り違え

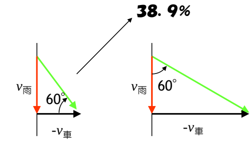
sinとcosの取り違えと推測される例

2007年度物理学習到達度試験から

（２）鉛直に5.0m/sで振っている雨を，水平方向に走る自動車の窓から見たら，鉛直から６０° 傾いて振っているように見えた．この自動車の速さは何m/sか．次の①から⑥のうちから一つ選び，その番号を解答欄にマークせよ．

①1.7m/s　②1.8m/s　③2.5m/s　④5.0m/s　⑤8.7m/s　⑥10m/s

38. 9%　（正解）**42. 8%**　**10. 0%**



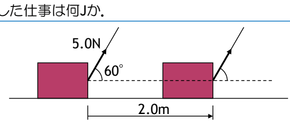
国語力の問題？
sinとcosの取り違え？
図を描かないため？

26

sinとcosの取り違え

明らかなsinとcosの取り違え例　**2007年度物理学習到達度試験から**

(2)次の図のように水平で滑らかな床の上においた物体に水平から60° 上向きに5.0Nの大きさの力を加えて床の上を水平に2.0m移動させた．このとき力が物体にした仕事は何Jか．



①2.5J　②4.3J　③5.0J（正解）　④ 8.7J　⑤ 10.0J　⑥17.3J

62. 2%　**15. 6%**

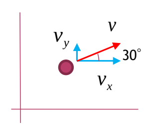
$W = Fx\cos 60°$ を $\left\{ \begin{array}{l} W = Fx\sin 60° \\ \cos 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\}$ とした

１６%近くの学生はsinとcosの使い分けが不完全

27

物理概念の誤解（素朴な感覚を維持）

例１．



速度と力を混同
（力が働かないと速度は発生しない）

問：速度成分を求めよ

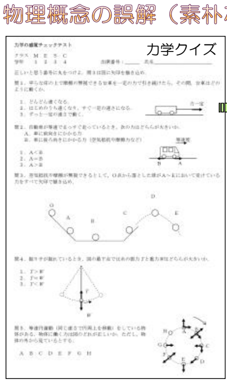
$$\cos 30° = \frac{v_{0x}}{F} \qquad \sin 30° = \frac{v_{0y}}{F}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F = v_{0x} \qquad v_{0y} = \frac{1}{2}F$$

ベクトルについての誤解がベースにある

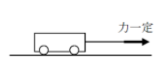
28

物理概念の誤解（素朴な感覚を維持）



出典：　飯田洋治，「こう教えればもっとわかる "運動の法則"」パリティVol.19,No.7,2004,pp.56-60

問１．一定の力で引き続けるとどうなるか？



１．どんどん速くなる．
２．はじめのうち速くなり，すぐ一定の速さになる．
３．ずっと一定の速さで動く．

正答率：２年生　３年生　４年生
２３%　３４%　３３%

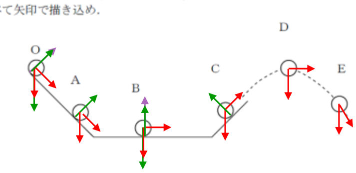
ガリレオ以前，人は皆，2か3と考えていた．
状況は現在でも大して変わらない．
3割は高い方？　それとも分らないための1／3？

29

物理概念の誤解（素直な感覚を維持）

経験的素朴概念が根強いことを示す例

問３．空気抵抗や摩擦が無視できるとして，O点から落とした球がA～Eにおいて受けている力をすべて矢印で描き込め．

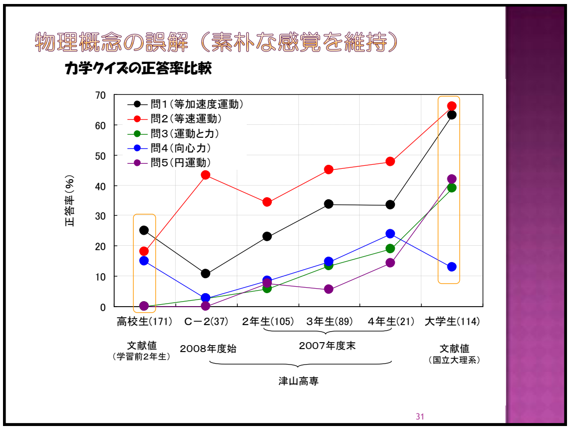


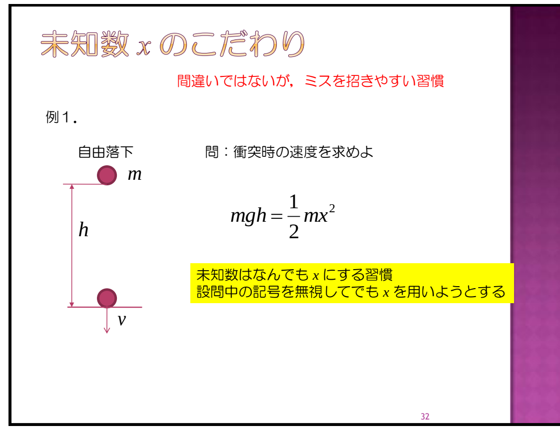
正答率：２年生　３年生　４年生
６%　１３%　１９%

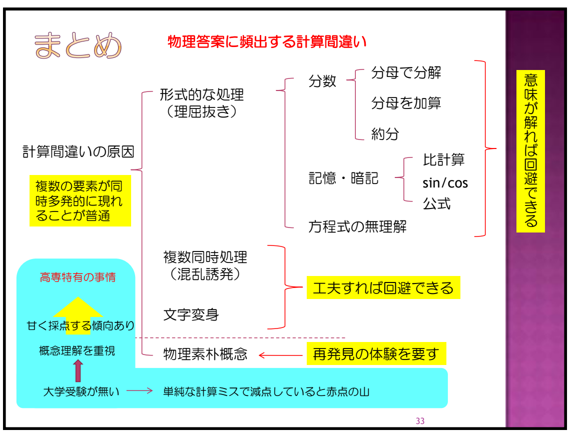
物体に働く力を正しく把握できない→運動方程式が立てられない→力学が解らない

運動方程式を正しく立てられる学生は２割に満たない

30


物理概念の誤解（素朴な感覚を維持）
力学クイズの正答率比較
問1（等加速度運動）
問2（等速運動）
問3（運動と力）
問4（向心力）
問5（円運動）
正答率（%）
0
10
20
30
40
50
60
70
高校生(171)
C－2(37)
2年生(105)
3年生(89)
4年生(21)
大学生(114)
文献値
（学習前2年生）
2008年度始
2007年度末
文献値
（国立大理系）
津山高専
31


未知数 x のこだわり
間違いではないが，ミスを招きやすい習慣
例1．
自由落下
問：衝突時の速度を求めよ
m
h
v
$mgh = \frac{1}{2}mx^2$
未知数はなんでも x にする習慣
設問中の記号を無視してでも x を用いようとする
32


まとめ
物理答案に頻出する計算間違い
計算間違いの原因
複数の要素が同時多発的に現れることが普通
形式的な処理
（理屈抜き）
分数
分母で分解
分母を加算
約分
記憶・暗記
比計算
sin/cos
公式
方程式の無理解
意味が解れば回避できる
複数同時処理
（混乱誘発）
文字変身
工夫すれば回避できる
物理素朴概念
再発見の体験を要す
高専特有の事情
甘く採点する傾向あり
概念理解を重視
大学受験が無い
単純な計算ミスで減点していると赤点の山
33