擬カプレカ数の研究

津山高専数学クラブ

中村　和樹　竹久　和宏　細尾　倫成

カプレカ数とは

KをN桁の自然数とする。

Kがカプレカ数とは, $K^2 = a \cdot 10^N + b$ **と分解したとき** $K = a + b$ **になる数のことである。**

1桁 1,9

2桁 45,55,99 ＊45+55=100

3桁 297, 703, 999 ＊297+703=1000

4桁 2223, 2728, 4950, 5050, 7272, 7777, 9999

＊2223+7777=2728+7272=4950+5050=10000

細尾の発見

自然数を二乗した数を研究していくと，

$34^2 = 1156 \rightarrow (-2) \times 11 + 56 = 34$

$334^2 = 111556 \rightarrow (-2) \times 111 + 556 = 334$

$3334^2 = 11115556 \rightarrow (-2) \times 1111 + 5556 = 3334$

これは細尾が発見した。

さらに，34**系列以外に**

18,168,1668,16668, 16･･･68**という系列の数も同様の性質持っていた。**

私たちはその性質を持つ数をH数と呼ぶことにした。

H数の定義

$\mathbb{K}$をN桁の自然数とする。$\mathbb{K}$がH数とは，

$$K^2 = a \cdot 10^N + b$$

と分解したときに

$$K = -2a + b$$

が成り立つ数のことである。

Inv(ｄ , ｄ’)の定義

gcd(ｄ , ｄ’)＝1とする。
このとき，Inv(ｄ , ｄ’) をｄm≡１ (mod ｄ’)
となる最小の自然数mと定義する。

次の定理の証明はDouglas Iannucci氏の
The Kaprekar Numbers (2000) という論文の
定理を応用したものである。

H数の定理

$dd' = 10^N + 2$, $\gcd(d, d') = 1$,
$m = \mathrm{Inv}(d, d')$, $m' = \mathrm{Inv}(d', d)$　とする。
さらに，条件：$0 \leqq 3dm - 2mm' < 10^N$ とする。

このとき，dm は H数 である。

D.E.Iannucci
『The Kaprekar Numbers』
（2000）

　この英語の論文には，カプレカ数を導出する公式と証明が載っていて，これまでの研究から，この論文が私達のH数や下で定義した一般の擬カプレカ数にも十分対応できるのではないかと思った。そして，少しずつ一般化させ，かつ論文をにらみながら定理を作り，証明を完成させた。

擬カプレカ数
（重みαのN桁-H（t）数）とは

[定義1]

kをN桁の自然数，tを整数，αとNは自然数とする。

kが重みαのN桁-H (t) 数とは,

$$k^2 = a\cdot 10^N + b,\ \alpha k = ta + b$$

が成り立つときをいう。

ただし, $0 \leqq b < 10^N$, $|t| < 10^N$である。

特にα＝1, t＝1 のときがカプレカ数である。

α＝1, t＝−2 のときがH数である。

[定義2]

gcd(d , d’)＝1とする。

このとき，$\mathrm{Inv}_{\alpha}(d, d')$ を$dm \equiv \alpha \pmod{d'}$となる最小の自然数mと定義する。

　私達が今回の研究で発見し証明した主定理は次である。

重みαのN桁-H(ｔ)数の定理

$dd' = 10^N - t$, $\gcd(d, d') = 1$,
$m = \mathrm{Inv}_\alpha(d, d')$, $m' = \mathrm{Inv}_\alpha(d', d)$ とする。

このとき，dm は重みαのN桁-H(t)数である。

ただし，$0 \leqq (\alpha - t)dm + tmm' < 10^N$とする。

例

定理を用いて $\alpha=2$，$t=4$，5桁のときの擬カプレカ数を求める。

① $10^N - t$ を考える。 i.e. $10^5-4=99996$

② 99996の互いに素な約数のペア（d，d'）を見つける。

互いに素になる約数の組み合わせは

（3，33332），（4，24999），（12，8333）
（13，7692），（39，2564），（52，1923）
（156，641）

の7つである。

③　dm≡2 mod d' となる最小なmを計算する。
例えば，(156，641)を(d，d')と置いて考えると，
156m≡2 (mod 641)より
m＝452，同様にm'＝46が得られる。すると，

条件　$0 \leqq (-2)dm + 4mm' < 10^N$を満たさないので
$dm = 156 \times 452 = 70512$　×

条件　$0 \leqq (-2)d'm' + 4m'm < 10^N$より
$d'm' = 641 \times 46 = 29486$
(重み2の5桁-H(4)数

$29486^2 = 869424196 \rightarrow 4 \times 8694 + 24196 = 5897$
$= 2 \times 2948$

同様に他の約数の組み合わせを計算していくと，
重み2の5桁-H(4)数を導くことができる。

m乗カプレカ操作

N桁の自然数kのm乗カプレカ操作KP[k^m]とは、k^mを下からN桁ずつ区切ってそれらの和をとること。

- 例

KP[111^4]=KP[151807041]

=151+807+041

=999

（＊次の発表に続く。）