レピュニット数のカプレカー操作

津山高専数学クラブ
中村和樹　新免泰陽　竹久和宏

レピュニット数 $\mathrm{R_k}$ とは，$\mathrm{R_k} = \underbrace{11\cdots1}_{k}$ のことである。

$\mathrm{R_k}$ のn乗を，n乗カプレカー操作して得られる数を次のように表す。

$$Kp[\mathrm{R}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}]$$

例

$$Kp[\mathrm{R}_2^2] = Kp[11^2] = Kp[121] = 1 + 21 = 22 = 2\mathrm{R}_2,$$

$$Kp[\mathrm{R}_3^2] = Kp[111^2] = Kp[12321] = 12 + 321 = 333 = 3\mathrm{R}_3,$$

$$Kp[\mathrm{R}_4^2] = 4444 = 4\mathrm{R}_4, \quad Kp[\mathrm{R}_5^2] = 55555 = 5\mathrm{R}_5,$$

$$Kp[\mathrm{R}_6^2] = 6\mathrm{R}_6, \quad Kp[\mathrm{R}_7^2] = 7\mathrm{R}_7,$$

$$Kp[\mathrm{R}_8^2] = 8\mathrm{R}_8, \quad Kp[\mathrm{R}_9^2] = 9\mathrm{R}_9,$$

$$Kp[\mathrm{R}_{10}^2] = 1\mathrm{R}_{10}, \quad Kp[\mathrm{R}_{11}^2] = 2\mathrm{R}_{11},$$

$$Kp[\mathrm{R}_{12}^2] = 3\mathrm{R}_{12}, \quad Kp[\mathrm{R}_{13}^2] = 4\mathrm{R}_{14}, \cdots\cdots$$

＊$Kp[\mathrm{R}_{\mathrm{k}}^2]$ は, ある種の周期性をもっている。

研究から得られた2つの予想

予想1） レピュニット数のn乗を，n乗カプレカー操作

$Kp[\mathrm{R}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}]$

した数 $Kp[\mathrm{R}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}] = \alpha_{k,n}\mathrm{R}_{\mathrm{k}}$ について，

$\alpha_{k,n}$

とおいた時， は自然数である。

$\alpha_{k,n}$

予想2） nを固定する。その時，9^{n-1} 数列 は周期的で、周期の長さは である。

研究データ

- [2乗レピュニット数の $\alpha_{k,n}$ の値]

$\alpha_{k,n}$ の周期9

- [3乗レピュニット数の $\alpha_{k,n}$ の値]

$\alpha_{k,n}$ の 周期$9^2=81$

- [4乗レピュニット数の $\alpha_{k,n}$ の値]

$\alpha_{k,n}$ の周期$9^3=729$

- [5乗レピュニット数の $\alpha_{k,n}$ の値]

$\alpha_{k,n}$ の周期$9^4=6561$

予想を証明するための考察

　レピュニット数R_k　のn乗をk-パスカル三角形で考えてみる。

　たとえば，$\mathrm{R}_3^4 = 111^4$ は3-パスカル三角形の４段目に対応している。

　よって，$Kp[\mathrm{R}_3^4]$は，これらの数に何らかの関係を持つのではないかと考えた。

　このことは，一般的にいえるはず。

k-パスカル三角形のエリア

　k-パスカル三角形を左からk個ずつ区切り，
それらの区画をエリア1，エリア2，・・・と名付ける。

$$\mathrm{A}_i^{[k,n]}(j)$$

を，n段目のエリアi　の中の左からj　番目$(1 \le j \le k)$
の数とする。

3－パスカル三角形

$$\mathrm{A}_3^{[3,4]}(2) = 4$$

0段	1								
1段	1	1	1						
2段	1	2	3	2	1				
3段	1	3	6	7	6	3	1		
4段	1	4	10	16	19	16	10	4	1
	エリア1			エリア2			エリア3		

3ーパスカル三角形 $(x^2+x+1)^n$ の係数

111^0に対応	1								
111^1に対応	1	1	1						
111^2に対応	1	2	3	2	1				
111^3に対応	1	3	6	7	6	3	1		
111^4に対応	1	4	10	16	19	16	10	4	1

エリア1　エリア2　エリア3

各段目の任意の j について，

$$\sum_{i=1}^{3} \mathrm{A}_i^{[3,2]}(j)=3,\quad \sum_{i=1}^{3} \mathrm{A}_i^{[3,3]}(j)=9,\quad \sum_{i=1}^{3} \mathrm{A}_i^{[3,4]}(j)=27,\cdots$$

となっている。

命題

k-パスカル三角形のn段目では，

任意の j について，

$$\sum_{i=1}^{u} \mathrm{A}_i^{[k,n]}(j) = k^{n-1}$$

ここで，エリアの数 $u = [n-(n-1)/k]$

(証明)

k-パスカル三角形のn段目の左からm番目の数を，(n,m) とすると，

$$(n,m) = (n,m-1) + (n-1,m) - (n-1,m-k)$$

という関係式を持つ。これを使って示される。

K桁についてのカプレカー操作

　自然数ａを，K桁についてカプレカー操作するとは，ａを下からK桁ずつ区切って，それらの和をとることである。

　特に，1桁についてカプレカー操作することを，単純カプレカー操作という。

　ところで，N桁の自然数のm乗カプレカー操作は，N桁についてのカプレカー操作である。

$\beta_{k,n}$ の定義

kーパスカル三角形のn段目を考える。

このとき，

$$R_k \cdot k^{n-1}$$

は $R_k{}^n$ にk-パスカル三角形から $Kp[R_k{}^n]$ に，関係があると考えられる。

$Kp[R_k{}^n] = \alpha_{k,n} R_k$ だったので， $\alpha_{k,n}$ には k^{n-1} が対応すると考える。そこで，k^{n-1} をk桁についてカプレカー操作したもの，すなわち，

$$\beta_{k,n} = Kp[k^{n-1}]$$

と定義する。

一般に $\beta_{k,n} = \alpha_{k,n}$ とはならない。

しかし，$\beta_{k,n}$ と $\alpha_{k,n}$ との関係に興味を持つ。

例

$Kp[\mathrm{R}_5^2]$ の場合

$k^{n-1}=5^1=5$　より　$\beta_{5,2}=Kp[5]=5$　である。

一方，$Kp[\mathrm{R}_5^2]=Kp[123454321]=55555=5\mathrm{R}_5$　より，

$\alpha_{5,2}=5$　である。この場合は，$\beta_{k,n}=\alpha_{k,n}$　である。

$Kp[\mathrm{R}_5^3]$ の場合

$k^{n-1}=5^2=25$　より　$\beta_{5,3}=Kp[25]=25$　である。

一方，$Kp[\mathrm{R}_5^3]=Kp[1371700960631]=377774=34\mathrm{R}_5$　より，

$\alpha_{5,3}=34$　である。　しかし，2+5=3+4=7である。

（＊調べた全ての例で $\beta_{k,n},\alpha_{k,n}$ は，それぞれ単純カプレカー操作で一致した。）

Re(1)^ 3 **の場合**
Kp[R^n]= 1
α= 1
Kp[K^(n-1)]= 1 , **β**= 1
α'= 1 **β**'= 1

Re(2)^ 3 **の場合**
Kp[R^n]= 44
α= 4
Kp[K^(n-1)]= 4 , **β**= 4
α'= 4 **β**'= 4

Re(3)^ 3 **の場合**
Kp[R^n]= 999
α= 9
Kp[K^(n-1)]= 9 , **β**= 9
α'= 9 **β**'= 9

Re(4)^ 3 **の場合**
Kp[R^n]= 7777
α= 7
Kp[K^(n-1)]= 16 , **β**= 16
α'= 7 **β**'= 7

Re(5)^ 3 **の場合**
Kp[R^n]= 77777
α= 7
Kp[K^(n-1)]= 25 , **β**= 25
α'= 7 **β**'= 7

Re(6)^ 3 **の場合**
Kp[R^n]= 999999
α= 9
Kp[K^(n-1)]= 36 , **β**= 36
α'= 9 **β**'= 9

Re(7)^ 3 **の場合**
Kp[R^n]= 4444444
α= 4
Kp[K^(n-1)]= 49 , **β**= 49
α'= 4 **β**'= 4

Re(8)^ 3 **の場合**
Kp[R^n]= 111111110
α= 10
Kp[K^(n-1)]= 64 , **β**= 64
α'= 1 **β**'= 1

Re(9)^ 3 **の場合**
Kp[R^n]= 999999999
α= 9
Kp[K^(n-1)]= 81 , **β**= 81
α'= 9 **β**'= 9

【予想】 nを固定する。その時，$\alpha_{k,n}$ の単純カプレカー操作を1桁になるまで繰り返し得られた数列 $\alpha'_{k,n}$ は周期である。

Re(5)^ 1 **の場合**
Kp[R^n]= 11111
α= 1
β= 1
α'= 1 **β**'= 1

Re(5)^ 2 **の場合**
Kp[R^n]= 55555
α= 5
β= 5
α'= 5 **β**'= 5

Re(5)^ 3 **の場合**
Kp[R^n]= 77777
α= 7
β= 25
α'= 7 **β**'= 7

Re(5)^ 4 **の場合**
Kp[R^n]= 188887
α= 17
β= 125
α'= 8 **β**'= 8

Re(5)^ 5 **の場合**
Kp[R^n]= 244442
α= 22
β= 625
α'= 4 **β**'= 4

Re(5)^ 6 **の場合**
Kp[R^n]= 222220
α= 20
β= 3125
α'= 2 **β**'= 2

Re(5)^ 7 **の場合**
Kp[R^n]= 211109
α= 19
β= 15625
α'= 1 **β**'= 1

Re(5)^ 8 **の場合**
Kp[R^n]= 255553
α= 23
β= 78125
α'= 5 **β**'= 5

Re(5)^ 9 **の場合**
Kp[R^n]= 377774
α= 34
β= 90628
α'= 7 **β**'= 7

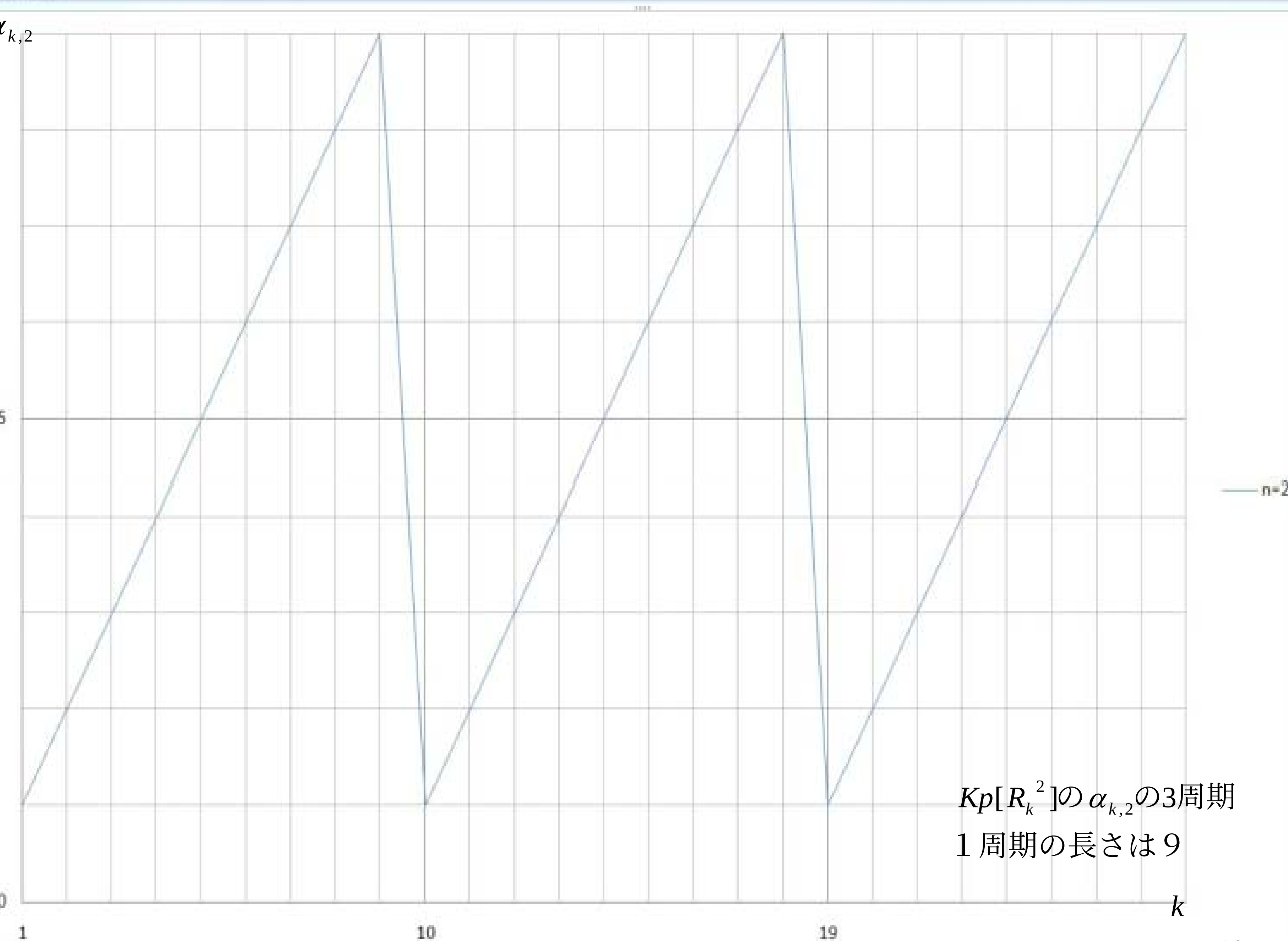
【予想】 kを固定する。その時，$\alpha_{k,n}$ の単純カプレカー操作を1桁になるまで繰り返し得られ た数列 $\alpha'_{k,n}$ は周期である。

予想を証明するための今後の取り組み

1） $\alpha_{k,n}$ と$\beta_{k,n}$の関係性をより詳細に調べる。

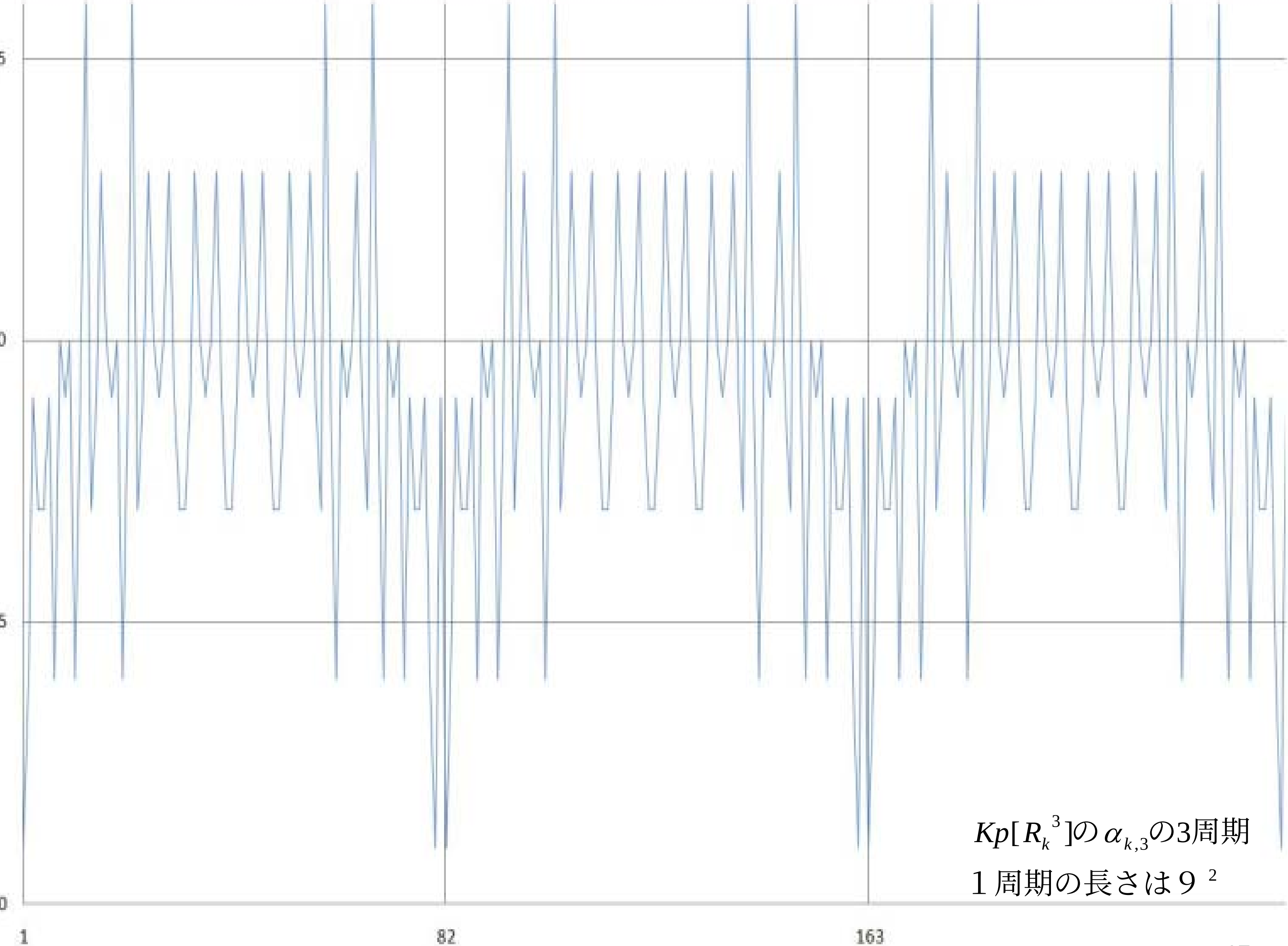
2）上のことから$\alpha_{k,n}$が自然数であることは，証明できるはず。

3）$\alpha_{k,n}$ に関する周期性の予想は,$\alpha'_{k,n}$ に関する周期性の予想が解決することから、得られる可能性がある。



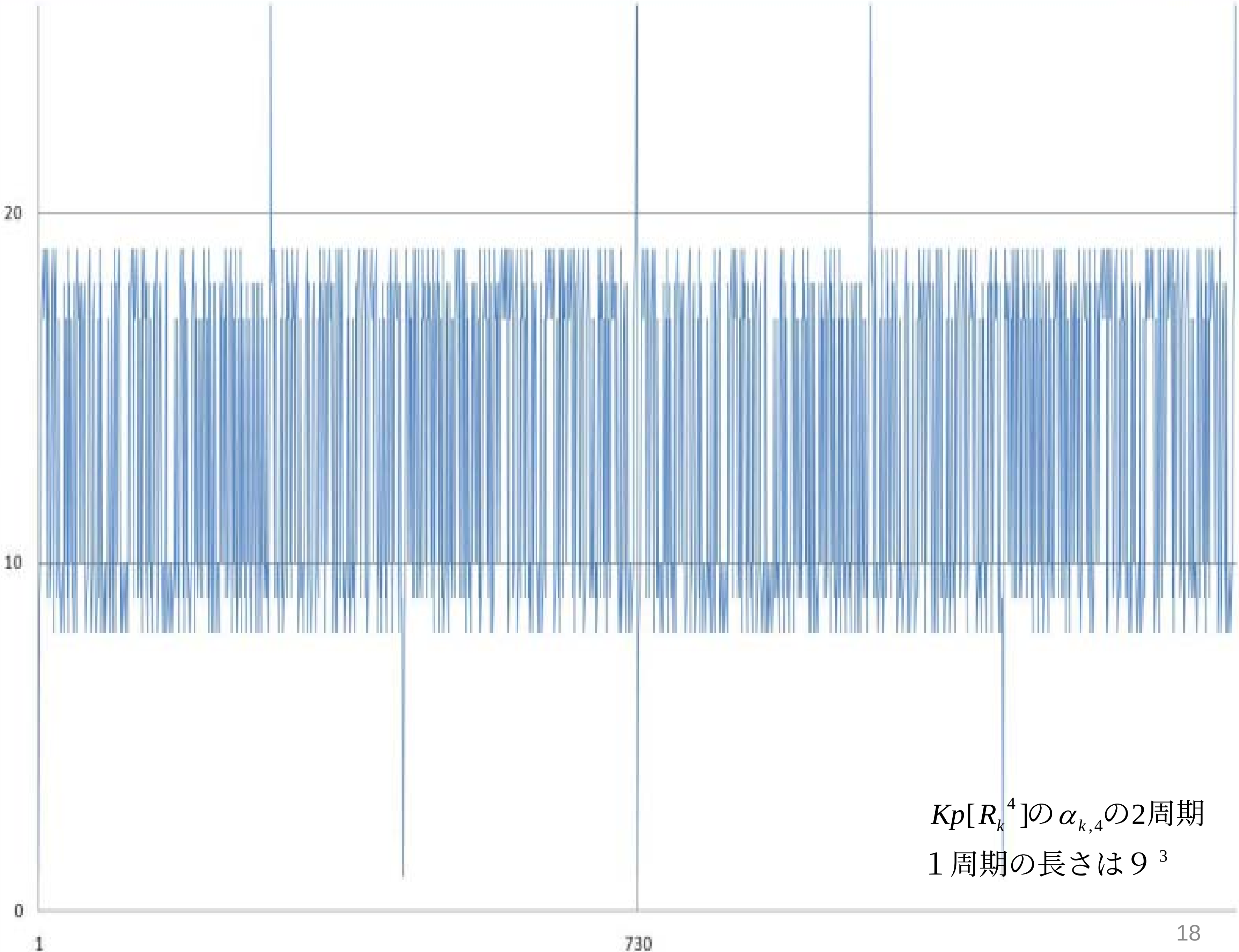
$Kp[R_k{}^2]$の$\alpha_{k,2}$の3周期

１周期の長さは９



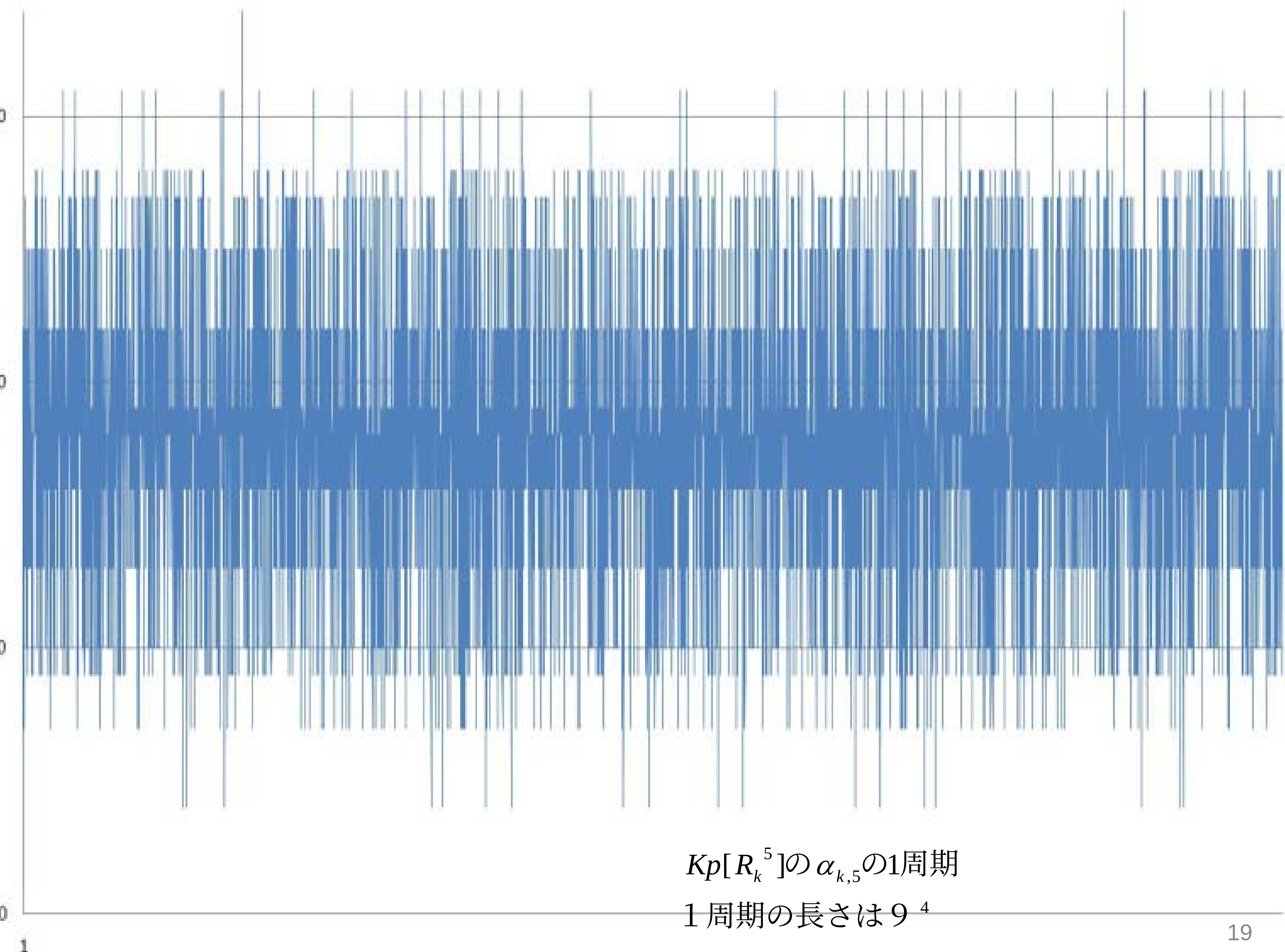
$Kp[R_k{}^3]$の$\alpha_{k,3}$の3周期

１周期の長さは９^2



$Kp[R_k{}^4]$の$\alpha_{k,4}$の2周期

１周期の長さは９[3]



$Kp[R_k^{\ 5}]$の$\alpha_{k,5}$の1周期

1周期の長さは$9^{\ 4}$