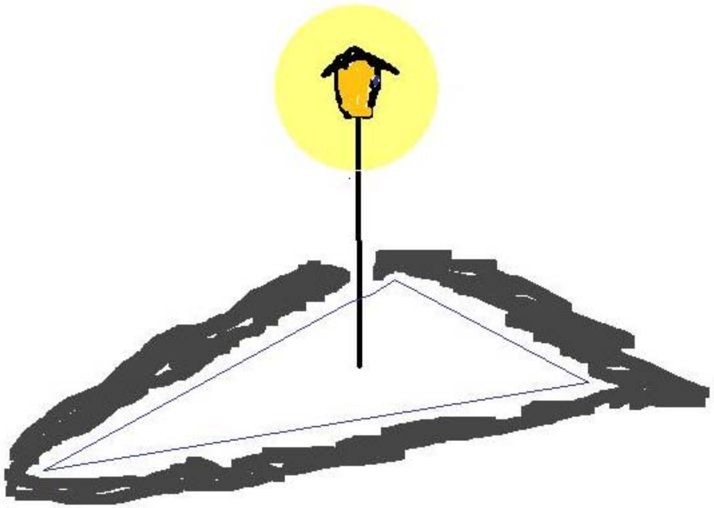
街灯は公園のどこに設置すべきか
－　三角形の新たな対称中心の発見　－



数学教育の会

2009.09.05　学習院大学
福岡大学理学部
柴田勝征

- **OECD(**経済協力開発機構）による**国際統一学力調査**
- **PISA**（Program for International Student Assessment）
- 「PISA2003年　評価の枠組み」より
「**数学化**（**mathematatising**）」（数学の問題をどのように作るべきか）
（1）実際に存在する問題から出発すること
（2）数学的概念によってその問題を構成すること
（3）問題をどの主要点が重要であるかを仮定したり、一般化したり等の過程を通じ、徐々に現実の形を整えていく
（4）数学的な問題を解く
（5）現実の状況に即した形で数学的な解答を解釈する
- ［**問題例**：　**街灯**］
町議会は、小さな三角形の形をした公園に一本の街灯を設置することにしました。その街灯は公園全体を照らすものとします。街灯はどこに設置したらよいでしょうか。
- **PISA**によるこの問題の<u>*模範的な*</u>「**数学化**」

（1）街灯をどこに設置するか

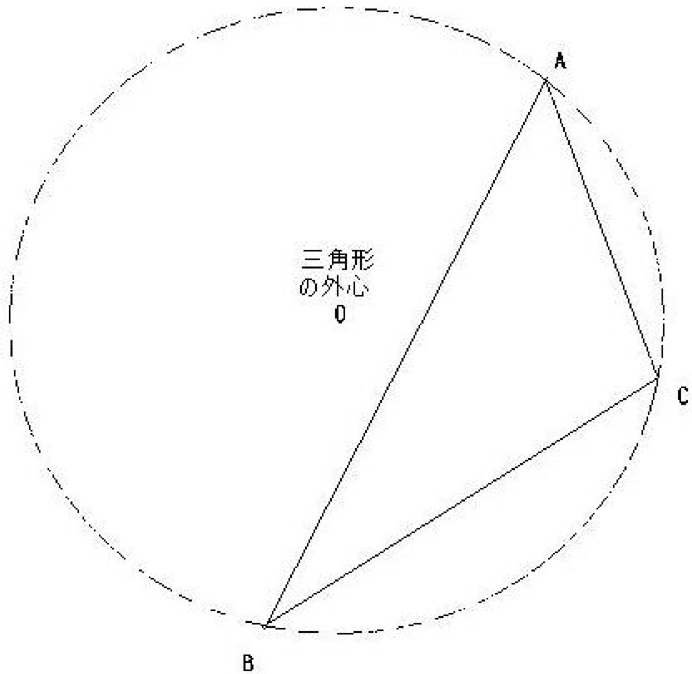
（2）公園の形を三角形で表現することができる。また、街灯についている1個の電灯の灯りは円で表現することができる。街灯は円の中心であることが分かる。

- **PISAによるこの問題の*模範的*「数学化」（続き）**

（3）この問題は**三角形に外接する円の中心を求める問題**に変換される。

（4）三角形に外接する円の中心は、三角形の各辺の垂直2等分線の交点にあるという事実を使うために、三角形の2辺の垂直2等分線を引く。二つの2等分線が交わった点が円の中心である。

（5）発見したことを、現実の公園に関係付けてみる。そしてこの解答について熟考し、例えば、公園の三つの角のひとつが鈍角である場合、街灯は公園の外になってしまうことになるので、**妥当でないことを認識する。**（後略）



街灯をどこに設置するか

● **何を評価基準として街灯の位置を決めるか？**

● PISAによる基準

外接円の中心　=>　3つの頂点での明るさをぴったり同じにしたい。

（その説得的な理由付けはない。）

本当の理由（幾何の外心の定理を当てはめたいだけ）

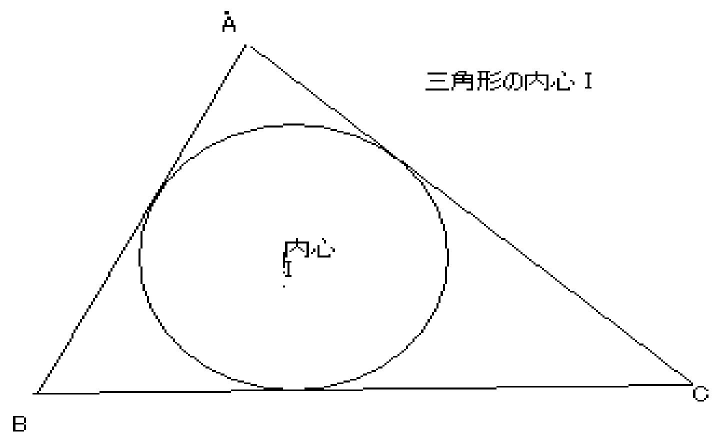
● **われわれの基準**

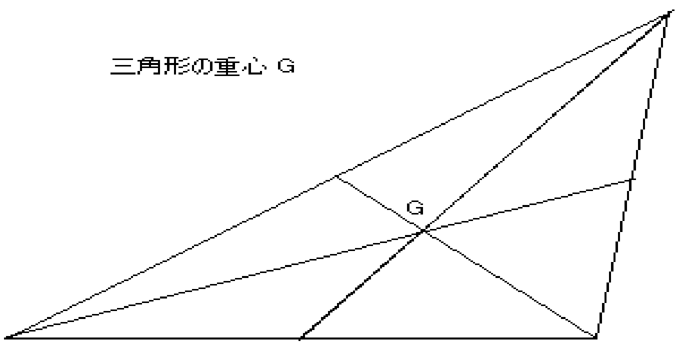
資源・エネルギーを最も有効に使用したい。（地球に優しく）

（できれば、**光熱水料を最小化**したい。）

=>　各点での明るさは光源からの距離の自乗に反比例するから、光源を三角形の「中心」的な位置に置くほど明るく照らされる部分の面積が増える。

=>　中学校の幾何のレベルでの最適解は、「内心」か「重心」であろう。

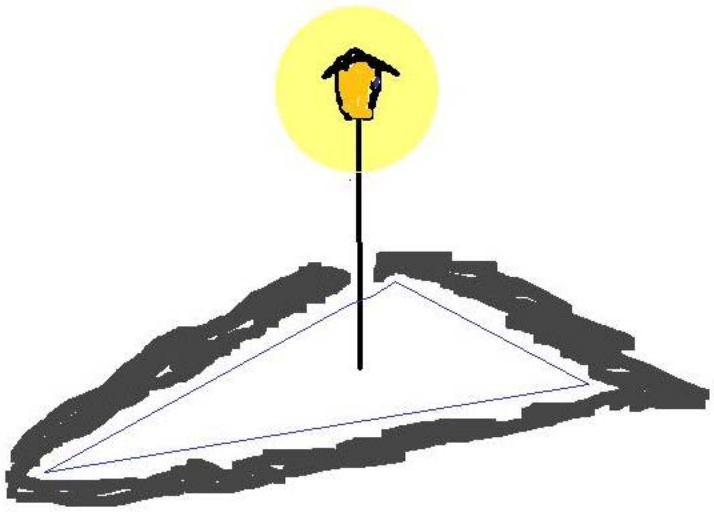




街灯をどこに設置するか

この問題をどのようにして解くか（われわれの基本方針）

- ある点Pに街灯を設置したとき、そこから距離 r だけ離れた点 Q における「明るさ」を定義して、その「明るさ」を三角形全体について積分する。
- 積分値は光源の位置P の関数となる。
- 積分値を最大にする点 P の位値を求める。



街灯をどこに設置するか

我々の数学化（mathematisation）（その１）

●光源設置点 P から距離 r だけ離れた点 Q の明るさは、<u>その点において光源からの光を最も有効に活用した場合の明るさ</u>、と定義する。

●すなわち、そこに立っている人が、プラカードなどを高く<u>光源の高さまで掲げ</u>、かつ<u>光源と垂直に向き合うような角度を取った場合</u>の明るさと定義する。

●この場合の点 Q の「明るさ」は c/r^2 (c は r によらない正の定数）と表される。

●これを三角形全体に渡って積分することは、物理的には、ある時点で三角形の上空を光源から水平に飛んでいる光量子の数を数えることに相当する。

●ただし、この定義では r = 0 の地点（光源設置地点）では「明るさ」が無限大になってしまうので、それを除く工夫が必要になる。

我々の数学化(mathematisation)(その2)

十分小さな正の数 ε を任意に選んで固定する。

$I_\varepsilon(\triangle ABC) = \{P;\ P \in \mathrm{Interior}(\triangle ABC),\ d(P, \partial(\triangle ABC)) > \varepsilon\}$: $\triangle ABC$ の ε 内包

$D_\varepsilon(P) = \{Q;\ d(P,Q) < \varepsilon\}$: 点 P の ε-開近傍

とすると、定義から、$P \in I_\varepsilon(\triangle ABC)$ ならば、$D_\varepsilon(P) \subset \triangle ABC$ となっている。

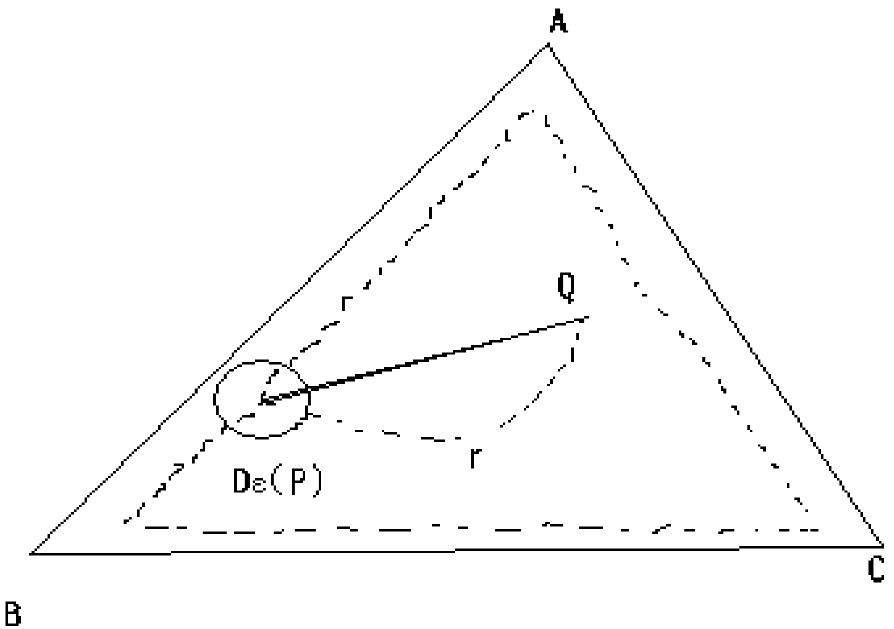
点 P に光源がある時、

$\forall Q \in (\triangle ABC - D_\varepsilon(P))$

に対して、$r = d(P,Q)$ とすると

点Qにおける明るさは c/r^2
(c は r によらない正の定数で光源の光の強さを現す)で表現される。

Qを含む微少な領域を取り、その面積を dS とし、その領域を底辺とし高さを c/r^2 とする細長い柱体を考える。その体積は $(c/r^2)dS$ である。

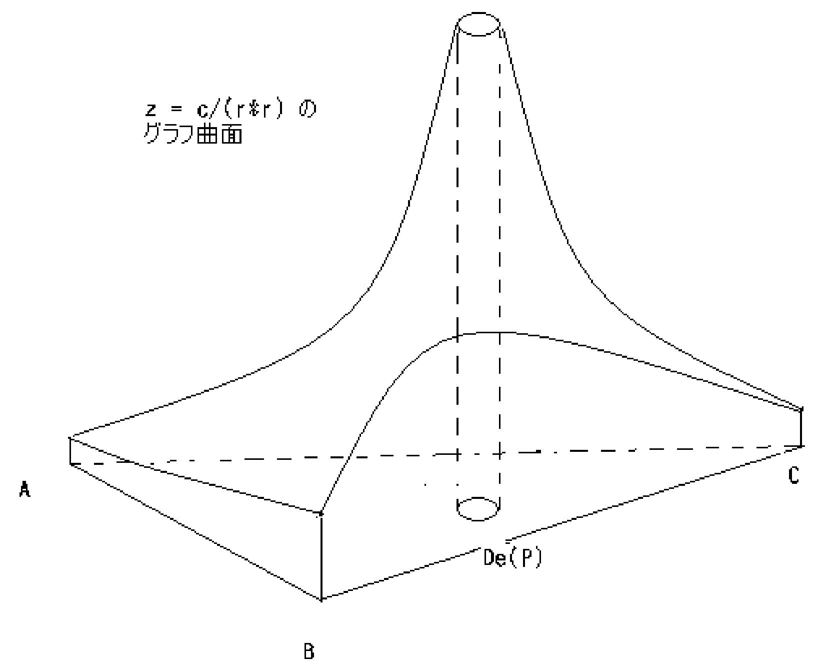


この微小領域を ⊿ABC - D_ε (P) 全体に渡って動かして、すべての柱体の体積を足し合わせせわせて

$$E(P;\ \varepsilon) = \iint_{\triangle ABC - D_\varepsilon(P)} (c/r^2)\,dS$$

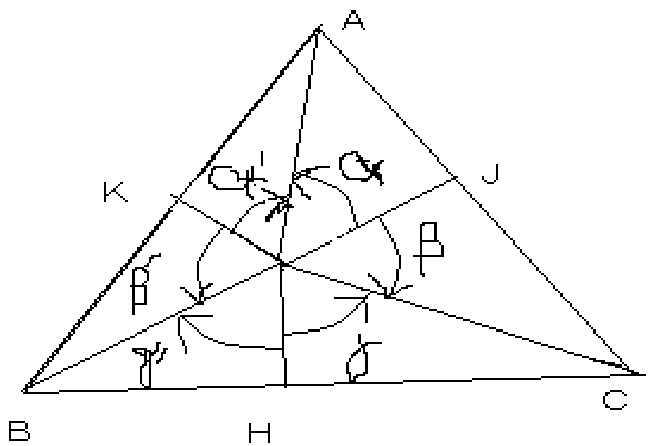
と定義して、これを「**点Pに光源を置いたときの⊿ABC 全体の明るさ**」と呼ぶ。これは、点Pに極座標の原点を置き、$z = c/r^2$ のグラフ曲面を ⊿ABC - D_ε (P) 上に制限して得られる3次元コンパクト図形の体積を表している。

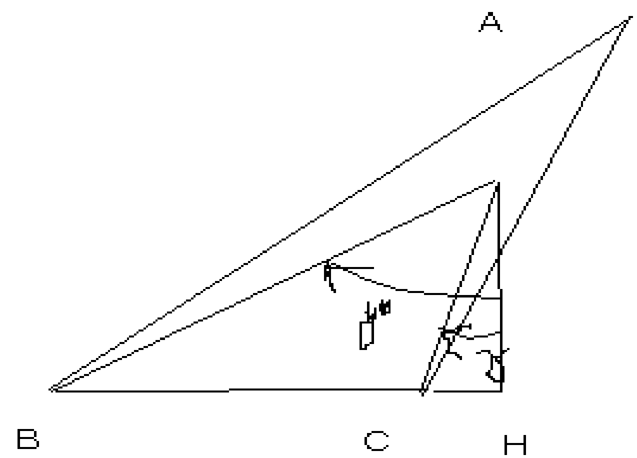
このとき我々は、光源が半径 ε の円形をしていると仮定して、光源の内部は考えず、光源によって照らされている外部の点の明るさ c/r^2 の総和を取った、と考えればよい。



重積分の計算

- ΔABC を6個の直角三角形に分割して、それぞれの部分で積分して、それらを合計する。
- そのために、点Pから3辺に垂線を下ろし、辺BC、CA、AB上のそれらの足を、H, J, Kとする。また、点Pと3頂点A, B, Cを結び、∠JPA = α, ∠JPC = β, ∠HPC = γ, ∠KPA = α', ∠KPB = β', ∠HPB = γ' と置く。ただし、各々の角は、鋭角三角形の場合の図の矢印の向きを正の向きとし、鈍角三角形で垂線の足が底辺の延長上に来た場合には、その足と点Pとその足に近い方の頂点とで作る角は負の向きで測ることにする。これにより、常に $\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'=2\pi$ が成り立つ。





重積分の計算(続き)

- 6個の直角三角形での重積分は次のように行う。ΔPJAの例で示す。

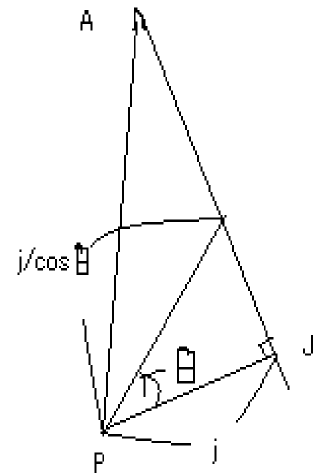
ただし、3本の垂線 PH,PJ,PK の長さをそれぞれ h, j, k とする。

$$\int_0^{\alpha}\int_{\varepsilon}^{j/\cos\theta}\left(\frac{c}{r^2}\right) r\,dr\,d\theta = \int_0^{\alpha}\int_{\varepsilon}^{j/\cos\theta}\left(\frac{c}{r}\right) dr\,d\theta$$

$$= c\int_0^{\alpha}[\log(j/\cos\theta) - \log\varepsilon]\,d\theta$$

$$= c\int_0^{\alpha}[-\log\varepsilon + \log j - \log(\cos\theta)]\,d\theta$$

$$= c[-\alpha\log\varepsilon + \alpha\log j - \int_0^{\alpha}\log(\cos\theta)\,d\theta]$$



$(0 \leqq \theta \leqq \alpha)$

このような積分結果を6個の小三角形について合計すると、

E(P; ε) = 2πc(- log ε) + c [($\alpha+\beta$)log j + ($\alpha' + \beta'$)log k + ($\gamma + \gamma'$)log h]

$$-c\{\int_0^{\alpha}\log(\cos\lambda)d\lambda + \int_0^{\alpha'}\log(\cos\lambda)d\lambda + \int_0^{\beta}\log(\cos\lambda)d\lambda + \int_0^{\beta'}\log(\cos\lambda)d\lambda$$

$$+\int_0^{\gamma}\log(\cos\lambda)d\lambda + \int_0^{\gamma'}\log(\cos\lambda)d\lambda\}$$

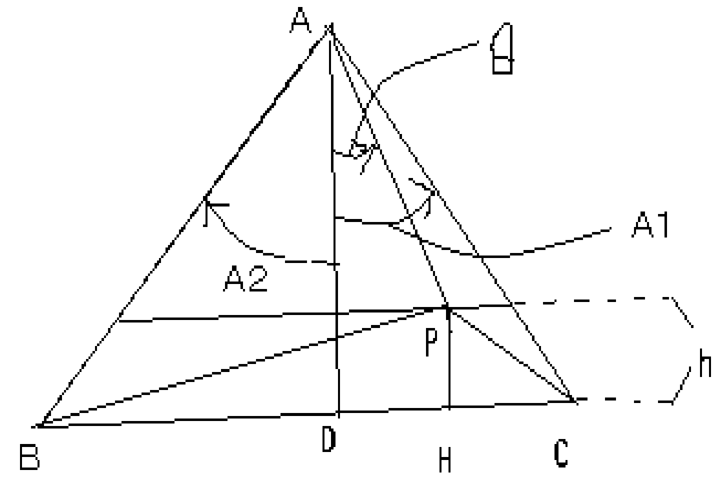
● 偏微分の計算

点Pに光源を置いた時のΔABC全体の明るさ E(P; ε) が計算できたので、Pを動かした時に E(P; ε) の値がどのように変化するのかを調べてゆく。

Pは Iε (ΔABC) の中を2次元的に移動するので、Pから辺BCに下ろした垂線PHの長さ |PH| = h = (一定) として、点Pを水平に動かす。頂点Aから辺BCに下ろした垂線の足をDとすると、点Pの位置は θ = ∠DAP によって一意的に確定する。

∠DAC = $\angle A_1$, ∠DAB = $\angle A_2$ と置くと、
$\angle A_1 = (\pi/2) - \angle C$, $\angle A_2 = (\pi/2) - \angle B$
である。($-\angle A_2 \leqq \theta \leqq \angle A_1$)

E(P; ε) は9個の変数（3本の垂線の長さ h, j, k と6個の角の大きさ $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$) で表現されているが、これらは1変数 θ の関数なので、合成関数の微分法を用いる。また、微分積分法の基本定理により、定積分を上限値で微分すると、被積分関数に戻る。



・偏微分の計算（続き）

$$\frac{dE(P;\varepsilon)}{d\theta}=c[(\frac{d\alpha}{d\theta}+\frac{d\beta}{d\theta})\log j+(\alpha+\beta)\frac{1}{j}\frac{dj}{d\theta}$$

$$+(\frac{d\alpha'}{d\theta}+\frac{d\beta'}{d\theta})\log k+(\alpha'+\beta')\frac{1}{k}\frac{dk}{d\theta}+(\frac{d\gamma}{d\theta}+\frac{d\gamma'}{d\theta})\log h]$$

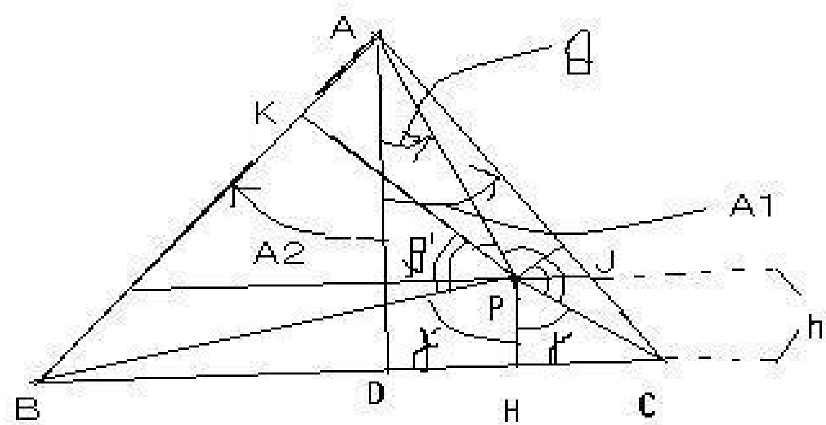
$$-c\{\log(\cos\alpha)\frac{d\alpha}{d\theta}+\log(\cos\alpha')\frac{d\alpha'}{d\theta}+\log(\cos\beta)\frac{d\beta}{d\theta}$$

$$+\log(\cos\beta')\frac{d\beta'}{d\theta}+\log(\cos\gamma)\frac{d\gamma}{d\theta}+\log(\cos\gamma')\frac{d\gamma'}{d\theta}\}$$

ここで、9つの変数 h, j, k, α, α', β, β', γ, γ' を θ で表しておいて θ で微分すると、

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-(A_1-\theta) \quad \text{より} \quad \frac{d\alpha}{d\theta}=1, \quad \alpha'=\frac{\pi}{2}-(A_2+\theta) \quad \text{より} \quad \frac{d\alpha'}{d\theta}=-1,$$

偏微分の計算(続き)



$$\beta = A_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$ より $$\frac{d\beta}{d\theta} = -\frac{d\gamma}{d\theta}$$

$$\beta' = A_2 + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma'\right)$$ より $$\frac{d\beta'}{d\theta} = -\frac{d\gamma'}{d\theta}$$

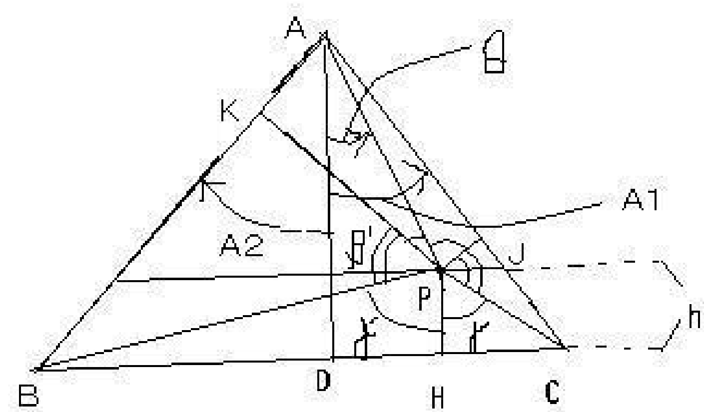
$$|AP| = \frac{|AD| - h}{\cos\theta}$$ ， $$j = AP\sin(A_1 - \theta) = \frac{(|AD| - h)\sin(A_1 - \theta)}{\cos\theta}$$ より

$$\frac{dj}{d\theta} = \frac{(|AD| - h)}{\cos^2\theta}\{-\cos(A_1 - \theta)\cos\theta + \sin(A_1 - \theta)\sin\theta\} = \frac{-(|AD| - h)\cos A_1}{\cos^2\theta} < 0$$

$$k = AP\sin(A_2 + \theta) = \frac{(|AD| - h)\sin(A_2 + \theta)}{\cos\theta}$$ より

$$\frac{dk}{d\theta} = \frac{(|AD| - h)}{\cos^2\theta}\{\cos(A_2 + \theta)\cos\theta + \sin(A_2 + \theta)\sin\theta\} = \frac{(|AD| - h)\cos A_2}{\cos^2\theta} > 0$$

偏微分の計算（続き2）



さらに、

$$h\tan\gamma = |CD| - (|AD| - h)\tan\theta$$ より

$$h\frac{1}{\cos^2\gamma}\frac{d\gamma}{d\theta} = -(|AD| - h)\frac{1}{\cos^2\theta}$$ だから、

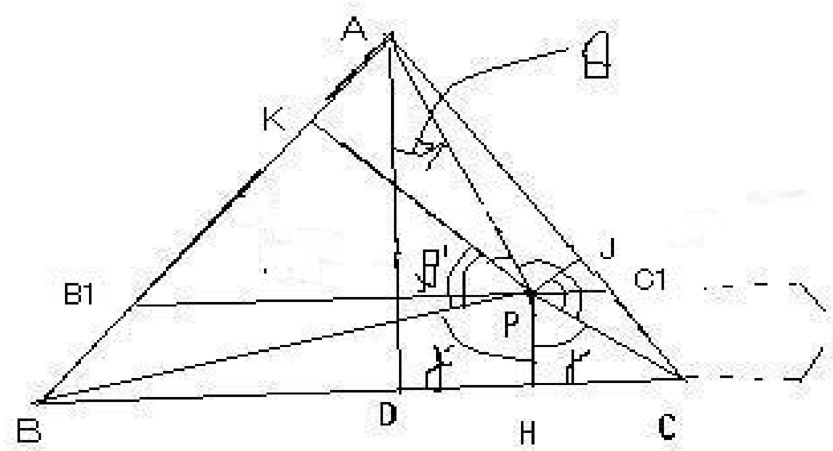
$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{(|AD| - h)}{h}\frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\theta} = \frac{-|AP|\cos\gamma}{|CP|\cos\theta} < 0$$ となり、同様にして、

$$\frac{d\gamma'}{d\theta} = \frac{|AP|\cos\gamma'}{|BP|\cos\theta} > 0$$ となる。従って、 $$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{|AP|\cos\gamma}{|CP|\cos\theta} > 0, \frac{d\beta'}{d\theta} = \frac{-|AP|\cos\gamma'}{|BP|\cos\theta}$$

これらの結果を dE(P; ε) / d θ の計算式に代入すると、log の項などが面白いように消し合って、非常に簡単な式になってしまう。

偏微分の計算(続き3)

$$\frac{dE\,(P;\varepsilon)}{d\theta}=$$ （途中の計算を省略）



$$=c\Big[\frac{|AP|\cos\gamma}{\cos\theta|CP|}\log\Big(\frac{j}{\cos\beta}\Big)-\frac{|AP|\cos\gamma'}{\cos\theta|BP|}\log\Big(\frac{k}{\cos\beta'}\Big)+\frac{(|AD|-h)}{\cos^2\theta}\Big\{\frac{(\alpha'+\beta')\sin B}{k}-\frac{(\alpha+\beta)\sin C}{j}\Big\}$$

$$+\frac{|AP|\cos\gamma'}{\cos\theta|BP|}\{\log h-\log(\cos\gamma')\}-\frac{|AP|\cos\gamma}{\cos\theta|CP|}\{\log h-\log(\cos\gamma)\}\Big]$$

$$=c\frac{(|AD|-h)}{\cos^2\theta}\Big\{\frac{(\alpha'+\beta')\sin B}{k}-\frac{(\alpha+\beta)\sin C}{j}\Big\}=c\frac{(|AD|-h)}{\cos^2\theta}\Big\{\frac{\angle APB}{|B_1P|}-\frac{\angle APC}{|C_1P|}\Big\}$$ となる。

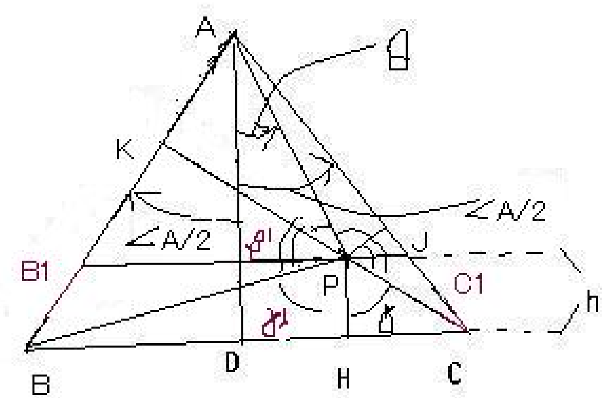
　ただし、点Pを通る水平線が辺AB、ACと交わる点をB_1, C_1とする。Θが増大してゆくと、∠APB => 減少、$|B_1P|$ => 増大、∠APC => 増大、$|C_1P|$ => 減少、だから、

{….} 内は単調減少。そして、θ ➔ $\angle A_1$ のとき $|C_1P|$ ➔ +0,　θ ➔ -$\angle A_2$ のとき $|B_1P|$ ➔ +0 となるから、dE / dθ はB_1C_1間の唯一の点で0となり、符号が＋から－に変わる。

●対称性

前ページの最後の式は、2等辺三角形（∠B = ∠C)の場合には、

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{c(|AD|-h)}{\cos^2\theta}\left\{\frac{\angle APB}{|B_1P|} - \frac{\angle APC}{|PC_1|}\right\}$$

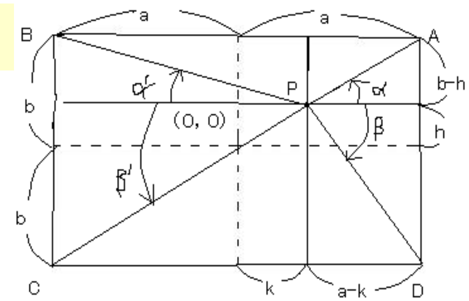


であり、$\theta \rightarrow -\theta$ とすると、
∠ APB と∠APC 、および $|B_1P|$ と $|PC_1|$ の大きさが入れ替わるから、$[dE / d\theta]_\theta = -[dE / d\theta]_{-\theta}$
であり、特に「$[dE / d\theta]_{\theta=0} = 0$ となる。
　ゆえに、対称軸の上で水平方向の最大値が得られる。
従って、正三角形の場合には3本の対称軸の交点がΔABC全体で最も照明効率が良い位置となり、直感と一致する。

長方形の場合

長方形の場合にも、三角形の場合と同様の方法で計算する。

長方形ABCDを８個の直角三角形に分割して、それぞれについて重積分を計算して全体の明るさを求める。



８個の直角三角形での重積文を合計すると、

$$E(P;\varepsilon) = -2\pi c\log(\varepsilon) + c(\alpha+\beta)\log(a-k) + c(\alpha'+\beta')\log(a+k)$$

$$+c(\pi-\alpha-\alpha')\log(b-h) + c(\pi-\beta-\beta')\log(b+h)$$

$$-c\{\int_0^{\alpha}\log(\cos\theta)d\theta + \int_0^{\pi/2-\alpha}\log(\cos\theta)d\theta + \int_0^{\beta}\log(\cos\theta)d\theta + \int_0^{\pi/2-\beta}\log(\cos\theta)d\theta$$

$$+\int_0^{\beta'}\log(\cos\theta)d\theta + \int_0^{\pi/2-\beta'}\log(\cos\theta)d\theta + \int_0^{\alpha'}\log(\cos\theta)d\theta + \int_0^{\pi/2-\alpha'}\log(\cos\theta)d\theta\}$$

となるから、高さ h を固定して水平方向に変数 k で微分すると、三角形で計算したときと同じように、log の項は互いに消しあって、

$$\frac{dE}{dk} = c\{\frac{\sin 2\alpha}{2k}(-\log|AP|+\log|AP|) + \frac{\sin 2\beta}{2k}(-\log|DP|+\log|DP|) + \frac{\sin 2\alpha'}{2(a+k)}(\log|BP|-\log|BP|)$$

$$-\frac{\sin 2\beta'}{2(a+k)}(\log|CP|-\log|CP|) + \frac{\alpha+\beta}{a-k} - \frac{\alpha'+\beta'}{a+k}\} = c\{\frac{\alpha+\beta}{a-k} - \frac{\alpha'+\beta'}{a+k}\}$$

長方形の場合（続き）

従って、k -> - k の変換をすれば、α <-> α’, β <-> β’ だから、

$$\frac{dE}{dk}\Big|_{(-k)} = -\frac{dE}{dk}\Big|_{(k)}$$ であり、特に、 $$\frac{dE}{dk}\Big|_{(k=0)} = 0$$ である。

また、第2次導関数を計算すると、

$$\frac{d^2E}{dk^2} = -c\left\{\frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{2k^2} + \frac{\alpha+\beta}{k^2} + \frac{\sin 2\alpha' + \sin 2\beta'}{2(a-k)^2} + \frac{\alpha'+\beta'}{(a-k)^2}\right\} < 0$$

だから、E(P, ε)は k に関して上に凸な関数で、k=0 で最大値を取る。
上では点Pを水平方向に移動させて微分したが、Pを垂直方向に移動させて微分しても全く同様。したがって、2つの対称軸の交点が最大値を与えることが分かるので、対角線の交点が最も照明効率の良い点であることが分かる。

二等辺三角形の「灯心」

先に見たように、二等辺三角形の場合には、点Pを底辺BCに平行に移動させると、中心軸の上で、最大値を取る。底辺からの高さ h における E(P; ε) の値は

$$E(P;\varepsilon) = 2\pi c(-\log\varepsilon) + c\{2(\alpha+\beta)\log j + 2\gamma\log h\} + 2c\{\int_0^\alpha \log(\cos\theta)d\theta + \int_0^\beta \log(\cos\theta)d\theta + \int_0^\gamma \log(\cos\theta)d\theta\}$$

これを合成関数の微分を使って、高さ h で微分すると、

$$\frac{dE}{dh} = c\{-\frac{2\sin(\angle A/2)}{j}(\alpha+\beta) + \frac{\sin(2\gamma)}{h}\log(h/j) + \frac{\sin(2\gamma)}{h}\log(\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}) + 2\gamma\frac{1}{h}\} = c\{\frac{\gamma}{h} - \frac{\pi-\gamma}{(|AH|-h)}\}$$

点Pが底辺から頂点Aに向かって上昇してゆくと、h が増加し、γ は減少するから、上の微分は h に関して単調減少関数である。h が 0 に近いところでは +無限大に近く、|AH| に近いところでは- 無限大に近くなるから、この微分は中心軸上の１点でゼロとなり、それより下では正、それより上では負となる。すなわち、この点に光源をおいたときに三角形全体の明るさE（P; ε)が最大となる。この点の位置を「灯心」と名づけることにする。

上式により、dE（P; ε) / dh の値は、重心においては, h / |AH| = 1/3 を代入すると、c(γ - π /3) / h*h*|AH| となり、∠A < π / 3 のとき γ < π / 3 より負となり、∠A > π / 3 のとき γ > π / 3 より正となる。

二等辺三角形の「灯心」（続き）

この値は、内心においては

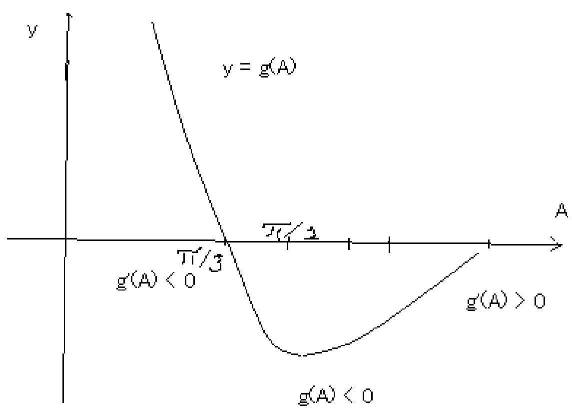
$\gamma = (\pi + \angle A) / 4,\ \pi - \gamma = (3\pi - \angle A) / 4,$

$h = |AH|\sin(\angle A/2) / (1 + \sin(\angle A/2))$を代入すると、

$$\frac{dE}{dh}|(内心) = \frac{c}{4}\{\frac{(1+\sin(\angle A/2))}{|AH|}(\frac{\pi+\angle A}{\sin(\angle A/2)} - (3\pi - \angle A)\}$$

上式の最後の因子をAについてまてめて $g(A) = (1 + \frac{1}{\sin(\angle A/2)})\angle A + \frac{\pi}{\sin(\angle A/2)} - 3\pi$

とおくと、g(A)のグラフは下図のようになる。



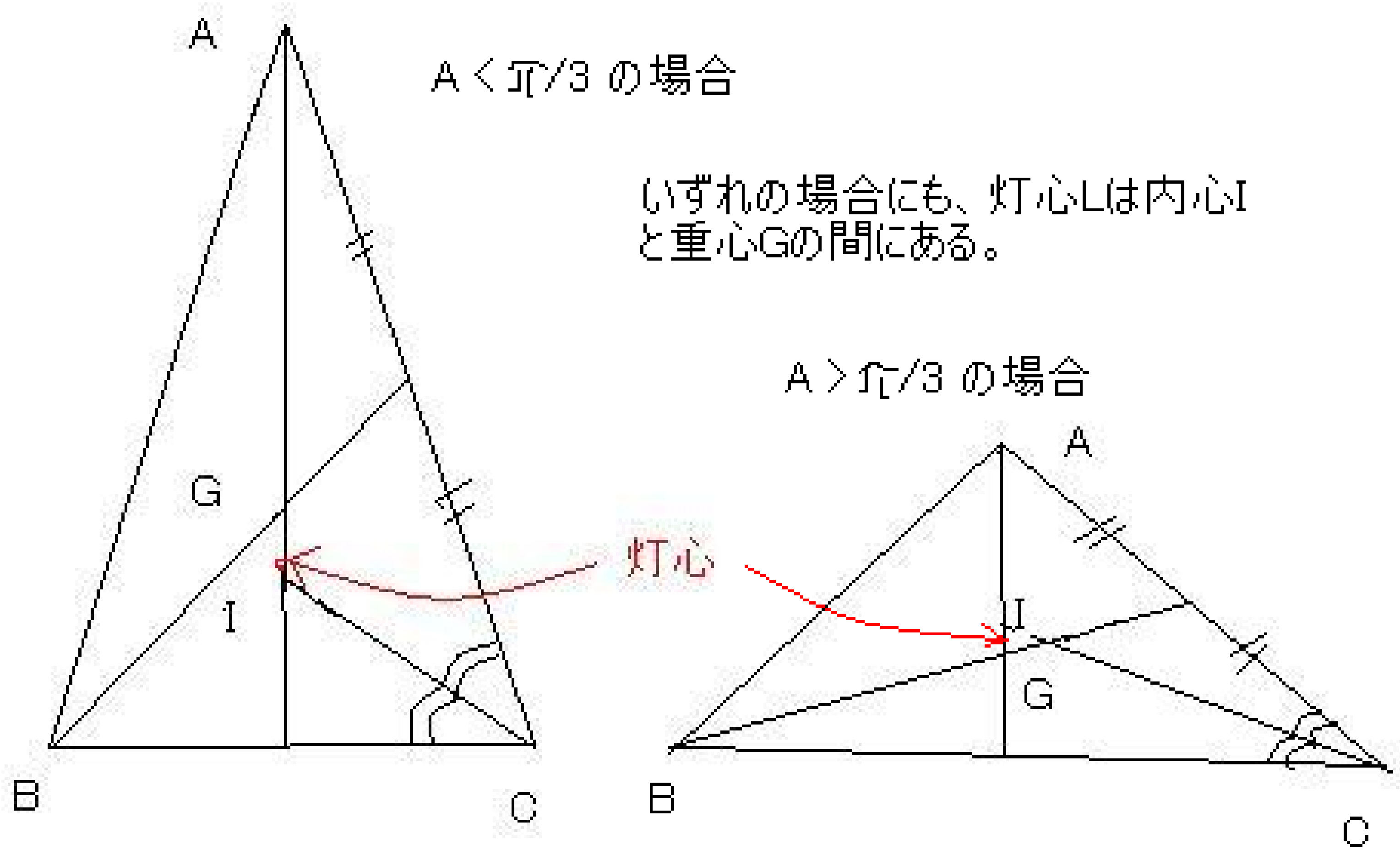
したがって、dE/dh の符号は、

$\angle A < \pi/3$ のとき正で、

$\angle A > \pi/3$ のとき負である。

重心の場合と正負が反対になっていることに注意する。

二等辺三角形の「灯心」（まとめ）

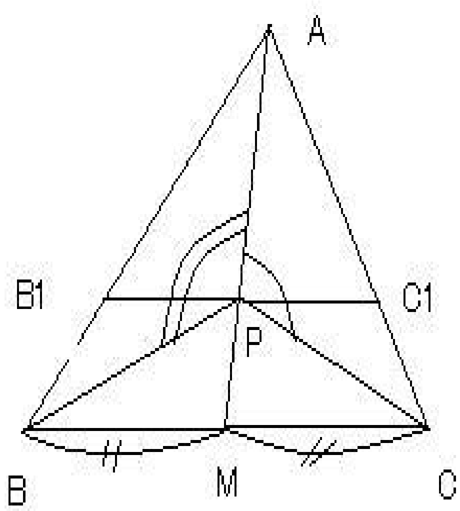


一般の三角形の灯心

一般の三角形の場合、∠B ≦∠C と仮定してよい。反対の場合には、左右を反転させて考えればよい。

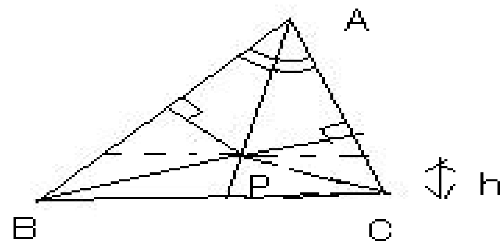
点Pを水平方向に移動させてゆくと、$dE/d\theta$ の符号が、ある一点で正から 0 になり、それ以降は負になることを既に見た。それがどこであるかを求めたい。この点が $E(P;\varepsilon)$を最大にする灯心であるが、二等辺三角形の場合には、底角の2等分線と側辺の中点と対頂点を結ぶ線分の間に存在したことに注目し、それが一般の三角形でも成り立つのではないかと調べてゆく。

まず、頂点Aと底辺BCの中点Mを結ぶ線分上での符号を調べる。このケースでは、$B_1P = C_1P$ であるから、$dE/d\theta$ の符号は ∠APB - ∠APC の符号に一致する。補角を考えると、これは ∠CPM - ∠BPM に等しい。点Pが線分AM上を動くとき、|BP| - |CP| は最初の |BA| - |CA| > 0 から 連続的に減少して最後に |BM| - |CM| = 0 にいたるので、途中の点Pにおいては |PB| - |CP| > 0 である。これより ∠CPM - ∠BPM > 0 となり、 $dE / d\theta > 0$ となる。したがって、「灯心」は中線AMに関して∠Cと同じ側にある。



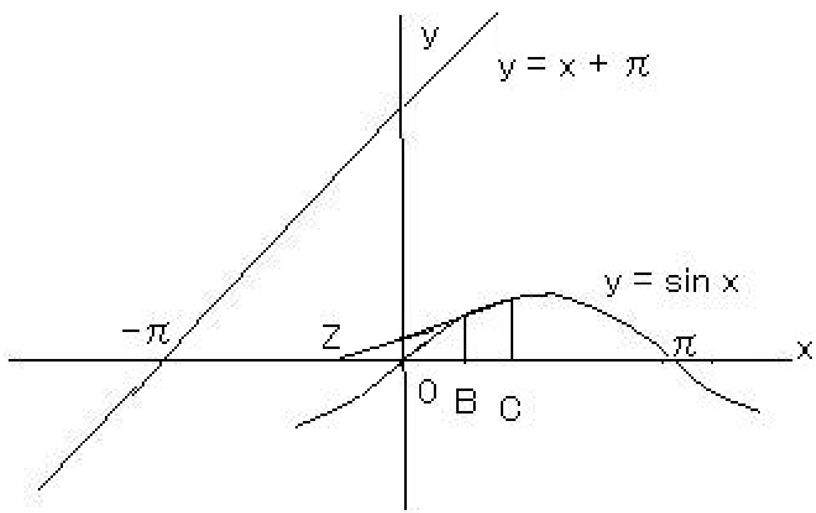
一般の三角形の灯心と頂角の二等分線

　次に、頂角の二等分線上での dE / d θ の正負を判定する。この場合には、点Pから辺AB, ACにおろした垂線の足の長さ k, j が等しいので、dE / d θ の正負は (∠APB)sinB – (∠APC)sinC の正負に一致する。点Pが頂点Aに近いときは∠APBと∠APCは共に∠A / 2 の補角に近いので、∠B < ∠C と仮定していることから、この値は負となる。したがって、点Pが辺ABの近くから水平に移動するとき、中線AMを横切るときはまだE(P; ε)は増大の状態にあったが、∠Aの二等分線を横切るときには既に減少の状態に転じているわけで、確かに最大値を取る点は予想通り、これら2つの線分の間にある。
　しかし、点Pが底辺BCに近い高さで水平に移動する場合には、∠Bが直角の場合に数値計算をしてみるとまだ正の値にとどまっている。それでは、頂点Aと底辺BCの「中間」の位置にある「灯心」の高さでは正か、負か？　これが根本的な問題である。



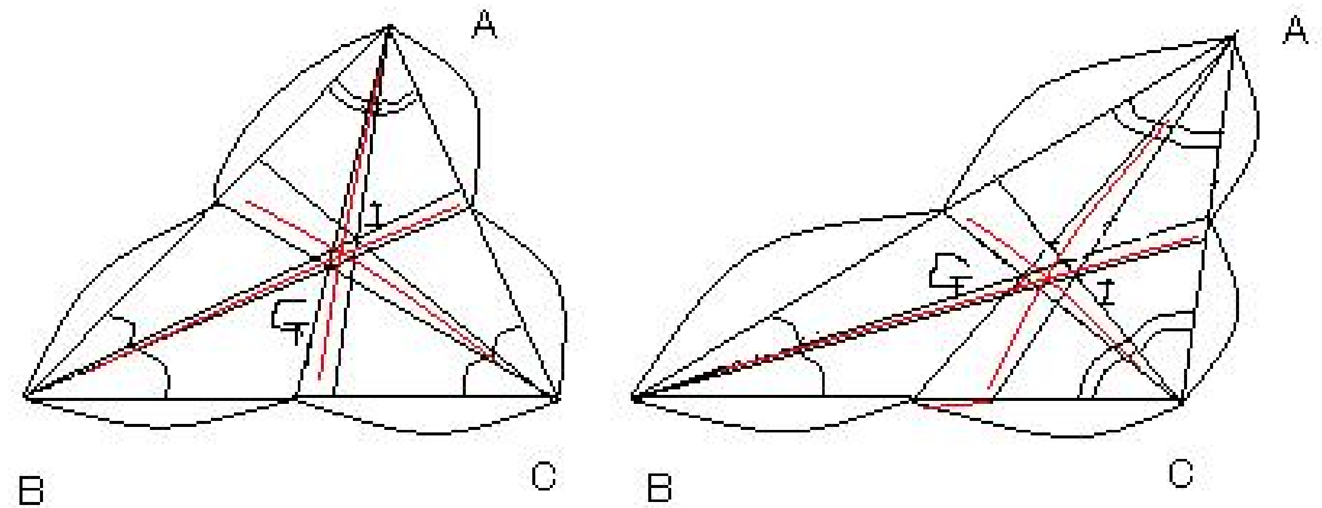
内心における dE/dθ の正負の判定

そこで、内心の位置での正負を計算することにする。内心の位置では、∠APB)sinB – (∠APC)sinC の正負は(sinB / sinC) – (π+ ∠B) / (π+ ∠C) の正負に一致する。Y = sin x と y = x + π のグラフ曲線を考えると、サイン曲線上の２点 (C,sinC), （B,sinB) を結ぶ直線がx軸と交わる点を(Z,0)とするとき、- π < Z であることが、(sinB / sinC) – (π+ ∠B) / (π+ ∠C) と同値である。三角関数表を用いて数値計算をしてみると、∠C < 77度であればこの値は∠Bの値にかかわらず負になることがわかる。∠Cが90度近く、あるいは鈍角であると、頂角∠Aがあまり小さくなければ負になるが、かなり小さくなると符号は正に転換する。例えば、∠Cが90度の場合、∠Aが25度より少し小さい値で負から正に変わる。∠Cが120度の場合には∠Aが20度の付近で負から正に変わる。しかし、これらの場合においても、∠Aと∠Bの役割を交換してみると、頂点Bの対辺CAに平行な方向の微分係数は内心で負になっている。



一般の三角形の「灯心」（まとめ）

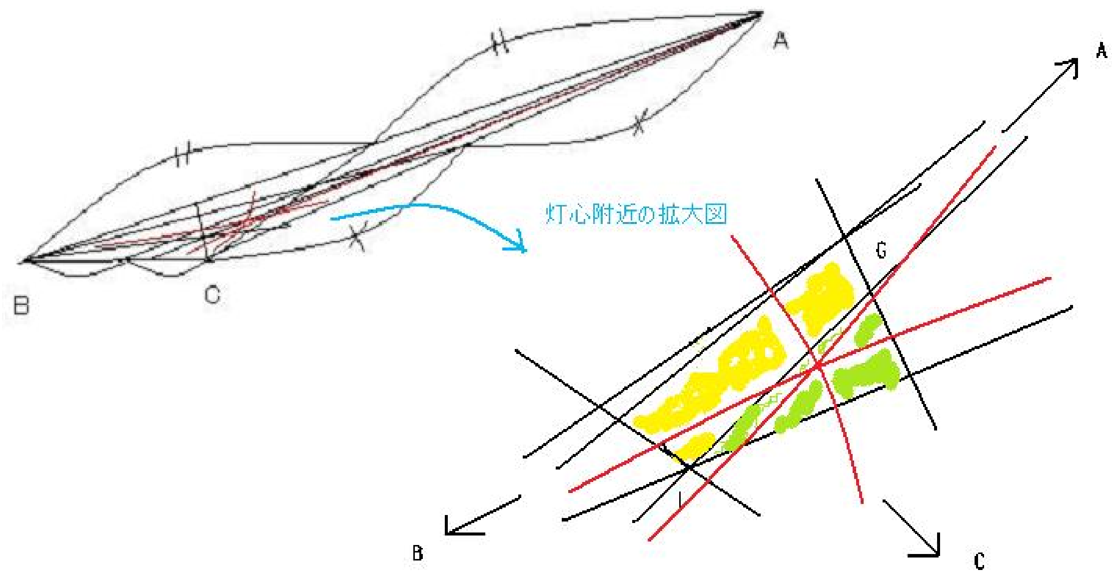
三角形ABCの最大角が77度以下の場合、あるいは77度以上であっても最小角が極端に小さくない場合には、下図のようになる。



各辺に平行に偏微分したときに最大値を取る点の軌跡を赤い曲線で表した。3本の曲線は、それぞれ、頂角の2等分線と対辺の2等分線の間を進んで行き、1点で交わる。

一般の三角形の「灯心」（まとめ＿2）

最大角が77度より大きく、最小角が非常に小さい場合には、下のようになる。



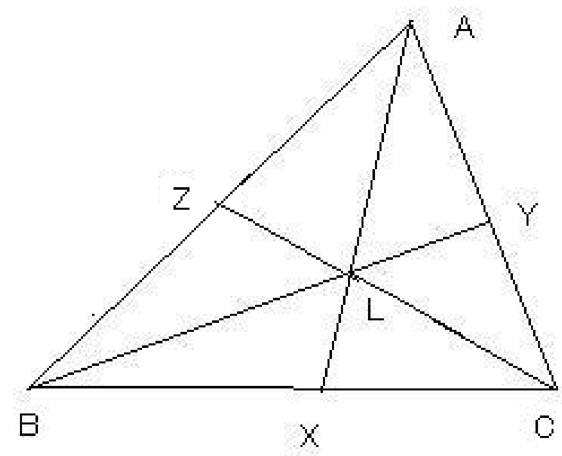
∠Aを最小角とすると、頂点B，Cの近くからスタートする赤い曲線は角の2等分線と対辺の2等分線の間を進んで、三角形の中心部で交わる。頂点Aの近くから出た赤い曲線も角の2等分線と対辺の2等分線の間を進むけれど、途中でわずかに角の2等分線をはみ出して最大角の方向に寄る。もちろんこの場合も、3曲線は1点（灯心）で交わる。

「灯心」をユークリッド的に記述できる

　「灯心」の発見には微分積分を用いたが、計算結果だけを見ると、灯心の位置は角の比と線分の長さの比だけで決まることがわかるから、以下に定理の形で述べておく。

[定理]任意の三角形ABCにおいて、次の等式を満たす点Lが唯一つ存在する。
3頂点A，B，Cからそれぞれ点Lと結んだ線分の延長が対辺と交わる点をそれぞれX，Y，Zとすると、$\angle ALB / \angle ALC = |BX| / |CX|$,
$\angle CLA / \angle CLB = |AZ| / |BZ|$,
（従って、チェバの定理から、
$\angle BLC / \angle BLA = |CY| / |AY|$）。

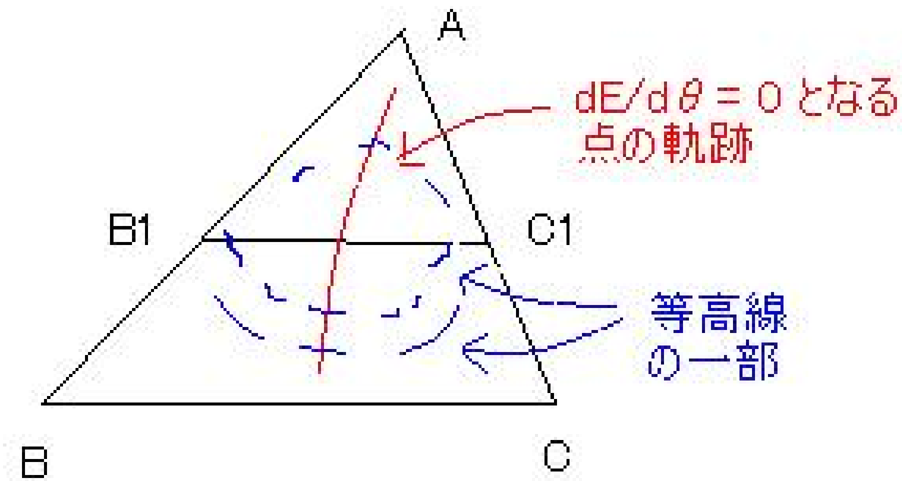
　この点に光源を置くと、⊿ABC全体を最も効率よく明るくすることができる。

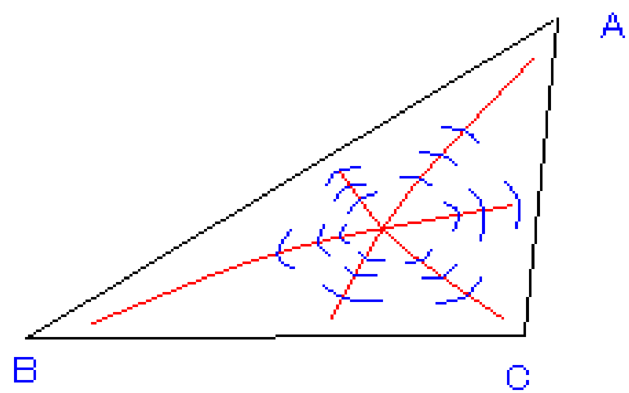


E(P; ε)の等高線図

点Pを点辺BCに平行に動かして行くと、dE / d θ は負の値からスタートして増加してゆき、やがてゼロを通過して負に転ずる。これを考慮して関数 E(P; ε) の等高線の一部を描くと右図のようになる。

したがって、3つの辺のすべてに対してこれを考えると E(P; ε) の等高線図の概略は、下図のようになる。

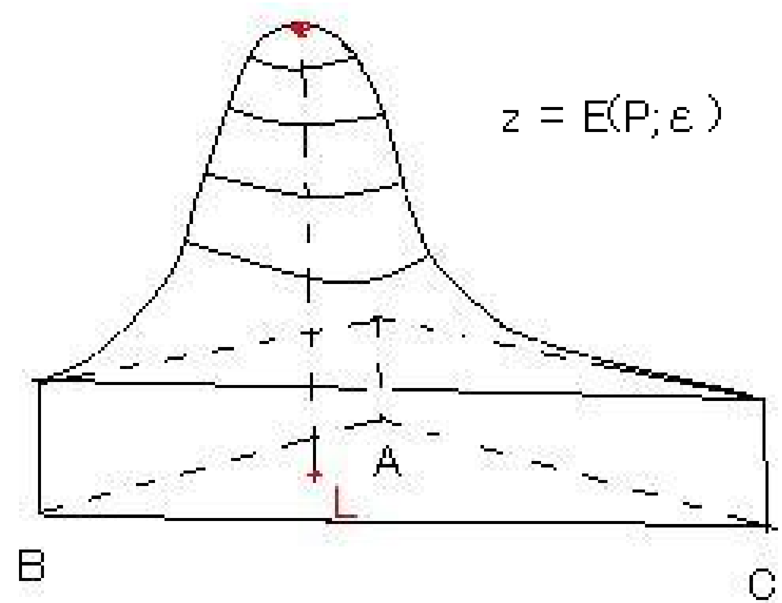




Z = E(P; ε) のグラフ曲面

関数 E(P; ε) の等高線図を考慮して、Z = E(P; ε) のグラフ曲面を描くとした図のようになる。各点での高さが、その点での照明の効率を表している。なお、E(P; ε) の計算に用いたパラメータ ε の値を変化させてもグラフ曲面の z 方向の高さが変わるだけで、曲面の形は変わらないことがE(P; ε) を計算した式の形から分かる。

また、光源の強さを表す正の定数 c を取り替えても、z方向の目盛りの縮尺が伸び縮みするだけだから、等高線図は c の値によらない、⊿ABCに固有の図形である。



ミニ・カミオカンデ（２体問題、多体問題）

以上に考察した問題は、距離の逆自乗で働く作用を最も有効に働かせる位置を求める問題であった。逆自乗で働く力は古典力学（万有引力）や古典電磁気学（クーロン力）で出てくる。そこで、今までの考察を、クーロン力の検出に応用してみる。

宇宙から降ってくる放射線の中の微弱な電荷を、クーロン力（引力・斥力）を利用して検出するセンサーを用いて、三角形をした観測地で測定する。センサーは1台で、クーロン力が一定の閾値を超えるとセンサーの針が振れる。センサーの近く降ってくる電荷は検出しやすいが、センサーから離れた位置ほど、降ってくる電荷が強くないと針は振れない。降ってくる電荷の強さと降ってくる位置とがまったくランダムだと仮定すると、センサーを置くのに最も効率の良い位置が、我々が発見した「灯心」ということになる。

もしも研究予算が増額されて、もう1台センサーを追加配備することが出来るならば、２台のセンサーをどのように置くべきか？　２台は、ある程度離れた位置に置き、互いに他方が強く働かないところをカバーし合うと良いだろう。しかし、両方とも三角形の辺に近いところではなく、ある程度、内部に置いた方が良いと予想される。

２台のセンサーの配置は2x2　＝　４次元の自由度がある。

ミニ・カミオカンデ（2体問題、多体問題）（続き）

　長方形の場合に同じ問題を考えると、対角線を4等分して、その1/4点と3/4点に２台を配置するのが最も効率がよい、と予想される。

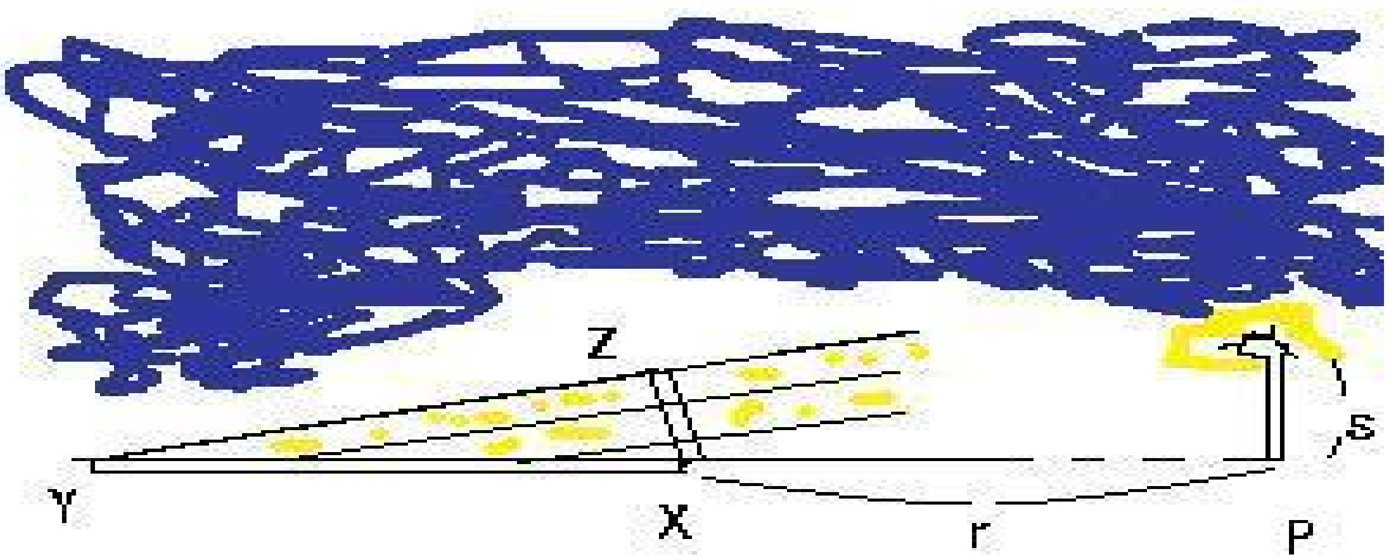
この問題を一般化して、n台のセンサーを置くとすれば、観測領域内にどのように配置したら最も効率的な検出装置になるか？という、n点の配置問題が考えられる。今後の検討課題である。

「明るさ」の第2の定義

高さ s の街灯が点 P の上に設置されているとき、P から距離 r だけ離れている地点 X における明るさは、地表面 Q 自身の明るさと定義する。
（福岡大学教授・田崎茂氏＝素粒子論物理学＝による定義）

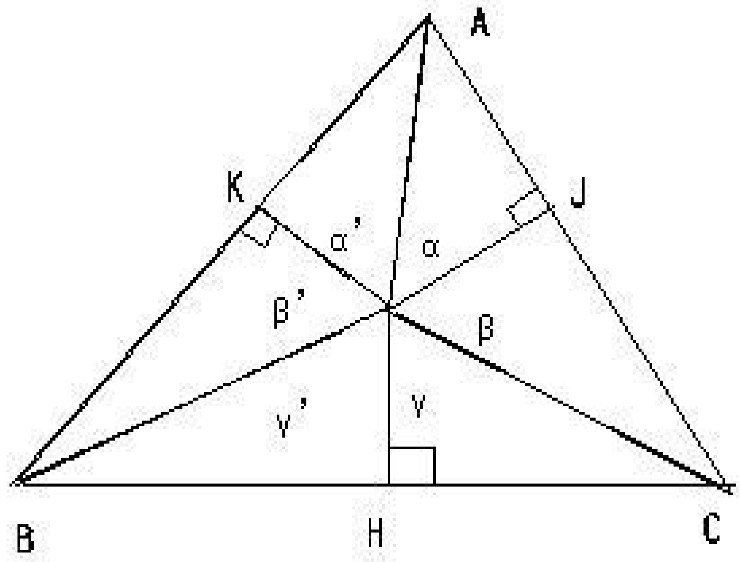
点 X の明るさ $f(r;s) = (\cos\angle YXZ)\cdot c/(s^2+r^2)$

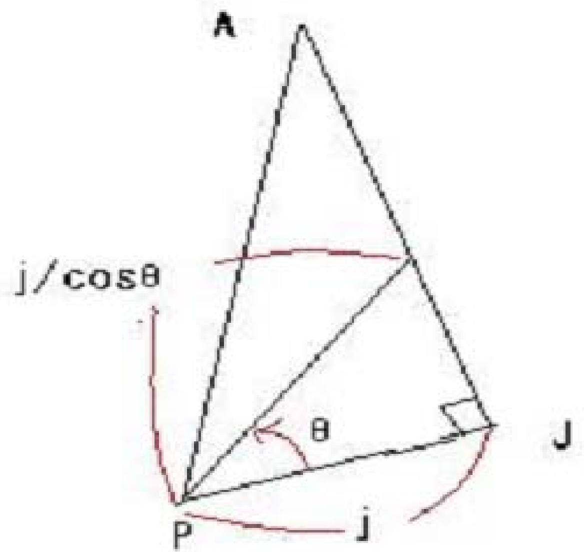
$= cs/(s^2+r^2)^{3/2}$ （c は r によらない正の定数）



街灯をどこに設置するか

各地点の明るさを三角形全体で積分する。





⊿ABC 内に任意の1点 P を固定して、ここに高さ s の街灯を立てたものとし、点 P から各辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれH, J, K とする。

積分計算の実行(1)

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{j/\cos\theta}\frac{cs}{(r^2+s^2)^{3/2}}r\,dr\,d\theta=\int_0^{\alpha}\left[\frac{-cs}{\sqrt{r^2+s^2}}\right]_0^{j/\cos\theta}d\theta$$

$$=-cs\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{(j/\cos\theta)^2+s^2}}-\frac{1}{s}\right)d\theta$$

$$=c\alpha-cs\int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{j^2+s^2\cos^2\theta}}$$

ここで、$x=\frac{s}{\sqrt{j^2+s^2}}\sin\theta$ と置くと

$$\int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{j^2+s^2-s^2\sin^2\theta}}$$

$$=\int_0^{\frac{s}{\sqrt{j^2+s^2}}\sin\alpha}\frac{\sqrt{j^2+s^2}}{s\sqrt{j^2+s^2}\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{s}\left[\arcsin x\right]_0^{\frac{s}{\sqrt{j^2+s^2}}\sin\alpha}=\frac{1}{s}\arcsin\left(\frac{s\sin\alpha}{\sqrt{j^2+s^2}}\right)$$

積分計算の実行（2）

故に、⊿APJ の上での f(r;s) の積分結果は

$$c\alpha - c\arcsin\left(\frac{s\sin\alpha}{\sqrt{j'^2 + s'^2}}\right)$$

となる。6個の直角三角形について足し合わせると、
⊿ABC 全体では、地表面の明るさの合計は

$$\begin{aligned} F(P,s) = 2\pi c - c\Big[&\arcsin\frac{s\sin\alpha}{\sqrt{j'^2+s'^2}} + \arcsin\frac{s\sin\beta}{\sqrt{j'^2+s'^2}} \\ &+ \arcsin\frac{s\sin\alpha'}{\sqrt{k'^2+s'^2}} + \arcsin\frac{s\sin\beta'}{\sqrt{k'^2+s'^2}} \\ &+ \arcsin\frac{s\sin\gamma}{\sqrt{h'^2+s'^2}} + \arcsin\frac{s\sin\gamma'}{\sqrt{h'^2+s'^2}}\Big] \end{aligned}$$

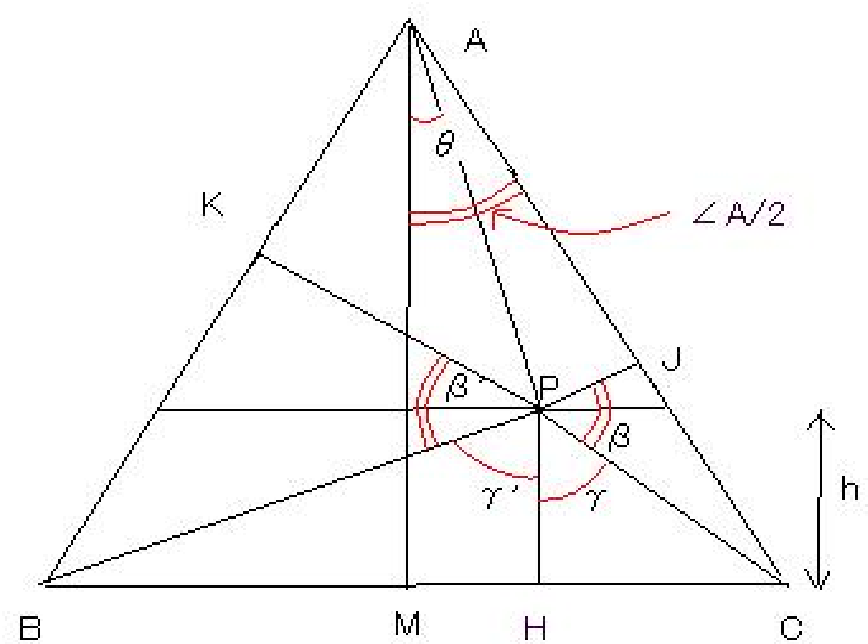
水平方向微分

地表面の明るさの合計 f(P;s) を θ = ∠DAP で微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{dF(P,s)}{d\theta} = -c\Bigl[& \frac{1}{\sqrt{1-s^2\sin^2\alpha/(j^2+s^2)}}\frac{d}{d\theta}\left(s\sin\alpha/\sqrt{j^2+s^2}\right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{1-s^2\sin^2\beta/(j^2+s^2)}}\frac{d}{d\theta}\left(s\sin\beta/\sqrt{j^2+s^2}\right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{1-s^2\sin^2\alpha'/(k^2+s^2)}}\frac{d}{d\theta}\left(s\sin\alpha'/\sqrt{k^2+s^2}\right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{1-s^2\sin^2\beta'/(k^2+s^2)}}\frac{d}{d\theta}\left(s\sin\beta'/\sqrt{k^2+s^2}\right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{1-s^2\sin^2\gamma/(h^2+s^2)}}\frac{d}{d\theta}\left(s\sin\gamma/\sqrt{h^2+s^2}\right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{1-s^2\sin^2\gamma'/(h^2+s^2)}}\frac{d}{d\theta}\left(s\sin\gamma'/\sqrt{h^2+s^2}\right)\Bigr]
\end{aligned}
$$

となる。

二等辺の場合の水平方向微分（1）



光源の足 P が底 BC に並行に移動して行く時の地表面⊿ABC の明るさ F(P;s) の変化を調べる。

垂線 PH の長さ h = 一定、として F(P;s) を $\theta = \angle MAP$ で微分する。前ページで計算した一般三角形での結果に |AB| = |AC| の条件を用いて式を簡略化する。

二等辺の場合の水平方向微分（2）

高さ s の位置にある光源を P* で表し、前々ページの微分結果を幾何学的に辺の長さや角の大きさで表して、表現式を簡単にして行くと、

$$
\begin{aligned}
&= -c\Big[\Big(\frac{s}{|AP^*|} + \frac{s\,|AJ|\,(|AM|-h)\cos(\angle A/2)}{|AP^*|\,|P^*J|^{2}\cos^{2}\theta}\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{s\cos\beta\sin(\beta-\angle A/2)}{|P^*C|\cos\theta\sin(\angle A/2-\theta)} + \frac{sj\sin\beta(|AM|-h)\cos(\angle A/2)}{|P^*C|\cos\beta\,|P^*J|^{2}\cos^{2}\theta}\Big) \\
&\quad - s\Big(\frac{1}{|AP^*|} + \frac{|AK|(|AM|-h)\cos(\angle A/2)}{|P^*A|\,|P^*K|^{2}\cos\theta}\Big) \\
&\quad - s\Big(\frac{\cos\beta\sin(\beta'-\angle A/2)}{|P^*B|\cos\theta\sin(\angle A/2+\theta)} + \frac{|BK|(|AD|-h)\cos(\angle A/2)}{|P^*B|\,|P^*K|^{2}\cos^{2}\theta}\Big) \\
&\quad - \frac{s\cos\gamma\,|AP|}{|P^*C|\,|PC|\cos\theta} + \frac{s(\cos\gamma')\,|AP|}{|BP^*|\,|BP|\cos\theta}\Big] \\
&= -c\Big[\frac{s(|AM|-h)\cos(\angle A/2)}{\cos^{2}\theta}\Big(\frac{|AJ|}{|P^*A|\,|P^*J|^{2}} + \frac{|CJ|}{|P^*C|\,|P^*J|^{2}} - \frac{|AK|}{|P^*A|\,|P^*K|^{2}} - \frac{|BK|}{|P^*B|\,|P^*K|^{2}}\Big) \\
&\quad + \frac{s\,|PA|\cos\gamma}{|P^*C|\,|PC|\cos\theta} - \frac{s\,|AP|\cos\gamma'}{|P^*B|\,|BP|\cos\theta} - \frac{s\,|AP|\cos\gamma}{|P^*C|\,|PC|\cos\theta} + \frac{s\,|PA|\cos\gamma'}{|P^*B|\,|BP|\cos\theta}\Big] \\
&= \frac{cs(|AM|-h)\cos(\angle A/2)}{\cos^{2}\theta}\Big(\frac{|AK|}{|P^*A|\,|P^*K|^{2}} + \frac{|BK|}{|P^*B|\,|P^*K|^{2}} - \frac{|AJ|}{|P^*A|\,|P^*J|^{2}} - \frac{|CJ|}{|P^*C|\,|P^*J|^{2}}\Big)
\end{aligned}
$$

前ページの式変形の最後の式を △ABC の図と良く見比べると、θ を $-\theta$ にすると、ちょうど対称軸 AM の左右に鏡像反転の関係になっていることが分かるから、

$$[dF/d\theta]_{[-\theta]} = -[dF/d\theta]_{[[\theta]}$$

であり、特に、

$$[dF/d\theta]_{[\theta=0]} = 0$$

である。 従って、dF(P;s) / d θ の正負の判定は $\theta > 0$ の範囲で考えれば十分であるが、上式の値が $\theta > 0$ の範囲で θ について単調減少な関数になっていることは、立体幾何の考察を用いて証明する

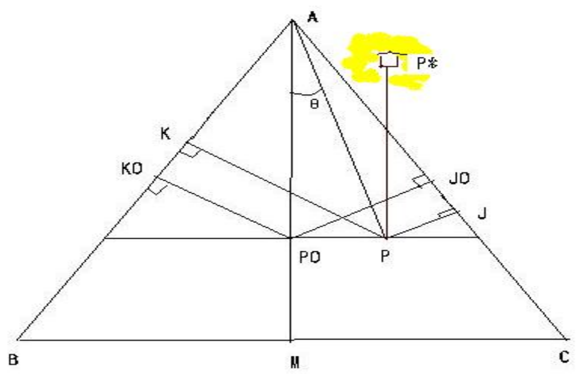
中心軸片側での単調性

前々ページで見たように、二等辺三角形において点Pに高さ s の光源を置いたときの地表面全体の明るさ F(P;s) を ∠MAP = θ で微分した dF(P;s)/dθ の正負は、

$$\frac{|AK|}{|P^*A||P^*K|^3}+\frac{|BK|}{|P^*B||P^*K|^3}-\frac{|AJ|}{|P^*A||P^*J|^3}-\frac{|CJ|}{|P^*C||P^*J|^3}$$

の正負と一致する。

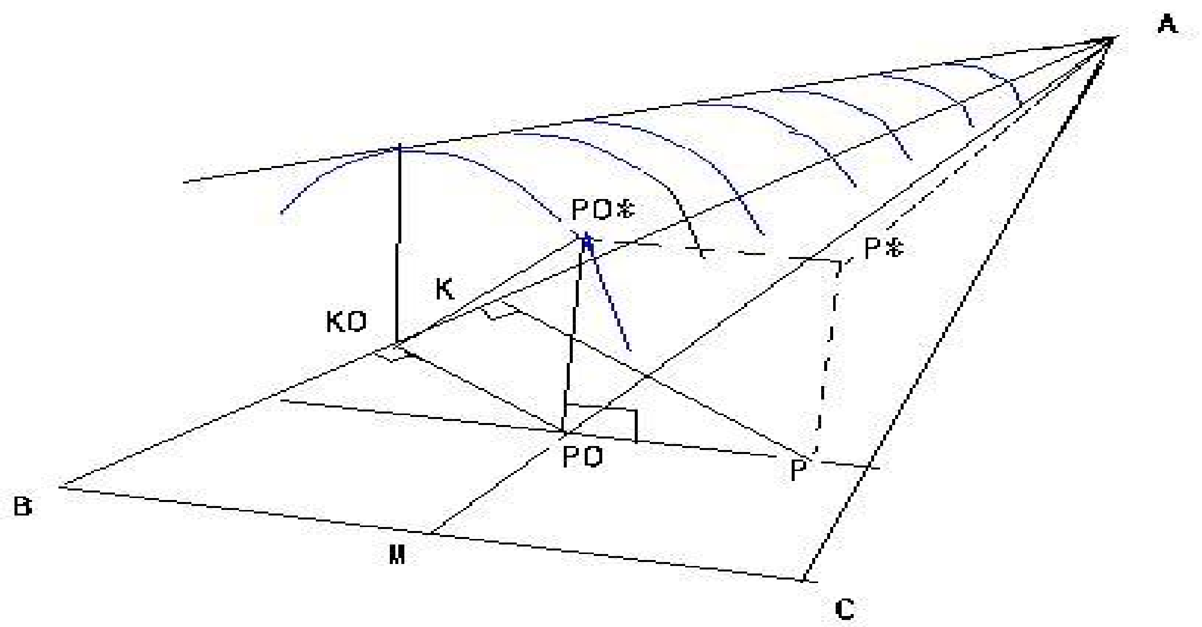
下図のように、θ = 0 の時の P, J, K の位置を、それぞれ P_0, J_0, K_0 として、P_0 上空の高さ s の位置を P_0^* で表す。



点 P から辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足 H, J, K は、「三垂線の定理」によって、上空の点 P* から
辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足にもなっている。

円錐の考察

下図のように、$\theta = 0$ の時の P, J, K の位置を、それぞれ P_0, J_0, K_0 として、P_0, P の上空の高さ s の位置を P_0*, P* で表す。 立体角 $\angle AP_0{}^*K_0$ と $\angle AP^*K$ の大きさを比較する。A を頂点として、AB を中心軸とし、$AP_0{}^*$ を稜とする円錐を考えると、点 P* はその円錐の外側にあるから、$\angle P^*AK > \angle P_0{}^*AK_0$ である。



水平方向偏微分式の証明

従って、$\angle AP^*K < \angle AP_0^*K_0$ である。故に、$\sin\angle AP^*K < \sin\angle AP_0^*K_0$ となり、$|AK|/|AP^*| < |AK_0|/|AP_0^*| = |AJ_0|/|AP_0^*|$ となる。

同様にして、$|AJ_0|/|AP_0^*| < |AJ|/|AP^*|$ が言えるから、

$|AK|/(|AP^*||P^*K|^2) < |AJ|/(|AP^*||P^*K|^2) < |AJ|/(|AP^*||P^*J|^2)$

となる。同様にして、$|BK|/(|BP^*||P^*K|^2) < |CJ|/(|CP^*||P^*J|^2)$が成り立つから、

結局

$$\frac{|AK|}{|P^*A||P^*K|^2}+\frac{|BK|}{|P^*B||P^*K|^2}-\frac{|AJ|}{|P^*A||P^*J|^2}-\frac{|CJ|}{|P^*C||P^*J|^2}$$

$$< 0$$

が成り立ち、$dF(P;s)/d\theta < 0 \ (0 < \theta)$ が証明できた。すなわち、光源を底辺 BC に並行に移動させると、中心軸 AM から離れるほど、地面を照らす効率を表す関数$F(P;s)$は単調に減少してゆく。つまり、中心軸上で最大値を取ることが確認できた。

従って、正三角形については、街灯の高さ s の値に関わりなく、次の結果が成り立つ。

【命題】正三角形の場合は、街灯の高さ s の値に関わりなく対称の中心に街灯を立てると、地表面をもっとも効率的に明るく照らすことができる。

二等辺三角形の立体灯心 L(s) の位置の範囲の確定

対称軸に沿って垂直方向に微分して、対称軸上で明るさの値が最大となる点を求めていく。この最大値を取る点の位置は高さ s に依存する可能性がある。従って、われわれは高さ s を固定したときの最大値を与える点を L(s) と書いて「高さ s のときの立体灯心」と呼ぶことにする。

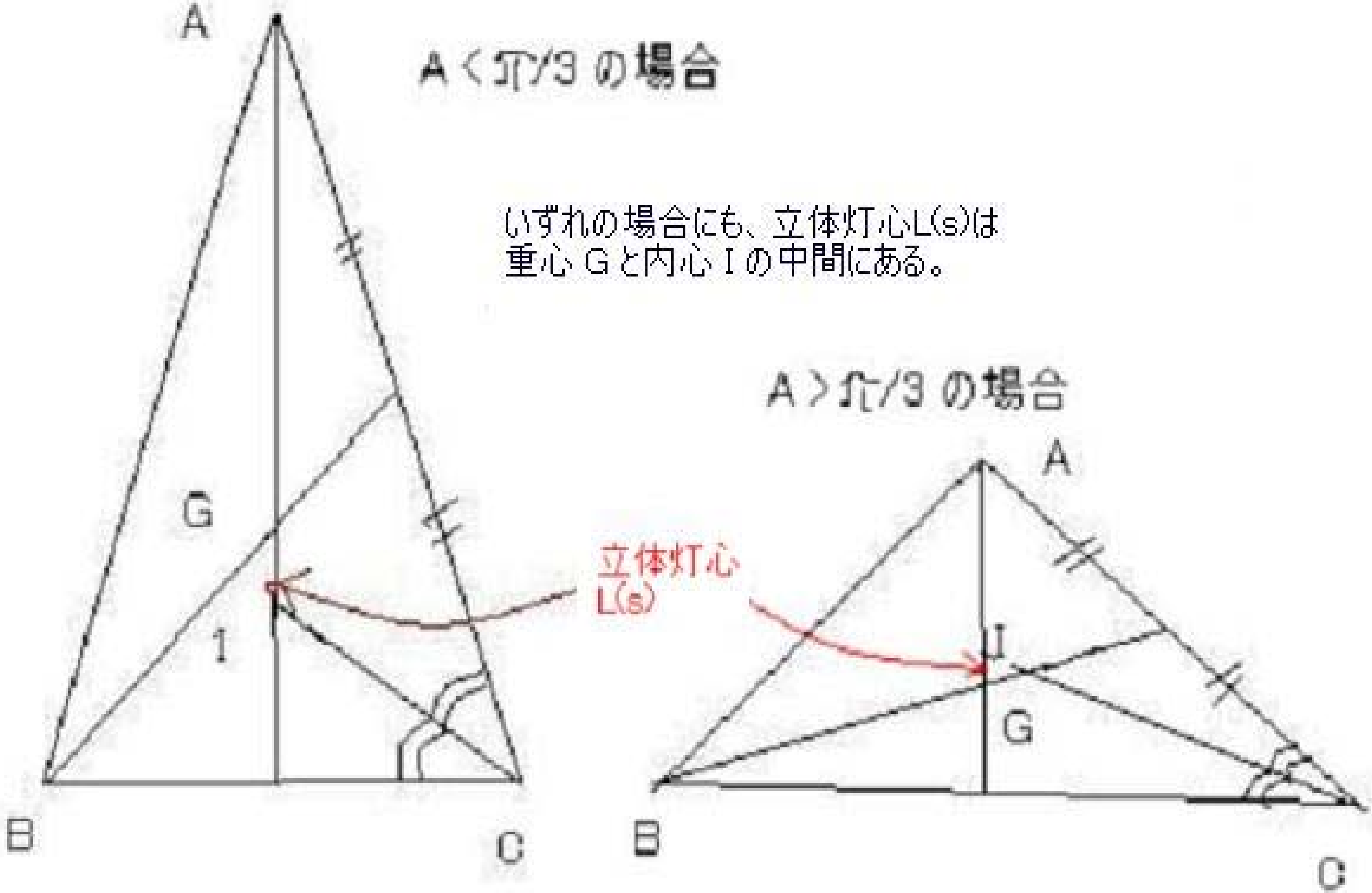
二等辺三角形の中心軸上では、明るさの積分値は式の対称性から

$$F(P;s) = 2\pi c - 2c\,[\arcsin\{(s\cdot\sin\alpha)/(j^2 + s^2)^{(1/2)}\} + \arcsin\{(s\cdot\sin\beta)/(j^2 + s^2)^{(1/2)}\} + \arcsin\{(s\cdot\sin\gamma)/(h^2 + s^2)^{(1/2)}\}]$$

となる。これを、頂点 A から点 P までの距離を t として ($0 \leqq t \leqq |AM|$) F(P;s) を t で微分する。「灯心」の計算でやったのと同様に、合成関数の微分法を用いるので、以下のデータを用意しておく。

$\alpha = \pi/2 - \angle A/2$; 定数。$j = t\cdot\sin(\angle A/2)$, $h\cdot\tan\gamma = |BM|$; 定数
$\beta = \pi/2 + \angle A/2 - \gamma$ だから、$d\alpha/dt = 0$, $dj/dt = \sin(\angle A/2) > 0$,
$d\gamma/dt = - d\beta/dt = \sin(\gamma)\cos(\gamma)/h = \sin(2\gamma)/2h > 0$.

これらを用いて計算してゆくと、


A
A < π/3 の場合
いずれの場合にも、立体灯心L(s)は
重心 Gと内心 I の中間にある。
G
I
立体灯心
L(s)
B
C
A > π/3 の場合
A
I
G
B
C

Mini-max問題としての「街灯」問題

●何を評価基準として街灯の位置を決めるか？

PISAによる基準

外接円の中心　=>　３つの頂点での明るさをぴったり同じにしたい。

（その説得的な理由付けはない。）

と最近まで決めつけていたが、川崎徹郎氏（学習院大学）から、「PISAの模範解答は、街灯問題をmini-max問題として考察している」と教えられた。

●なるほど、言われてみれば、納得した。　mini-max問題として考えると、光源を１つ設置したときに一番暗くなるのは3頂点のうちのどれかだから、街灯問題は、「与えられた3角形を内包する最小半径の円を求めよ」に帰着する。

●PISAの模範解答は、上の問題の自明な正解として、「その円の外接円である」と仮定して、説明している。

●この「自明な正解」は、実は正解ではない。鈍角３角形の場合には、最大辺の中点を中心とし、最大辺の長さの半分を半径とする円が本当の「正解」となる。

鋭角三角形のmini-max問題

［鍛冶静雄（福岡大学）による証明］

与えられた3角形の3頂点を中心として、等しい半径の3つの円を描く。最初は小さい半径の円を描き、次第に円の半径を大きくしていく。

はじめて、3円の共通部分が発生した瞬間の交点が求めるmini-max

問題の解である。鋭角3角形の場合には、この交点が外心であることが、背理法と中線連結定理を用いて初等的に証明される。

Remark: 最初に三角形の**外接円**を描いてしまうと、証明が進まなくなってしまい、**行き詰まる。**

A