完全数と友愛数 その一般化

巻之内健良

目的

完全数を求め，一般式で表す.

この研究では，完全数を求め，実際に書き出し規則性を見つけることで，完全数を一般式で表すことを目的としている.

また，完全数だけでなく友愛数についても同様の事を行う.

方法

N 自身を除く自然数 N の約数を求め，求めた約数の和を計算する．その和が N と一致すれば N は完全数である．この一聯の作業をプログラムを用いて繰り返し行う.

結果

■完全数の定義■

N が完全数とは，N 自身を除く正の約数の和が，N に等しい自然数のことである．

これは，約数の和が $2N$ になるともいいかえられる．

例． 6 **と** 28 **は完全数である．**

$N = 6$ のとき $1 + 2 + 3 = 6$

$N = 28$ のとき $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

偶数の完全数は，あるnがあり，$2^{n+1}-1$が素数で，
$N = (2^{n+1}-1)\cdot 2^n$と表される．

n番目の完全数を$S(n)$とすると，$S(n)$は以下の値になる．

$S(1) = 6$

$S(2) = 28$

$S(3) = 496$

$S(4) = 8128$

$S(5) = 33550336$

$S(6) = 8589869056$

$S(7) = 137438691328$

$S(8) = 2305843008139952128$

考察

■プログラムから完全数を求める■

まずN自身を除く自然数Nの約数を求める．

約数を求めるプログラム$yakus$を用いる．次に，求めた約数をリストの中に入れ，そのリストの和を求めるプログラム$bagof$，$sqrstlist$，$s(Z,W)$，$listsum$を用いる．その和がNと一致したら，Nは完全数であるということになる．

　このプログラムだと

```
s(100,W).W = 117
```

の様に，Z に数字を一つ一つ入れていかなければならない為，その数が完全数であるかということを判別するには有効であるが，完全数は何であるかということを判別することには適していない．

そこで，Z = 1から$s(Z,W)$を求めていくプログラムasa,
amaを利用する.
asa、amaを用いると,

```
Z = 6       Z = 28      Z = 496       Z = 8128
W = 6       W = 28      W = 496       W = 8128
Y = 6 ;     Y = 28 ;    Y = 496 ;     Y = 8128 ;
```

の様にZを求めることが出来る.

■完全数の一般化■

asa，ama に依り，N の値は 6, 28, 496, 8128 まで求まる．
これ以上求めようとするとあまりに時間がかかってしまうので，ここまで求めた N の値から完全数を一般化することにする．

$6 = 3 \cdot 2$

$28 = 7 \cdot 2^2$

$496 = 31 \cdot 2^4$

$8128 = 127 \cdot 2^6$

と素因数分解出来る．これを次のように変形すると，

$$6 = (2^2 - 1) \cdot 2$$
$$28 = (2^3 - 1) \cdot 2^2$$
$$496 = (2^5 - 1) \cdot 2^4$$
$$8128 = (2^7 - 1) \cdot 2^6$$

となる.

これより，8128の次にくる数は$(2^9 - 1) \cdot 2^8$即ち，130816が出てくることが考えられる.

しかし，その数が完全数であるかということを判別する $s(Z, W)$ を用いると

```
s(130816,W).
W = 171696
```

となり，$W \neq 130816$ なので $(2^9 - 1) \cdot 2^8$ は完全数ではない．

$N = (2^{b+1}-1)\cdot 2^b$は，$2^{b+1}-1$が素数なら完全数である．

ここで，$n = 2^{b+1}$とおいて，自然数の和$S = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$を利用すると

$$
\begin{aligned}
S = 1+2+3+\cdots+(2^{b+1}-1) &= \frac{1}{2}(2^{b+1}-1)\cdot 2^{b+1} \\
&= (2^{b+1}-1)\cdot 2^b \text{という関係がある．}
\end{aligned}
$$

$1+2+3 = 6$

$1+2+3+\cdots+7 = 28$

$1+2+3+\cdots+31 = 496$

$1+2+3+\cdots+127 = 8128$

$1+2+3+\cdots+8191 = 33550336$

■$N=(2^{n+1}-1)\cdot 2^n$から完全数を求める■

次に，プログラム$fate$を用いて完全数を求めていく．
$fate$で$B=F$となれば，Aは完全数である．

```
P = 1          P = 2
A = 6          A = 28
B = 3          B = 7
F = 3 ;        F = 7 ;
```

```
P = 4        P = 6        P = 12           P = 16
A = 496      A = 8128     A = 33550336     A = 8589869056
B = 31       B = 127      B = 8191         B = 131071
F = 31 ;     F = 127 ;    F = 8191 ;       F = 131071 ;

P = 18                 P = 30
A = 137438691328       A = 2305843008139952128
B = 524287             B = 2147483647
F = 524287 ;           F = 2147483647 ;
```

これより，完全数を求めることが出来た.

■友愛数の定義■

友愛数とは，異なる2つの自然数に於いて，それぞれの数自身を除いた約数の和が，互いの数と等しくなる数である．

つまり，自然数Nの約数の和を$\sigma(N)$，N自身を除いた約数の和を$\sigma_0(N)$とした時,

$\sigma_0(n)=m$，$\sigma_0(m)=n$**を満たす数**$(m,n)(\neq(0,0), m\neq n)$**を友愛数という．**

このとき，$\sigma(m)=m+n$である．

例．220 と 284 は友愛数である

$\sigma_0(220) = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$

$\sigma_0(284) = 1+2+4+71+142 = 220$

となり、220 と 284 は友愛数である.

■プログラムを用いて友愛数を求める■

友愛数を求める為にプログラム$s(N,W)$を用いて，N自身を除く自然数Nの約数の和を計算する．自然数1から20000までの友愛数を求める為に$nerin$を使う.

```
N = 220      N = 284       N = 1184     N = 1210
W = 284      W = 220       W = 1210     W = 1184
H = 220 ;    H = 284 ;     H = 1184 ;   H = 1210 ;

N = 2620      N = 2924     N = 5020     N = 5564
W = 2924      W = 2620     W = 5564     W = 5020
H = 2620 ;    H = 2924 ;   H = 5020 ;   H = 5564 ;
```

```
N = 6232      N = 6368      N = 10744      N = 10856
W = 6368      W = 6232      W = 10856      W = 10744
H = 6232 ;    H = 6368 ;    H = 10744 ;    H = 10856 ;

N = 12285     N = 14595      N = 17296      N = 18416
W = 14595     W = 12285      W = 18416      W = 17296
H = 12285 ;   H = 14595 ;    H = 17296 ;    H = 18416 ;
```

となり, (m,n)の組は
(220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368),
(10744, 10856), (12285, 14595), (17296, 18416)となる.

■友愛数の求め方■

①二行目に2の冪乗を書く

②三行目に、二行目をそれぞれ三倍した数を書く

③一行目に、三行目の数からそれぞれ1を引いた数を書く

$$\begin{array}{cccccccc} 5 & 11 & 23 & 47 & 95 & 191 & \cdots \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & \cdots \\ 6 & 12 & 24 & 48 & 96 & 192 & \cdots \end{array}$$

一行目をp_n，二行目をr_n,三行目をs_n，四行目をq_nとし,
四行目に$s_n s_{n+1} - 1$を計算した値を書いていく.

p_n	5	11	23	47	95	191	$\cdots$
r_n	2	4	8	16	32	64	$\cdots$
s_n	6	12	24	48	96	192	$\cdots$
q_n		71	287	1151	4607	18431	$\cdots$

$q_1 = 6 \cdot 12 - 1 = 71$, $q_2 = 12 \cdot 24 - 1 = 287$といった様に求める.

　ここで,

$p_n = 3 \cdot 2^n - 1$, $r_n = 2^n$, $s_n = 3 \cdot 2^n$, $q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ と表せ,

$M = p_n p_{n-1} r_n$, $N = r_n q_n$

つまり, $M = 2^n p_{n-1} p_n$, $N = 2^n q_n$ **とする．**

$n \geq 2$ で, p_n **と** q_n **が素数の時，** M **と** N **は友愛数になる．**

■上記の方法からプログラムで友愛数を求める■

```
N = 1      N = 2        N = 4
P = 5      P = 11       P = 47
Q = 17     Q = 71       Q = 1151
L = 20     L = 220      L = 17296
M = 34 ;   M = 284 ;    M = 18416 ;
N = 7                N = 11
P = 383              P = 6143
Q = 73727            Q = 18874367
L = 9363584          L = 38635833344
M = 9437056 ;        M = 38654703616 ;
```

これより，(220, 284), (17296, 18416), (9363584, 9437056), (38635833344, 38654703616) が友愛数として求められた．

感想

完全数・友愛数を一般化しようとしてきたが，これだけでは拾いきれない数もあった。
例えば，**友愛数に於いて(220, 284)は先程の式で表すことが出来るが，(5020, 5564)は表すことが出来ない．**ということは，この式では全ての友愛数を求めることが出来ない．**「友愛数はこの形に限る」という様なことまで至らなかった．**時間がかかろうとも逐次的に求めていくしかないのであろうか．