第2種Euler超完全数(改訂版)

宮本憲一

2024年5月1日

乗数 h 付きの平行移動 m の第2種Euler超完全数
h を奇素数とする。$a=h2^e$ とすれば $\varphi(a)=(h-1)2^{e-1}$ より $2\varphi(a)=(h-1)2^e$.
さらに両辺に h をかければ $2h\varphi(a)=(h-1)h2^e=(h-1)a$.
そこで $A=2h\varphi(a)+m+1=(h-1)a+m+1$ を素数と仮定すれば
$A=2h\varphi(a)+m+1,\varphi(A)=(h-1)a+m$
という二つの式に書ける。
ここで今までの議論を忘却の彼方に忘れつぎの二つの式を定義する。
定義)
$A=2h\varphi(a)+m+1,\varphi(A)=(h-1)a+m$
をみたす a を乗数 h 付き平行移動 m の第2種Euler超完全数といい、A をそのパートナーという。

(命題1)
$a=h^\eta 2^\epsilon(\eta,\epsilon>0)$ ならば $2h\varphi(a)=(h-1)a$
(命題2)
$2h\varphi(a)=(h-1)a$ ならば $a=h^\eta 2^\epsilon$
(証明) h と $h-1$ は互いに素より $a=h^\eta L$ よって $2(h-1)h^\eta\varphi(L)=(h-1)h^\eta L$.
$2\varphi(L)=L$ よって $L=2^\epsilon.a=h^\eta 2^\epsilon$

$h^\eta 2^\epsilon$ を $(2,h)$ の複冪という.

(命題3)
第2種Euler完全数において a が複冪となる条件は A が素数.
(証明) a が複冪ならば $2h\varphi(a)=(h-1)a$ よって $\varphi(A)=(h-1)a+m=2h\varphi(a)+m=A-1$

(命題4)
A:素数となることと $a=2^eh^f$ は同値.

ここで $h=3$ として m を動かしてみよう
定義式は
$A=6\varphi(a)+m+1$,$\varphi(A)=2a+m$
になる。

表 1: $h=3$,$m=0$

a	素因数分解	A	素因数分解
6	$2*3$	13	13
10	$2*5$	25	5^2
18	$2*3^2$	37	37
36	2^2*3^2	73	73
48	2^4*3	97	97
54	$2*3^3$	109	109
56	2^3*7	145	5*29
96	2^5*3	193	193
216	2^3*3^3	433	433
288	2^5*3^2	577	577
384	2^7*3	769	769
576	2^6*3^2	1153	1153
648	2^3*3^4	1297	1297
650	$2*5^2*13$	1441	11*131
1296	2^4*3^4	2593	2593
1458	$2*3^6$	2917	2917
1728	2^6*3^3	3457	3457

表 2: $h=3,m=2$

a	素因数分解	A	素因数分解
2	2	9	3^2
3	3	15	3*5
8	2^3	27	3^3
15	3*5	51	3*17
111	3*37	435	3*5*29
207	3^2*23	795	3*5*53
255	3*5*17	771	3*257
1295	5*7*37	5187	3*7*13*19
1455	3*5*97	4611	3*29*53
14127	3*17*277	52995	3*5*3533
15087	3*47*107	58515	3*5*47*83
15615	$3^2*5*347$	49827	3*17*977
17151	3*5717	68595	3*5*17*269
40239	$3^2*17*263$	150915	3*5*10061
65535	3*5*17*257	196611	3*65537

$h=3,m=2$ を定義式に代入して
(1)$A=6\varphi(a)+3$,(2)$\varphi(A)=2a+2$
A は 3 の倍数.$A=3^eL(e>0,L$ は 3 の倍数でない) と書ける。
(3)$3^{e-1}L=2\varphi(a)+1$,(4)$3^{e-1}\varphi(L)=a+1$
a を偶数と仮定する.$a=2^fM,(f>0,M$ は 2 で割れない)
(3)(4) に代入して
(5)$3^{e-1}L=2^f\varphi(M)+1$,(6)$3^{e-1}\varphi(L)=2^fM+1$.
(5)(6) によって $3^{e-1}co\varphi(L)+2^fco\varphi(M)=0$
よって $L=M=1$.
(5) により $3^{e-1}=2^f+1$.
よって,(a)$e=2,f=1(a=2,A=9=3^2)$,(b)$e=3,f=2(a=2^3,A=3^3)$.

表 3: $h = 3, m = 4$

a	素因数分解	A	素因数分解
6	$2 * 3$	17	17
12	$2^2 * 3$	29	29
18	$2 * 3^2$	41	41
22	$2 * 11$	65	5*13
24	$2^3 * 3$	53	53
28	$2^2 * 7$	77	7*11
48	$2^4 * 3$	101	101
54	$2 * 3^3$	113	113
72	$2^3 * 3^2$	149	149
82	$2 * 41$	245	$5 * 7^2$
96	$2^5 * 3$	197	197
144	$2^4 * 3^2$	293	293
192	$2^6 * 3$	389	389
324	$2^2 * 3^4$	653	653
384	$2^7 * 3$	773	773
486	$2 * 3^5$	977	977

表 4: $h = 3$,$m = 6$

a	素因数分解	A	素因数分解
6	$2 * 3$	19	19
12	$2^2 * 3$	31	31
18	$2 * 3^2$	43	43
36	$2^2 * 3^2$	79	79
48	$2^4 * 3$	103	103
72	$2^3 * 3^2$	151	151
96	$2^5 * 3$	199	199
108	$2^2 * 3^3$	223	223
162	$2 * 3^4$	331	331
216	$2^3 * 3^3$	439	439
648	$2^3 * 3^4$	1303	1303
768	$2^8 * 3$	1543	1543
972	$2^2 * 3^5$	1951	1951
1152	$2^7 * 3^2$	2311	2311
1536	$2^9 * 3$	3079	3079
1728	$2^6 * 3^3$	3463	3463
2916	$2^2 * 3^6$	5839	5839
3072	$2^{10} * 3$	6151	6151

$h=3$,m が正の奇数のとき解 a,A は存在しない。

証明）

$m=2k-1$ とすると $k\geq 0$ となり $A>2$. よって $\varphi(A)$ は偶数.$2a$ は偶数. ところが $2k-1$ が奇数で矛盾.

(負の奇数のときも同様）

拡張して h : 奇素数のときも $(h-1)$: 偶数より m が奇数のとき解 a,A は存在しない。

$h=3$,$m=8$ のとき解 a,A は存在しない。

証明）

$A=6\varphi(a)+9$,$\varphi(A)=2a+8$

a は偶数より $a=2^eL$(L は奇数) とかける。上式に代入すると

$A=3*2^e\varphi(L)+9$,$\varphi(A)=2*2^eL+8$

A は 3 の倍数より $A=3^fM$(M は 2,3 の倍数でない) とかける。これを上式に代入すると

$3^{f-1}M=2^e\varphi(L)+3$,$3^{f-1}\varphi(M)=2^eL+4$

$3^{f-1}co\varphi(M)+2^eco\varphi(L)=-1$ より矛盾.

表 5: $h = 3, m = -4$

a	素因数分解	A	素因数分解
8	2^3	21	3*7
32	2^5	93	3*31
128	2^7	381	3*127
8192	2^{13}	24573	3*8191
131072	2^{17}	393213	3*131071

$A = 6\varphi(a) - 3, \varphi(A) = 2a - 4$
A は 3 の倍数より $A = 3^f M$,(M は 3 の倍数でない)
$3^f M = 6\varphi(a) - 3$ より $3^{f-1}M = 2\varphi(a) - 1$
$2 * 3^{f-1}\varphi(M) = 2a - 4$ より $3^{f-1}\varphi(M) = a - 2$
a)$M > 2$ のとき $\varphi(M)$ は偶数. よって a は偶数, したがって $a = 2^e L$（L は奇数）
$3^{f-1}co\varphi(M) + 2^e co\varphi(L) = 1$
$f = 1$ で $M = p, L = 1$ よって $a = 2^e, A = 3p$.
$3^{f-1}p = 2^e - 1, f = 1$ とり $p = 2^e - 1$(メルセンヌ素数)
b)$M = 1$ のとき $A = 3^f, 3^{f-1} = 2\varphi(a) - 1$.
$\varphi(A) = 2 * 3^{f-1} = 2a - 4$ ゆえに $3^{f-1} = a - 2$
よって $2\varphi(a) - 1 = a - 2, a - 2\varphi(a) = 1$.
このとき解はないと思われる.
c)$M = 2$ のとき $A = 2 * 3^f, 3^{f-1}M = 3^{f-1}2 = 2\varphi(a) - 1$. 左辺は偶数. 右辺は奇数より矛盾.
（定理）
$A = 6\varphi(a) - 3, \varphi(A) = 2a - 4$ を満たす解は $A = 3p, a = 2^e, p = 2^e - 1$:メルセンヌ素数 $(e \neq 2)$
(宮本憲一、タジミハル)
$A = 3p, a = 2^e, p = 2^e - 1 (e \neq 2)$:メルセンヌ素数と仮定すると,$A = 6\varphi(a) - 3, \varphi(A) = 2a - 4$ を満たす解
を容易にしめすことができる。

この結果は一般の奇素数 h のとき $m=-(h-1)^2$ で成り立つタジミハルの定理.

表 6: $h=5$,$m=-16$

a	素因数分解	A	素因数分解
16	2^4	65	5*13
32	2^5	145	5*29
64	2^6	305	5*61
512	2^9	2545	5*509
1024	2^{10}	5105	5*1021
4096	2^{12}	20465	5*4093
16384	2^{14}	81905	5*16381

表 7: $h=7$,$m=-36$

a	素因数分解	A	素因数分解
8	2^3	21	3*7
16	2^4	77	7*11
64	2^6	413	7*59
256	2^8	1757	7*251
1024	2^{10}	7133	7*1019
4096	2^{12}	28637	7*4091

表 8: $h=11$,$m=-100$

a	素因数分解	A	素因数分解
16	2^4	77	7*11
32	2^5	253	11*23
512	2^9	5533	11*503
2048	2^{11}	22429	11*2039

$A=2h\varphi(a)+m+1$,$\varphi(A)=(h-1)a+m$............(*)
に対して $a=2^e p$,$A=h^f Q$ となるような m を決定する.(タジミハル)

定義式に代入して
$h^f Q=2h\varphi(2^e p)+m+1$,$\varphi(h^f Q)=(h-1)2^e p+m$
$m=h^f Q-2^e h(p-1)-1$,$m=(h-1)h^{f-1}(Q-1)-(h-1)2^e p$
$hm=(h-1)h^f(Q-1)-(h-1)h2^p$
$(h-1)m=(h-1)h^f Q-2^e h(h-1)(p-1)-(h-1)$
より
$m=-(h-1)h^f-2^e h(h-1)+(h-1)$

この式を (*) に代入し $A=h^f L$(L は h で割れない) とすると
$h^f L=2h\varphi(a)-(h-1)h^f-2^e h(h-1)+h$........(1)
$(h-1)h^{f-1}\varphi(L)=(h-1)a-(h-1)h^f-2^e h(h-1)+(h-1)$
$h^{f-1}\varphi(L)=a-h^f-2^e h+1$...............(2)
よって $a=2^e M$(M は奇数) とおける。(1),(2) に代入すると
$h^f L=h*2^e\varphi(M)-(h-1)h^f-2^e h(h-1)+h$
$h^{f-1}L=2^e\varphi(M)-(h-1)h^{f-1}-2^e(h-1)+1$
$h^{f-1}\varphi(L)=2^e M-h^f-2^e h+1$
よって $h^{f-1}co\varphi(L)+2^e co\varphi(M)=-(h-1)h^{f-1}-2^e(h-1)+h^f+2^e h$
$=-h^f+h^{f-1}-2^e h+2^e+h^f+2^e h=h^{f-1}+2^e$

$h^{\eta-1}co\varphi(L)+2^\epsilon co\varphi(M)=h^{\eta-1}+2^\epsilon$
よって $co\varphi(L)=co\varphi(M)=1$ のとき上式が成り立つ。
このとき $M=p$,$L=Q$ より $a=2^\epsilon p$,$A=h^\eta Q$
しかしながら上式が成り立つからといって結果がこのようになるとは限らないことに注意する。

表 9: $h = 3$,$m = -16$

a	素因数分解	A	素因数分解
14	2*7	21	3*7
26	2*13	57	3*19
38	2*19	93	3*31
74	2*37	201	3*67
86	2*43	237	3*79
128	2^7	369	$3^2 * 41$
134	2*67	381	3*127
146	2*73	417	3*139
158	2*79	453	3*151
206	2*103	597	3*199
218	2*109	633	3*211
278	2*139	813	3*271
314	2*157	921	3*307
386	2*193	1137	3*379
446	2*223	1317	3*439

$A = 2h\varphi(a) + m + 1$ より $A = 6\varphi(a) - 15$ より $A = 3^e L$(L は 3 の倍数でない)
$3^{e-1}L = 2\varphi(a) - 5$
$\varphi(A) = 2a - 16$ で $A > 2$ より $a = 2^f M$(M は奇数) $2 * 3^{e-1}\varphi(L) = 2a - 16$,
$3^{e-1}\varphi(L) = a - 8$
よって $3^{e-1}L = 2^f\varphi(M) - 5$、$3^{e-1}\varphi(L) = 2^f M - 8$.
$3^{e-1}co\varphi(L) + 2^f co\varphi(M) = 3$ よって $e = 1$,$f = 1$ で $co\varphi(L) = co\varphi(M) = 1$.
$M = p$,$L = Q$ で $a = 2p$,$A = 3Q$ このとき $Q = 2p - 7$(スーパー双子素数).
$e = 2$,$co\varphi(L) = 1$ より $L = Q$,$co\varphi(M) = 0$ より $M = 1$ よって $a = 2^f$,$A = 3^2 Q$.
$A = 6\varphi(2^f) - 15$,$3^2 Q = 3 * 2\varphi(2^f) - 15$,$3^2 Q = 3 * 2^f - 15$,$3Q = 2^f - 5$.(例,$Q = 41$,$f = 7$ など)

表 10: $h=3,m=-28$

a	素因数分解	A	素因数分解
20	2^2*5	21	3*7
26	2*13	45	3^2*5
44	2^2*11	93	3*31
62	2*31	153	3^2*17
92	2^2*23	237	3*79
116	2^2*29	309	3*103
122	2*61	333	3^2*37
134	2*67	369	3^2*41
164	2^2*41	453	3*151
194	2*97	549	3^2*61
212	2^2*53	597	3*199
236	2^2*59	669	3*223
278	2*139	801	3^2*89
284	2^2*71	813	3*271
302	2*151	873	3^2*97
314	2*157	909	3^2*101
422	2*211	1233	3^2*137

$A=6\varphi(a)-27,\varphi(A)=2a-28$

$A=3^eL$(L は 3 で割れない）$A>2$ より $\varphi(A)$ は偶数, よって $a=2^fM$(M は奇数) と書ける。

$3^eL=3*2^f\varphi(M)-27,2*3^{e-1}\varphi(L)=2^{f+1}M-28.$

$3^{e-1}L=2^f\varphi(M)-9,3^{e-1}\varphi(L)=2^fM-14$

よって $3^{e-1}co\varphi(L)+2^fco\varphi(M)=5$

この場合次の 1),2) しか成り立たない。

1)$co\varphi(L)=co\varphi(M)=1,e=2,f=1$

より $a=2p,A=3^2Q$

定義式に代入して $3^2Q=6(p-1)-27=6p-33,3Q=2p-11$（素数共鳴）

2)$co\varphi(L)=co\varphi=1,e=1,f=2$

より $a=2^2p,A=3Q$

定義式に代入して $3Q=6*2(p-1)-27=12p-39,Q=4p-13$（スーパー双子素数)

表 11: $h=3$,$m=-52$

a	素因数分解	A	素因数分解
56	2^3*7	93	3*31
104	2^3*13	237	3*79
152	2^3*19	381	3*127
248	2^3*31	669	3*223
296	2^3*37	813	3*271
488	2^3*61	1389	3*463
632	2^3*79	1821	3*607
776	2^3*97	2253	3*751
1016	2^3*127	2973	3*991
1112	2^3*139	3261	3*1087
1256	2^3*157	3693	3*1231
1304	2^3*163	3837	3*1279
1448	2^3*181	4269	3*1423

$A=6\varphi(a)-51$,$\varphi(A)=2a-52$
$A=3^eL$(L は 3 で割れない),$A>2$ より $a=2^fM$(M は奇数で 3 でも割れない)
$3^{e-1}L=2^f\varphi(M)-17$,$3^{e-1}\varphi(L)=2^f-26$
よって $3^{e-1}co\varphi(L)+2^fco\varphi(M)=9$
$e=1$,$f=3$,$co\varphi(L)=co\varphi(M)=1$ の場合以外ない。
$a=2^3p$,$A=3Q$ これを定義式に代入して $3Q=6*2^2(p-1)-51=24p-75$,$Q=8p-25$(スーパー双子素数)

表 12: $h=3,m=-100$

a	素因数分解	A	素因数分解
80	2^4*5	93	3*31
98	$2*7^2$	153	3^2*17
104	2^3*13	189	3^3*7
176	2^4*11	381	3*127
248	2^3*31	621	3^3*23
272	2^4*17	669	3*223
656	2^4*41	1821	3*607
1136	2^4*71	3261	3*1087
1328	2^4*83	3837	3*1279
1544	2^3*193	4509	3^3*167
1616	2^4*101	4701	3*1567

$A=6\varphi(a)-99,\varphi(A)=2a-100$
上式に $A=3^eL$（L は 3 の倍数でない）を代入して
$3^eL=6\varphi(a)-99,2*3^{e-1}\varphi(L)=2a-100$
$3^{e-1}L=2\varphi(a)-33,3^{e-1}\varphi(L)=a-50$ より $a=2^fM(M$ は奇数）
$3^{e-1}L=2^f\varphi(M)-33,3^{e-1}\varphi(L)=2^fM-50$
$3^{e-1}co\varphi(L)+2^fco\varphi(M)=17$
1)$e=1,f=4$ で $a=2^4p,A=3Q$ このとき $Q=16p-49$（スーパー双子素数）
または
2)$e=3,f=3$ で $a=2^3p,A=3^3Q$ このとき $9Q=8p-41$（素数共鳴）
例外として $a=2*7^2,A=3^2*17$ も解.（$f=1,co\varphi(M)=co\varphi(7^2)=49-6*7=7$)
$(e=2,co\varphi(L)=co\varphi(17)=1)$

表 13: $h=3$,$m=-196$

a	素因数分解	A	素因数分解
110	2*5*11	45	3^2*5
224	2^5*7	381	3*127
314	2*157	741	3*13*19
1184	2^5*37	3261	3*1087
1376	2^5*43	3837	3*1279
2336	2^5*73	6717	3*2239
3488	2^5*109	10173	3*3391
4064	2^5*127	11901	3*3967
5216	2^5*163	15357	3*5119
6176	2^5*193	18237	3*6079
6368	2^5*199	18813	3*6271
7136	2^5*223	21117	3*7039

$A=6\varphi(a)-195$,$\varphi(A)=2a-196$
$A=3^eL$(L は 3 の倍数でない）と書ける。
$3^{e-1}L=2\varphi(a)-65$,$3^{e-1}\varphi(L)=a-98$
$a=2^fM$（M は奇数）と書ける。
$3^{e-1}L=2^f\varphi(M)-65$,$3^{e-1}\varphi(L)=2^fM-98$
$3^{e-1}co\varphi(L)+2^fco\varphi(M)=33$
$e=1$,$f=5$ で $a=2^5p$,$A=3Q$ このとき $Q=32p-97$（スーパー双子素数）
例外）$a=2*5*11$,$A=3^2*5$: ($f=1$,$co\varphi(M)=co\varphi(55)=55-\varphi(11*5)=15$
$e=2$,$co\varphi(L)=co\varphi(5)=1$)
$a=2*157$,$A=3*13*19$:($f=1$,$co\varphi(M)=co\varphi(157)=1$
$e=1$,$co\varphi(L)=co\varphi(13*19)=21$

表 14: $h=3$,$m=-388$

a	素因数分解	A	素因数分解
320	2^6*5	381	3*127
386	2*193	765	3^2*5*17
392	2^3*7^2	621	3^3*23
494	2*13*19	909	3^2*101
1472	2^6*23	3837	3*1279
1856	2^6*29	4989	3*1663
1922	$2*31^2$	5193	3^2*577
3776	2^6*59	10749	3*3583
5312	2^6*83	15357	3*5119
5696	2^6*89	16509	3*5503
6464	2^6*101	18813	3*6271
7232	2^6*113	21117	3*7039
8384	2^6*131	24573	3*8191
9536	2^6*149	28029	3*9343

$A=6\varphi(a)-387$,$\varphi(A)=2a-388$

$A=3^eL$（L は 3 の倍数でない）と書ける。

$3^{e-1}L=2\varphi(a)-129$,$3^{e-1}\varphi(L)=a-194$

$a=2^fM$（M は奇数）と書ける。

$3^{e-1}L=2^f\varphi(M)-129$,$3^{e-1}\varphi(L)=2^fM-194$

$3^{e-1}co\varphi+2^fco\varphi(M)=65$

$e=1$,$f=6$ で $a=2^6p$,$A=3Q$ このとき $Q=64p-193$（スーパー双子素数）

例外）$a=2*193$,$A=3^2*5*17$：$(f=1$,$co\varphi(193)=1$,$e=2$,$co\varphi(5*17)=5*17-4*16=21)$

$a=2^3*7^2$,$A=3^3*23$:$(f=3$,$co\varphi(7^2)=49-42=7$,$e=3$,$co\varphi(23)=1)$

$a=2*31^2$,$A=3^2*577$:$(f=1$,$co\varphi(31^2)=961-930=31$,$e=2$,$co\varphi(577)=1)$

表 15: $h = 3, m = -40$

a	素因数分解	A	素因数分解
68	$2^2 * 17$	153	$3^2 * 17$
236	$2^2 * 59$	657	$3^2 * 73$
284	$2^2 * 71$	801	$3^2 * 89$
356	$2^2 * 89$	1017	$3^2 * 113$
428	$2^2 * 107$	1233	$3^2 * 137$
596	$2^2 * 149$	1737	$3^2 * 193$
716	$2^2 * 179$	2097	$3^2 * 233$
788	$2^2 * 197$	2313	$3^2 * 257$
956	$2^2 * 239$	2817	$3^2 * 313$
1028	$2^2 * 257$	3033	$3^2 * 337$
1076	$2^2 * 269$	3177	$3^2 * 353$
1244	$2^2 * 311$	3681	$3^2 * 409$
1388	$2^2 * 347$	4113	$3^2 * 457$
1724	$2^2 * 431$	5121	$3^2 * 569$
1796	$2^2 * 449$	5337	$3^2 * 593$
1868	$2^2 * 467$	5553	$3^2 * 617$
2036	$2^2 * 509$	6057	$3^2 * 673$
2588	$2^2 * 647$	7713	$3^2 * 857$

$A = 6\varphi(a) - 39, \varphi(A) = 2a - 40$

$A = 3^e L$(L は 3 の倍数ではない),$A > 2$ より $\varphi(A)$ は偶数, よって $a = 2^f M$(M は奇数) と書ける。

$3^e L = 3 * 2^f \varphi(M) - 39, 2 * 3^{e-1}\varphi(L) = 2^{f+1}M - 40.$

$3^{e-1}L = 2^f \varphi(M) - 13, 3^{e-1}\varphi(L) = 2^f M - 20$

よって $3^{e-1}co\varphi(L) + 2^f co\varphi(M) = 7$

$e = 2, f = 2, co\varphi(L) = co\varphi(M) = 1$ の場合しかない。

$a = 2^2 p, A = 3^2 Q$ これを定義式に代入して $3^2 Q = 6\varphi(2^2 p) - 39 = 6 * 2(p-1) - 39, 3Q = 4p - 17$(素数共鳴)

表 16: $h = 3$,$m = -64$

a	素因数分解	A	素因数分解
50	$2 * 5^2$	57	3*19
86	2*43	189	$3^3 * 7$
122	2*61	297	$3^3 * 11$
152	$2^3 * 19$	369	$3^2 * 41$
194	2*97	513	$3^3 * 19$
248	$2^3 * 31$	657	$3^2 * 73$
296	$2^3 * 37$	801	$3^2 * 89$
302	2*151	837	$3^3 * 31$
446	2*223	1269	$3^3 * 47$
554	2*277	1593	$3^3 * 59$
626	2*313	1809	$3^3 * 67$
662	2*331	1917	$3^3 * 71$
734	2*367	2133	$3^3 * 79$
872	$2^3 * 109$	2529	$3^2 * 281$
1202	2*601	3537	$3^3 * 131$
1256	$2^3 * 157$	3681	$3^2 * 409$
1382	2*691	4077	$3^3 * 151$
1592	$2^3 * 199$	4689	$3^2 * 521$

$A = 6\varphi(a) - 63$,$\varphi(A) = 2a - 64$
$A = 3^e L$(L は 3 の倍数でない）$A > 2$ より $\varphi(A)$ は偶数。よって a は偶数。
したがって $a = 2^f M$(M は 2,3 の倍数でない）と書ける。
定義式に代入して $3^L = 6 * 2^{f-1}\varphi(M) - 63$,$2 * 3^{e-1}\varphi(L) = 2^{f+1}M - 64$.
整理して $3^{e-1}L = 2^f\varphi(M) - 21$,$3^{e-1}\varphi(L) = 2^f M - 32$.
以上より $3^{e-1}co\varphi(L) + 2^f co\varphi(M) = 11$
A)$e = 2$,$f = 3$,$co\varphi(L) = co\varphi(M) = 1$ より
$a = 2^3 p$,$A = 3^2 Q$. これを定義式に代入して $3^2 Q = 6 * 2^2(p-1) - 63$.
$3Q = 2^3(p-1) - 21$,$3Q = 8p - 29$（素数共鳴）
B)$e = 3$,$f = 1$,$co\varphi(L) = co\varphi(M) = 1$ より
$a = 2p$,$A = 3^3 Q$. これを定義式に代入して $3^3 Q = 6(p-1) - 63$.
$9Q = 2p - 23$（素数共鳴）
例外）$a = 2 * 5^2$,$A = 3 * 19$($e = 1$,$f = 1$,$co\varphi(19) = 1$,$co\varphi(25) = 5$)

表 17: $h=3,m=-112$

a	素因数分解	A	素因数分解
116	2^2*29	225	3^2*5^2
128	2^7	273	$3*7*13$
176	2^4*11	369	3^2*41
272	2^4*17	657	3^2*73
464	2^4*29	1233	3^2*137
752	2^4*47	2097	3^2*233
1424	2^4*89	4113	3^2*457
1616	2^4*101	4689	3^2*521
2864	2^4*179	8433	3^2*937
3152	2^4*197	9297	3^2*1033
3632	2^4*227	10737	3^2*1193
4016	2^4*251	11889	3^2*1321
4496	2^4*281	13329	3^2*1481
6896	2^4*431	20529	3^2*2281
7184	2^4*449	21393	3^2*2377

$A=6\varphi(a)-111,\varphi(A)=2a-112$
$A=3^eL$（L は 3 の倍数でない）と書ける。
$3^{e-1}L=2\varphi(a)-37,3^{e-1}\varphi(L)=a-56$
$a=2^fM$（M は奇数）と書ける。
$3^{e-1}co\varphi(L)+2^fco\varphi(M)=19$
$e=2,f=4,a=2^4p,A=3^2Q$ このとき $3Q=16p-53$（素数共鳴）
例外)$a=2^2*19,A=3^2*5^2$:($f=2,co\varphi(19)=1,e=2,co\varphi(5^2)=5^2-20=5$)
$a=2^7,A=3*7*13$:($273=3*2^f-111$ より $f=7$)

表 18: $h = 3$,$m = -76$

a	素因数分解	A	素因数分解
50	$2 * 5^2$	45	$3^2 * 5$
62	$2 * 31$	105	$3 * 5 * 7$
92	$2^2 * 23$	189	$3^3 * 7$
236	$2^2 * 59$	621	$3^3 * 23$
452	$2^2 * 113$	1269	$3^3 * 47$
668	$2^2 * 167$	1917	$3^3 * 71$
956	$2^2 * 239$	2781	$3^3 * 103$
1172	$2^2 * 293$	3429	$3^3 * 127$
1388	$2^2 * 347$	4077	$3^3 * 151$
1532	$2^2 * 383$	4509	$3^3 * 167$
2036	$2^2 * 509$	6021	$3^3 * 223$
2396	$2^2 * 599$	7101	$3^3 * 263$
2468	$2^2 * 617$	7317	$3^3 * 271$
3908	$2^2 * 977$	11637	$3^3 * 431$
4196	$2^2 * 1049$	12501	$3^3 * 463$

$A = 6\varphi(a) - 75$,$\varphi(A) = 2a - 76$
$A = 3^e L$(L は 3 の倍数でない）と書ける。
$3^{e-1}L = 2\varphi(a) - 25$,$3^{e-1}\varphi(L) = a - 38$
$a = 2^f M$（M は奇数）と書ける。
$3^{e-1}L = 2^f M - 25$,$3^{e-1}\varphi(L) = 2^f M - 38$
$3^{e-1}co\varphi(L) + 2^f co\varphi(M) = 13$
$e = 3$,$f = 2$,$a = 2^2 p$,$A = 3^3 Q$ このとき $9Q = 4p - 29$(素数共鳴）
例外）$a = 2 * 5^2$,$A = 3^2 * 5$:($f = 1$,$co\varphi(25) = 5$,$e = 2$,$co\varphi(5) = 1$)
$a = 2 * 31$,$A = 3 * 5 * 7$:($f = 1$,$co\varphi(31) = 1$,$e = 1$,$co\varphi(5 * 7) = 35 - 4 * 6 = 11$)

表 19: $h = 5$,$m = -56$

a	素因数分解	A	素因数分解
26	2*13	65	5*13
74	2*37	305	5*61
86	2*43	365	5*73
122	2*61	545	5*109
194	2*97	905	5*181
206	2*103	965	5*193
254	2*127	1205	5*241
326	2*163	1565	5*313
362	2*181	1745	5*349
386	2*193	1865	5*373
422	2*211	2045	5*409
446	2*223	2165	5*433
554	2*277	2705	5*541
614	2*307	3005	5*601
626	2*313	3065	5*613
674	2*337	3305	5*661
746	2*373	3665	5*733
842	2*421	4145	5*829
866	2*433	4265	5*853
1046	2*523	5165	5*1033
1082	2*541	5345	5*1069
1142	2*571	5645	5*1129
1214	2*607	6005	5*1201

$A = 10\varphi(a) - 55$,$\varphi(A) = 4a - 56$

$A = 5^e L$(L は 5 で割れない) と書ける。

$5^{e-1}L = 2\varphi(a) - 11$,$4 * 5^{e-1}\varphi(L) = 4a - 56$:$5^{e-1}\varphi(L) = a - 14$

$a = 2^f M$（M は奇数）と書ける。

$5^{e-1}L = 2^f\varphi(M) - 11$,$5^{e-1}\varphi(L) = 2^f M - 14$

$5^{e-1}co\varphi(L) + 2^f co\varphi(M) = 3$

$e = 1$,$f = 1$,$a = 2p$,$A = 5Q$ の場合しかない。このとき $Q = 2p - 13$(スーパー双子素数)

表 20: $h=5$,$m=-96$

a	素因数分解	A	素因数分解
52	2^2*13	145	5*29
76	2^2*19	265	5*53
124	2^2*31	505	5*101
172	2^2*43	745	5*149
292	2^2*73	1345	5*269
316	2^2*79	1465	5*293
412	2^2*103	1945	5*389
724	2^2*181	3505	5*701
796	2^2*199	3865	5*773
844	2^2*211	4105	5*821
964	2^2*241	4705	5*941
1084	2^2*271	5305	5*1061
1132	2^2*283	5545	5*1109
1252	2^2*313	6145	5*1229
1324	2^2*331	6505	5*1301

$A=10\varphi(a)-95$,$\varphi(A)=4a-96$
$A=5^eL$(L は 5 で割れない）と書ける。
$5^{e-1}L=2\varphi(a)-19$,$5^{e-1}\varphi(L)=a-24$
$a=2^fM$（M は奇数）と書ける。
$5^{e-1}co\varphi(L)+2^fco\varphi(M)=5$
$e=1$,$f=2$,$a=2^2p$,$A=5Q$ の場合しかない。このとき $Q=4p-23$（スーパー双子素数）.

表 21: $h=5,m=-176$

a	素因数分解	A	素因数分解
56	2^3*7	65	$5*13$
86	$2*43$	245	$5*7^2$
104	2^3*13	305	$5*61$
124	2^2*31	425	5^2*17
152	2^3*19	545	$5*109$
244	2^2*61	1025	5^2*41
404	2^2*101	1825	5^2*73
524	2^2*131	2425	5^2*97
584	2^3*73	2705	$5*541$
604	2^2*151	2825	5^2*113
724	2^2*181	3425	5^2*137
776	2^3*97	3665	$5*733$
872	2^3*109	4145	$5*829$
1004	2^2*251	4825	5^2*193
1112	2^3*139	5345	$5*1069$
1244	2^2*311	6025	5^2*241
1256	2^3*157	6065	$5*1213$
1324	2^2*331	6425	5^2*257
1592	2^3*199	7745	$5*1549$

$A=10\varphi(a)-175,\varphi(A)=4a-176$
$A=5^eL$（L は 5 の倍数でない）と書ける。
$5^{e-1}L=2\varphi(a)-35,5^{e-1}\varphi(L)=a-44$
$a=2^fM$（M は奇数）と書ける。
$5^{e-1}L=2^f\varphi(M)-35,5^{e-1}\varphi(L)=2^fM-44$
$5^{e-1}co\varphi(L)+2^fco\varphi(M)=9$
$e=1,f=3,a=2^3p,A=5Q$ このとき $Q=8p-43$（スーパー双子素数）
$e=2,f=2,a=2^2p,A=5^2Q$ このとき $5Q=4p-39$（素数共鳴）
例外）$a=2*43,A=5*7^2$：$(f=1,co\varphi(43)=1,e=1,co\varphi(7^2)=49-42=7$

表 22: $h = 5$,$m = -136$

a	素因数分解	A	素因数分解
94	2*47	325	$5^2 * 13$
214	2*107	925	$5^2 * 37$
334	2*167	1525	$5^2 * 61$
394	2*197	1825	$5^2 * 73$
514	2*257	2425	$5^2 * 97$
934	2*467	4525	$5^2 * 181$
1174	2*587	5725	$5^2 * 229$
1234	2*617	6025	$5^2 * 241$
1594	2*797	7825	$5^2 * 313$
1714	2*857	8425	$5^2 * 337$
1774	2*887	8725	$5^2 * 349$
1894	2*947	9325	$5^2 * 373$
2194	2*1097	10825	$5^2 * 433$
2734	2*1367	13525	$5^2 * 541$

$A = 10\varphi(a) - 135$,$\varphi(A) = 4a - 136$
$A = 5^e L$（L は 5 の倍数でない）と書ける。
$5^{e-1}L = 2\varphi(a) - 27$,$5^{e-1}\varphi(L) = a - 34$
$a = 2^f M$(M は奇数）と書ける。
$5^{e-1}L = 2^f\varphi(M) - 27$,$5^{e-1}\varphi(L) = 2^f M - 34$
$5^{e-1}co\varphi(L) + 2^f co\varphi(M) = 7$
$e = 2$,$f = 1$,$a = 2p$,$A = 5^2 Q$ の場合しかない。このとき $5Q = 2p - 29$(素数共鳴）

表 23: $h = 5$,$m = -256$

a	素因数分解	A	素因数分解
76	$2^2 * 19$	105	$3 * 5 * 7$
424	$2^3 * 53$	1825	$5^2 * 73$
2104	$2^3 * 263$	10225	$5^2 * 409$
2344	$2^3 * 293$	11425	$5^2 * 457$
3064	$2^3 * 383$	15025	$5^2 * 601$
4744	$2^3 * 593$	23425	$5^2 * 937$
5224	$2^3 * 653$	25825	$5^2 * 1033$
8104	$2^3 * 1013$	40225	$5^2 * 1609$
8824	$2^3 * 1103$	43825	$5^2 * 1753$

$A = 10\varphi(a) - 255$,$\varphi(A) = 4a - 256$
$A = 5^e L$（L は 5 の倍数でない）と書ける。
$5^{e-1}L = 2\varphi(a) - 51$,$5^{e-1}\varphi(L) = a - 64$
$a = 2^f M$(M は奇数）と書ける。
$5^{e-1}L = 2^f\varphi(M) - 51$,$5^{e-1}\varphi(L) = 2^f M - 64$
$5^{e-1}co\varphi(L) + 2^f co\varphi(M) = 13$
$e = 2$,$f = 3$,$a = 2^3 p$,$A = 5^2 Q$ このとき $5Q = 8p - 59$(素数共鳴）
例外）$a = 2^2*19$,$A = 3*5*7$:（$f = 2$,$co\varphi(19) = 1$,$e = 1$,$co\varphi(5*7) = 35-24 = 11$)

表 24: $h = 7$,$m = -120$

a	素因数分解	A	素因数分解
22	2*11	21	3*7
38	2*19	133	7*19
62	2*31	301	7*43
86	2*43	469	7*67
122	2*61	721	7*103
146	2*73	889	7*127
158	2*79	973	7*139
218	2*109	1393	7*199
302	2*151	1981	7*283
326	2*163	2149	7*307
386	2*193	2569	7*367
398	2*199	2653	7*379
458	2*229	3073	7*439
482	2*241	3241	7*463
542	2*271	3661	7*523
566	2*283	3829	7*547
626	2*313	4249	7*607
662	2*331	4501	7*643
746	2*373	5089	7*727
758	2*379	5173	7*739
842	2*421	5761	7*823
878	2*439	6013	7*859

$A = 14\varphi(a) - 119$,$\varphi(A) = 6a - 120$
$A = 7^e L$(L は 7 で割れない),$A > 2$ より $a = 2^f M$(M は 2 でも 7 でも割れない)
定義式に代入して整理すると
$7^{e-1}L = 2^f\varphi(M) - 17$,$7^{e-1}\varphi(L) = 2^f M - 20$
$7^{e-1}co\varphi(L) + 2^f co\varphi(M) = 3$
$e = 1$,$f = 1$,$co\varphi(L) = co\varphi(M) = 1$ の場合しかない。
$a = 2p$,$A = 7Q$ よって $Q = 2p - 19$($p \neq 13$)（スーパー双子素数）