(A,B,C) 完全数

飯高 茂　(放送大学学生, 学習院大学名誉教授)*

概　要

与えられた 整数 (A, B, C)(最大公約数は 1) に対して $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

1. (A,B,C) 完全数

与えられた 整数 (A, B, C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D$ の解 a を定数項 D の (A,B,C) 完全数という.

定数 k とそれの因子にならない素数 p について $a=kp$ が (A,B,C) 完全数になる場合の素数 p が無数にある ($a=kp$:B 型解) とする.

$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく.

$D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

$A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D_0$ の解を固有完全数 k_0 の (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

固有完全数 と (A,B,C) 宇宙完全数を定めることが基本課題だが定数項 D を選ぶと (A,B,C) 完全数に興味あるものが出る.

2. (0,2,1) 宇宙完全数

はじめに最も易しい場合を扱う. 定数項 D の (0,2,1) 完全数 の方程式は $2\varphi(a)-a=D$.

$k_0=2^e$ が 固有完全数.　$D_0=-2\varphi(k_0)=-2^e$ が宇宙定数項.

$2\varphi(a)-a=D_0=-2^e$ が (0,2,1) 宇宙完全数の方程式で $e=\eta$, L は素数 p となり ,(0,2,1) 宇宙完全数は $a=2^e p$, (p : 奇素数).

一方 ,$2\varphi(a)-a=D=1$ の解 5 個はフェルマ素数の積という著しい特色を持つ.

3. 固有完全数 1 の定理

(A,B,C) 完全数の固有完全数 k_0 が 1 のときを考える.

$A\sigma(k_0)+B\varphi(k_0)-Ck_0=A+B-C=0$. $k_0=1$ なので無数の素数 p が解となり宇宙定数項 D_0 は $D_0=A-B$.

素数 $q(\neq p)$ がありそのべき $q^\eta, (\eta>1)$ が解と仮定すると $A=B-1$. さらに ,$C=2B-1$.

逆も成り立ち, $(B-1)\sigma(a)+B\varphi(a)-(2B-1)a=-1$ は素数 p を解に持つ.

定理 1 $(B-1)\sigma(a)+B\varphi(a)-(2B-1)a=-1$ がある素数のべき $q^\varepsilon, (\varepsilon>1)$ を解に持つと B は素数 q になり, 素数 q のすべてのべき q^η が解になる.

2010 Mathematics Subject Classification: 11A05
キーワード：完全数

* 〒 183-0052
e-mail: `iitakashigeru@gmail.com`
web: `http://iitakashigeru.math-academy.net.jp`

表 1: $2\varphi(a) - a = 1$

a	素因数分解
3	3
15	$3 * 5$
255	$3 * 5 * 17$
65535	$3 * 5 * 17 * 257$
4294967295	$3 * 5 * 17 * 257 * 65537$
83623935	$3 * 5 * 17 * 353 * 929$
6992962672132095	$3 * 5 * 17 * 353 * 929 * 83623937$

$B = 2$ なら (1,2,3) 完全数で 固有完全数 $k_0 = 1$ のとき, 宇宙完全数は すべての奇素数 と 2^{ε} であると期待される.

定数項 $D = -2$ の解は素数の積み上げ解.

表 2: $\sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -2$ の解の表

a	素因数分解
6	$2 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$
547931854230	$2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897$
295923739527652742180310	$2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897 * 540073984097$
9	3^2
20	$2^2 * 5$
272	$2^4 * 17$
65792	$2^8 * 257$
4295032832	$2^{16} * 65537$

$\sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -2$ の解はこれで尽きていると思われる.

フェルマ素数は 5 つあって, 終わりの 3 個の素数の最後は 7.

ここでは素数は 6 つあって終わりの 3 個の素数の最後は 7.

飯高茂の誕生日は 5 月 29 日 (奇跡的な符合?長らく数学をやったご褒美.)

参考文献

[1] 飯高 茂 『数学の研究をはじめよう (I),(II),(III),(IV),(V),(VI)』, 現代数学社 ,2016,2017,2018,2019.

[2] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.

[3] Antal Bege and Kinga Fogarasi,Generalized perfect numbers,Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73–82.

[4] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1