ABC完全数

飯高 茂

2020/03/19

1　(A,B,C) 完全数

与えられた 整数 (A, B, C)(最大公約数は 1 とする) に対して
$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D$ の解 a を
定数項 D の (A,B,C) (3項完全数) という.

定数 k とそれの因子にならない素数 p について $a = kp$ が (A,B,C) 完全数になる場合の素数 p が無数にある ($a = kp$:B 型解) とする.

$A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck = 0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく.

$D_0 = A\sigma(k_0) - B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D_0$ の解を固有完全数 k_0 の (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

固有完全数 と (A,B,C) 宇宙完全数を定めることが基本課題だが定数項 D を選ぶと (A,B,C) 完全数に興味あるものが出る.

2　(0,2,1) 宇宙完全数

はじめに最も易しい場合を扱う. 定数項 D の (0,2,1) 完全数 の方程式は $2\varphi(a) - a = D$.

$k_0 = 2^e$ が 固有完全数.　$D_0 = -2\varphi(k_0) = -2^e$ が宇宙定数項.

$2\varphi(a) - a = D_0 = -2^e$ が (0,2,1) 宇宙完全数の方程式で

$e = \eta$, L は素数 p となり,(0,2,1) 宇宙完全数は $a = 2^e p$, (p : 奇素数).

一方 ,$2\varphi(a) - a = D = 1$ の解5個はフェルマ素数の積という著しい特色を持つ.

表 1: $2\varphi(a) - a = 1$

a	素因数分解
3	3
15	$3 * 5$
255	$3 * 5 * 17$
65535	$3 * 5 * 17 * 257$
4294967295	$3 * 5 * 17 * 257 * 65537$
83623935	$3 * 5 * 17 * 353 * 929$
6992962672132095	$3 * 5 * 17 * 353 * 929 * 83623937$

3 固有完全数 1 の定理

(A,B,C) 完全数の固有完全数 k_0 が 1 のときを考える.

$A\sigma(k_0) + B\varphi(k_0) - Ck_0 = A + B - C = 0.$
$k_0 = 1$ なので無数の素数 p が解となり宇宙定数項 D_0 は $D_0 = A - B$.

素数 $q(\neq p)$ がありそのべき $q^\eta, (\eta > 1)$ が解と仮定すると $A = B - 1$.
さらに ,$C = 2B - 1.$

逆も成り立ち, $(B-1)\sigma(a) + B\varphi(a) - (2B-1)a = -1$ は素数 p を解に持つ.

定理 1 $(B-1)\sigma(a)+B\varphi(a)-(2B-1)a=-1$ がある素数のべき $q^{\varepsilon},(\varepsilon>1)$ を解に持つと B は素数qになり, 素数 q のすべてのべき q^{η} が解になる.

$B=2$ なら (1,2,3) 完全数で $k_0=1$ のとき, 宇宙完全数は すべての奇素数 と 2^{ε} であると期待される.

$B=3$ なら (2,3,5) 完全数で $k_0=1$ のとき, 宇宙完全数は すべての奇素数 と 3^{ε} であると期待される.

表 2: $\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-1, 2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=-1$

(1,2,3) 完全数		(2,3,5) 完全数	
a	素因数分解	a	素因数分解
2	2	2	2
3	3	3	3
4	2^2	5	5
5	5	7	7
7	7	9	3^2
8	2^3	11	11
11	11	13	13
13	13	17	17
16	2^4	19	19
17	17	23	23
19	19	27	3^3

表 3: $\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-1, 2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=-1$

(1,2,3) 完全数		(2,3,5) 完全数	
a	素因数分解	a	素因数分解
23	23	29	29
29	29	31	31
31	31	37	37
32	2^5	41	41
37	37	43	43
41	41	47	47
43	43	53	53
47	47	59	59
53	53	61	61
59	59	67	67

$B=5$ なら (4,5,9) 完全数でそのとき 固有完全数 $k_0=1$ に対応する宇宙完全数は 素数 p と 5^{ε} が解であり, 後者が天与の解である. 驚いたことに変な解がでてきた.

表 4: $4,5,9=-1$ の解, 素数を除く

a	素因数分解
21	$3*7$
25	5^2
125	5^3
625	5^4
3125	5^5
15625	5^6
78125	5^7
390625	5^8
1953125	5^9

非素数解を探したら, 5^e 以外に $a=21=3*7$ がでた. 正直のところ,我が目を疑った.

表 5: $(6,7,13)=-1$ の解, 素数を除く

a	素因数分解
33	$3*11$
49	7^2
343	7^3
2401	7^4
4917	$3*11*149$
16807	7^5
117649	7^6
823543	7^7

非素数解を探したら, 7^e 以外に $a=33=3*11, 4917=3*11*149$ がでた.

(1,2,3) 完全数において, 定数項 $D=-2$ の解は素数の積み上げ解.

表 6: $\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-2$ の解の表

a	素因数分解
6	$2*3$
30	$2*3*5$
870	$2*3*5*29$
745590	$2*3*5*29*857$
547931854230	$2*3*5*29*857*734897$
295923739527652742180310	$2*3*5*29*857*734897*540073984097$
9	3^2
20	2^2*5
272	2^4*17
65792	2^8*257
4295032832	$2^{16}*65537$

$\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-2$ の解はこれで尽きていると思われる.

フェルマ素数は5つあって,終わりの3個の素数の最後は7.

(A,B,C) 完全数の一般理論で, $A=0$ の場合が最も扱いやすい.

最も簡単な $h=3$ の場合でも オイラー余関数の逆問題 $co\varphi(K)=3^{\psi}$ を解くことになり, Goldbach の予想がからむ本質的に困難な課題が出てきた.

4 $K-\varphi(K)=3^{\psi}$ の解の表

表 7: $K-\varphi(K)=3^{\psi}, \psi=3,4,5$ の解

K	qr	q	r	$3^{\psi}+1$	$q+r$
$\psi=3$		$3^{\psi}+1=3^3+1$		28	
115	$5*23$	5	23		28
187	$11*17$	11	17		28
$\psi=4$		$3^{\psi}+1=3^4+1$		82	
781	$11*71$	11	71		82
1357	$23*59$	23	59		82
1537	$29*53$	29	53		82

表 8: $K-\varphi(K)=3^{\psi}, \psi=3,4,5$ の解

K	qr	q	r	$3^{\psi}+1$	$q+r$
$\psi=5$		$3^{\psi}+1=3^5+1$		244	
1195	$5*239$	5	239		244
2563	$11*233$	11	233		244
3859	$17*227$	17	227		244
9259	$47*197$	47	197		244
10123	$53*191$	53	191		244
12283	$71*173$	71	173		244
14659	$107*137$	107	137		244
14803	$113*131$	113	131		244

2019年の年の瀬に11歳の少年梶田光が優れた定理を見出した.

5　梶田光の定理

定理 2 (梶田光,2019) $B\varphi(k)-Ck=0$ を満たす k が存在するとき B,C が互いに素 かつ C が奇数とすると, B が素数で $C=(B-1)/2$.

このとき解は $k=2^eB^f, e,f>0$.