数学の研究をはじめよう
前編 完全数 2.0の発見

Shigeru Iitaka

2024 年 12 月 25 日

1 はじめに

与えられた 平行移動 m に対して $\sigma(a)-2a=-m$ を満たす a を求めると, $m=0$ のときの完全数を代表に興味ある計算例が数多く出る.

しかしここで得られた計算例は数学的に証明をすることが非常に難しい.

最近高校生の梶田光さんは ダブルオイラー関数 $\varphi^2(a)=\varphi(\varphi(a))$ を用いた数論研究の研究を始め, 驚くほど面白い研究成果をあげている.

ダブルオイラー関数ではないが関数 $\sigma^2(a)=\sigma(\sigma(a))$ をはじめて取り上げたのはインドの数学者 Suryanaryana この関数を用いてによって $\sigma^2(a)=2a$ 超完全数を定義し偶数の場合は 2 べきになり, 実際にそれが完全数の因子になることを示した.

したがって研究の流れとしてダブル σ 関数 $\sigma^2(a)$ を用いて数論の研究を試みてもよいだろう.

定数 $C>1$ を定めて, 平行移動 m に対して $\sigma^2(a)-Ca=-m$ を 満たす a を 係数 C , 平行移動 m のダブルシグマ完全数ということにした.

$B=\sigma(a)$ を完全数のパートナという.

$C=2$ の場合計算例をあげる.

表 1: ダブルシグマ完全数

a	素因数分解	B	素因数分解
m= 0			
2	2	3	3
4	2^2	7	7
16	2^4	31	31
64	2^6	127	127

a が偶数の時 a:2 べきで $B = 2a - 1$ はメルセンヌ素数.(Suryanaryana の定理)

表 2: ダブルシグマ完全数 ,$C = 2, m = -1$

a	素因数分解	B	素因数分解
m= -1			
3	3	4	2^2
7	7	8	2^3
31	31	32	2^5
127	127	128	2^7

例
$a = 7$ なら $B = \sigma(a) = \sigma(7) = 8, \sigma^{(}a) = \sigma(8) = 15.$
$\sigma^2(a) - 2a = 15 - 14 = 1 = -m.$
そこで $\sigma^2(a) - 2a = 1$ を 満たす解は B:偶数なら $B = 2^e$, a はメルセンヌ素数:
これは予想である.

$\sigma^2(a)-2a=-m$ の解を計算し興味ある解を探すことにした. その結果
$m=-14$ すなわち $\sigma^2(a)-2a=14$ の場合は解が簡単で美しいことがわかった.
ここで $14=2+2*6$ によってここで 完全数 6 が出ている.

表 3: ダブルシグマ完全数 ,$m=-14$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
23	23	24	2^3*3
29	29	30	$2*3*5$
41	41	42	$2*3*7$
53	53	54	$2*3^3$
101	101	102	$2*3*17$
113	113	114	$2*3*19$
137	137	138	$2*3*23$
173	173	174	$2*3*29$
257	257	258	$2*3*43$
281	281	282	$2*3*47$
317	317	318	$2*3*53$
353	353	354	$2*3*59$
401	401	402	$2*3*67$

ここで解 $a=p$:素数とする.
上の表を参考にして $\sigma(a)=p+1=6Q,(Q:$ 素数$)$, と仮定する. $Q>3$ も仮定する. $a=p=6Q-1$ を満たす.
$p=6Q-1$ はスーパー双子素数である.
$\sigma^2(a)-2a=14$ の解は $p=6Q-1$ を満たす スーパー双子素数から出来ているという事実に圧倒される.
これを証明する.
$\sigma^2(a)=12(Q+1)$ となる.
$\sigma^2(a)-2a=12(Q+1)-2p=12(Q+1)-2(6Q-1)=14$ によって,
$\sigma^2(a)-2a=14$ になる.
$a=p=6Q-1$ を満たすとき $a=2p$ が解になる.
$B=2^3*3,2*3^3$ に対応する解 23,53 が解になるがこれら $2^2,3^2$ は擬素数なので何とか救えると思う.
本当のところ, $\sigma^2(a)-2a=14$ の解を理論的に求めたい.
難しいのでいくつかの仮定をおく.
1) a は素数 p と仮定する.
$B=p+1$ になる. $p+1$ は偶数なので $2^eR,(2\not|R)$ と書ける.
$\sigma(B)=N\sigma(R)$ は $\sigma(B)-2a=14,(N=2^{e+1}-1)$,
$N\sigma(R)-2p=14.$
2) $e=1$ を仮定すると, $N=3$.

$3\sigma(R)-2p=14.$
3) $3|R$ を仮定する. $R/3$ は 3 で割れないとすると, $R=3S, B=6S.$
$\sigma(B)=\sigma(6S)=12\sigma(S).$
$12\sigma(S)-2p=14;\ 6\sigma(S)-p=7.$
$p+1=6S$ によって
$6\sigma(S)=p+7=6(S+1).\ \sigma(S)=S+1.S$ は素数.
$p+1=6S$ は p,S がスーパー双子素数.
しかし, $B=6S$ 以外の B は $2^3*3, 2*3^5$
このとき $a=23,53$ という素数解になる.
これは次の場合は全く成り立たない.

計算の結果次の例があった.

表 4: ダブルシグマ完全数 ;$\sigma^2(a)-2a=58$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m=-58$			
33	$3*11$	48	2^4*3
83	83	84	2^2*3*7
139	139	140	2^2*5*7
223	223	224	2^5*7
307	307	308	2^2*7*11
643	643	644	2^2*7*23
811	811	812	2^2*7*29
1483	1483	1484	2^2*7*53
1987	1987	1988	2^2*7*71
3163	3163	3164	$2^2*7*113$

素数解 $a=p$ があるとき,$\sigma(a)=B=p+1$ がパートナ.
上の表を見て, $B=p+1=28Q$ と素数 Q で書いてみる.
$\sigma^2(a)=\sigma(B)=\sigma(28Q)=56(Q+1)$.
$\sigma^2(a)-2a=56(Q+1)-2(28Q-1)=58$ となる.
これ以外の解は, $33=3*11, 223$ だけらしい. それぞれパートナは $B=2^4*3, 2^5*7$
$B=2*7^2$ に対応する解があるか. これが問題である.

2 究極の課題

k を完全数として, $m = 2k + 2$ とおく.

$\sigma^2(a) - 2a = m$ の解を構成する.

$a = p$ は素数として $B = \sigma(a) = p + 1 = kQ$ と完全数 k を用いて書ける素数 $Q > 2$ があるとする.

ここで k, Q:互いに素と仮定する.

$\sigma^2(a) = \sigma(B) = \sigma(kQ) = 2k(Q + 1)$.

$$\sigma^2(a) - 2a = 2k(Q + 1) - 2p = 2k(Q + 1) - 2(kQ - 1) = 2k + 2$$

完全数 k に対して $p = kQ - 1$ が素数になる素数 Q があれば $a = p$ が $\sigma^2(a) - 2a = -m$ の解になる. これらの解を通常解とする.

これ以外の解は極めて少ないが, 擬素数解にあたるもの以外に何があるか.

完全数は $\sigma(k) - 2k = 0$ の解であるが, $\sigma^2(a) - 2a = 2k + 2$ の解がスーパー双子素数で得られるのはいかにも美しい結果である.

しかし数学的な証明をつけることはいかにも難しそうである.

これらの結果を得たのは 2024 年の米国大統領選挙の開票結果が逐一放送される最中であった.

私は選挙の結果に比べて私のえた完全数の結果は比類なき成果であると思った. そこで k を完全数とするとき $\sigma^2(a) - 2a = 2k + 2$ の解を完全数 2.0 と呼ぶことにした.

実は古典的完全数でも類似の結果がある.

$\sigma(a) - 2a = 2k + 2$ の解には k と素なる素数 p との積がある.

$\sigma^2(a) - 2a = 2k + 2$ の解は $a = p$: 素数で $B = kQ$, $p = kQ - 1$ が素数になる素数 p が通常解になる.

私は定年後若い方々とはじめた完全数研究のたどり着いた最高の到達点と言えるのはないか.

と高揚感丸出しの文章を書いたところで既存研究との関連を調べねばいけないと思い インターネットの整数列大辞典 で $k = 6; m = -14$ のときの数列

23,29,41,53,101, 113

を検索すると A22775757 にこの数列がでているということがわかった.

$\sigma(p + 1) = 2p + 14$ を満たす素数列があった.

第 3,4 完全数 $k=496,8128$ について解をパソコンで求めた.

表 5: Double sigma ;$\sigma^2(a)-2a=496*2+2$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
2743	$13*211$	2968	2^3*7*53
3661	$7*523$	4192	2^5*131
p	素因数分解	$B=p+1$	$496*Q$
1487	1487	1488	2^4*31*3
8431	8431	8432	$2^4*31*17$
23311	23311	23312	$2^4*31*47$
97711	97711	97712	$2^4*31*197$
118543	118543	118544	$2^4*31*239$
130447	130447	130448	$2^4*31*263$
157231	157231	157232	$2^4*31*317$
189967	189967	189968	$2^4*31*383$

$p=496Q-1$ は双子素数.

表 6: Double sigma ;$\sigma^2(a)-2a=8128*2+2$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
49471	$61*811$	50344	$2^3*7*29*31$
112951	112951	112952	$2^3*7*2017$
1243807	1243807	1243808	$2^5*47*827$
p	素因数分解	$B=p+1$	8128*Q
40639	40639	40640	$2^6*5*127$
430783	430783	430784	$2^6*53*127$
723391	723391	723392	$2^6*89*127$
820927	820927	820928	$2^6*101*127$
723391	723391	723392	$2^6*89*127$
820927	820927	820928	$2^6*101*127$
1893823	1893823	1893824	$2^6*127*233$
2381503	2381503	2381504	$2^6*127*293$

$p=8128Q-1$ は双子素数.