数学の研究をはじめよう —-
後編 3倍積完全数2.0 のお披露目

飯高 茂

2025 年 1 月 19 日

1 $\sigma^2(a)-3a=-m$ の解

ダブルシグマ関数 $\sigma^2(a)=\sigma(\sigma(a))$ を使い定数 $H>1$, 平行移動 m に対して $\sigma^2(a)-Ha=-m$ を 満たす a を 乗数 H , 平行移動 m のダブル σ 完全数という.

さらに $B=\sigma(a)$ を完全数のパートナという.

$H=3$ の場合の計算例をいくつかあげる.

表 1: ダブルシグマ完全数;$\sigma^2(a)-3a=-m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m=-3$			
39	$3*13$	56	2^3*7
1819	17* 107	1944	2^3*3^5
190079	67* 2837	192984	$2^3*3*11*17*43$
$m=-2$			
18	$2*3^2$	39	$3*13$
1458	$2*3^6$	3279	$3*1093$
1062882	$2*3^{12}$	2391483	$2*797161$
$m=0$			
8	2^3	15	$3*5$
21	$3*7$	32	2^5
512	2^9	1023	$3*11*31$
m= 1			
75	$3*5^2$	124	2^2*31
5911	$23*257$	6192	2^4*3^2*43
m= 3			
341	$11*31$	384	2^7*3
533	$13*41$	588	2^2*3*7^2
1025	5^2*41	1302	$2*3*7*31$
5825	5^2*233	7254	$2*3^2*13*31$
6097	$7*13*67$	7616	2^6*7*17
54451	17* 3203	57672	2^3*3^4*89
121521	3* 40507	162032	$2^4*13*19*41$

これらの解は各々が個性を発揮していて何か意味のある関係式は見当たらない.

強いて言えば $m=-2$ では $a=2*3^e, B=3*Q$ となる素数 Q があるようだ.

定義方程式は $B=\sigma(a), \sigma(B)=3a+2$ なので $a=2*3^e, B=3*R, (3 \not| R)$ を代入すると

$$B=\sigma(a)=3*(3^{e+1}-1)/2, R=(3^{e+1}-1)/2.$$

ゆえに $2R=3*3^e-1$..

$$0 = \sigma(B) - (3a+2) = 4\sigma(R) - (3a+2) = 4\sigma(R) - (2*3^{e+1}+2) - 4 \quad (1)$$
$$= 4\sigma(R) - (2*3^{e+1}+2) - 4. \quad (2)$$

以上によって,

$$0 = 4\sigma(R) - (2*3^{e+1}+2) - 4 = 4\sigma(R) - (4*R+4) = 4(\sigma(R) - (R+1))$$

$\sigma(R) - (R+1)$ を満たし R は素数 Q になる.

$Q = (3^{e+1} - 1)/2$ が素数になる場合をパソコンで調べる.

表 2: $Q = (3^{e+1} - 1)/2$ が素数の解 $B = 3Q$

e	a	素因数分解	B	素因数分解
2	18	$2 * 3^2$	39	$3 * 13$
6	1458	$2 * 3^6$	3279	$3 * 1093$
12	1062882	$2 * 3^{12}$	2391483	$3 * 797161$

実は $e = 70, a = 2 * 3^{70}, B = 3 * 375473325748986240197335797912877 3$ という解もある.

表 3: ダブルシグマ完全数 ;$\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m = -18$			
14	$2 * 7$	24	$2^3 * 3$
34	$2 * 17$	54	$2 * 3^3$
26	$2 * 13$	42	$2 * 3 * 7$
74	$2 * 37$	114	$2 * 3 * 19$
122	$2 * 61$	186	$2 * 3 * 31$
146	$2 * 73$	222	$2 * 3 * 37$
314	$2 * 157$	474	$2 * 3 * 79$
386	$2 * 193$	582	$2 * 3 * 97$
554	$2 * 277$	834	$2 * 3 * 139$
626	$2 * 313$	942	$2 * 3 * 157$

ここで第二ブロックの解に注目する.

$a = 2p, B = 6Q, (Q > 3, 3 \not| Q)$ と素数 Q により書けている.

$B = \sigma(a) = 3(p+1)$, $B = 6Q$ と $3(p+1) = 6Q$ より $p = 2Q - 1$.

$\sigma(B) = 12(Q+1)$. $a = 2p = (12Q - 2)$ になり $\sigma^2(a) - 3a = 18 = -m$.

次に第 1 ブロックに注目する.

最初の解は $a = 2 * 7$ なので $B = \sigma(a) = 3 * 8 = 24$.

$\sigma^2(a) = \sigma(B) = \sigma(3 * 8) = 4 * 15 = 60$.

$$\sigma^2(a) - 3a = 60 - 3 * 2 * 7 = 42 = 18 = -m.$$

次の解は $a = 34$. これが解であることは確認できるだろう. これらは擬素数解である.

これらしか解がないらしいのだがその証明は極めて難しい. この難しさに完全数の存在意義があると言える.

第 2 ブロックの解を若干の仮定の下で求めてみよう.

1. 解は素数 p の 2 倍 $a = 2p$ を仮定. (オイラーだって偶数完全数しかできなかったのだから 素数の仮定は許容できる).

$B = 3(p+1)$ は正しい, $\sigma(B) - 6p = 18$ が条件式.

$p + 1$ は偶数なので $p + 1 = 2R$ と書ける.

2. $p + 1 = 2R$ と奇数 R で書けると仮定する.

$B = 3(p+1) = 6R$. ついでに R は 6 と互いに素まで仮定する.

$\sigma(B) = 12\sigma(R)$ となり $6p + 18 = 6(2R - 1) + 18 = 12R + 12$.

$\sigma(B) = 6p + 18$ なので,$12\sigma(R) = 12R + 12$. ゆえに

$\sigma(R) = R + 1$ したがって R は素数になる. そこで $Q = R$ とおくと解が $a = 2p, B = 6Q$ と書ける. また $p = 2Q - 1$ となる美しい関係式が成り立つ. このとき安全素数または safe primes という (By Kajita).

一般に定数 α, β があり, おのおのが複数個ある素数 p, Q によって 解が $a = \alpha p, B = \beta Q$ と書ける場合には解をダブル B 型解という.

$\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解にダブル B 型解が出る場合にこれを 3 倍積完全数 2.0 と言うことにしよう.

3 倍積完全数 2.0 をさらに見つけることは興味ある課題といえよう.

表 4: ダブルシグマ完全数 ;$\sigma^2(a)-3a=-m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m=-36$			
28	2^2*7	56	2^3*7
388	2^2*97	686	$2*7^3$
20	2^2*5	42	$2*7*3$
148	2^2*37	266	$2*7*19$
244	2^2*61	434	$2*7*31$
292	2^2*73	518	$2*7*37$
628	2^2*157	1106	$2*7*79$
772	2^2*193	1358	$2*7*97$
1108	2^2*277	1946	$2*7*139$

$B=\sigma(a),\sigma(B)-3a=36$ が定義式.
第二ブロックの解に注目する.
表によると $a=4p,B=14Q$ と素数, p,Q で書けている. これを基に次の仮定をおく.

1. 解は素数 p の 4 倍 $a=4p$ を仮定.
このとき $B=\sigma(4p)=7(p+1)$ は正しい.
$p+1$ は偶数なので $p+1=2R$ と書ける.
2. $p+1=2R$ と奇数 R で書けると仮定する.
$B=\sigma(4p)=14R$ が成り立つ. ついでに R は 14 と互いに素まで仮定する.
すると $\sigma(B)=\sigma(14)\sigma(R)=24\sigma(R)$ となる.
定義式によると $\sigma(B)=3a+14=12p+36$ なので,$12p+36=12p+36=12(2R-1)+36=24R+24$.
ゆえに $\sigma(R)=R+1$; R は素数になる.
第一ブロックの解は擬素数解.

2 メルセンヌ素数

解は素数 p の 2 べき, $a = 2^{\varepsilon}p$ を仮定しさらに $M = 2^{\varepsilon+1} - 1$ は素数, すなわち メルセンヌ素数とまで仮定する.

$B = \sigma(2^{\varepsilon}p) = M(p+1)$ は正しい, $\sigma(B) - 3 * 2^{\varepsilon}p = -m$ が条件式.

$p+1$ は偶数なので $p+1 = 2R$ と書ける. ここで R は奇素数を仮定する.

$B = M(p+1) = 2RM$,

$\sigma(B) = \sigma(M)3(R+1)$ となる.

$\sigma(M) = M+1 = 2^{\varepsilon+1}$ によって,

$$\sigma(B) - 3 * 2^{\varepsilon}p = 3 * 2^{\varepsilon+1}(R+1) - 3 * 2^{\varepsilon}(2R-1) \tag{3}$$

$$= 3 * 2^{\varepsilon+1}(R+1) - 3 * 2^{\varepsilon}(2R-1) \tag{4}$$

$$= 6 * 2^{\varepsilon} + 3 * 2^{\varepsilon} = 3^2 * 2^{\varepsilon} = -m \tag{5}$$

以上によって m が決定できる場合がでて来た. $m = -9 * 2^{\varepsilon}$ が m の決定公式である. ここで $M = 2^{\varepsilon+1} - 1$:メルセンヌ素数.

例をあげる.

$\varepsilon = 1; 2^{\varepsilon+1} - 1 = 3$, $m = -18$

$\varepsilon = 2, 2^{\varepsilon+1} - 1 = 7;$, $m = -36$

$\varepsilon = 3, 2^{\varepsilon+1} - 1 = 15;$, 不適.

$\varepsilon = 4, 2^{\varepsilon+1} - 1 = 31;$, $m = -36 * 4 = -144$

$\varepsilon = 6, 2^{\varepsilon+1} - 1 = 127;$, $m = -36 * 16 = -576$

このような結果は美しい発見と言ってよいだろう.

話の発端は約数和関数で定まる完全数の定義式で ダブルシグマ $\sigma^2(a)$ を使ったらどうなるかという全く成算が成り立ちそうも無い試みから始まった. 結果は驚くべきものであった.

８２になっても数学をやっていたご褒美と自分では思っている.

表 5: ダブルシグマ完全数 ;$\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m = -144$			
112	$2^4 * 7$	248	$2^3 * 31$
80	$2^4 * 5$	186	$2 * 3 * 31$
208	$2^4 * 13$	434	$2 * 7 * 31$
592	$2^4 * 37$	1178	$2 * 19 * 31$
1168	$2^4 * 73$	2294	$2 * 31 * 37$
2512	$2^4 * 157$	4898	$2 * 31 * 79$
3088	$2^4 * 193$	6014	$2 * 31 * 97$
4432	$2^4 * 277$	8618	$2 * 31 * 139$

第二ブロックの解は, $a = 16p, B = 62Q$ を満たす.

定義式を書き直す.

$B = \sigma(a), \sigma(B) - 3a = 144$

第 2 ブロックの解では $a = 16p, B = 62Q$ が素数 p, Q で成り立つ.

1. 仮定. 解は素数 p の 16 倍 $a = 16p$ を仮定.

$B = \sigma(16p) = 31(p+1)$ は正しい, $\sigma(B) - 48p = 144$ が条件式.

$p+1$ は偶数なので $p+1 = 2R$ と書ける.

$p+1 = 2R$ と書け R は 2 と互いに素まで仮定する. 2. 仮定. $p+1 = 2R$ と奇数 R で書けると仮定する.

$B = \sigma(16p) = 31(p+1) = 62R$

$B = \sigma(16p) = 31(p+1) = 62R$

$\sigma(B) = \sigma(62R) = 32 * 3 * \sigma(R)$ が成り立つ.

$48p + 144 = 48(2R-1) + 144 = 96R + 96$ によって

が条件式.

2. 仮定. $p+1 = 10R$ と 10 と互いに素な数 R で書けると仮定する. $B = \sigma(3p) = 4(p+1) = 40R$ が成り立つ.

$\sigma(B) = \sigma(40)\sigma(R) = 90\sigma(R)$ となる.

$\sigma(B) = 3a + 99 = 9p + 99 = 9(10R-1) + 99 = 90R + 90$ なので, $\sigma(R) = R + 1$; R は素数になる.

3 メルセンヌ素数を離れて

表 6: ダブルシグマ完全数 ;$\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m = -75$			
171	$3^2 * 19$	260	$2^2 * 5 * 13$
479	479	480	$2^5 * 3 * 5$
95	$5 * 19$	120	$2^3 * 3 * 5$
215	$5 * 43$	264	$2^3 * 3 * 11$
335	$5 * 67$	408	$2^3 * 3 * 17$
815	$5 * 163$	984	$2^3 * 3 * 41$
1055	$5 * 211$	1272	$2^3 * 3 * 53$
1415	$5 * 283$	1704	$2^3 * 3 * 71$
1655	$5 * 331$	1992	$2^3 * 3 * 83$
2615	$5 * 523$	3144	$2^3 * 3 * 131$
2735	$5 * 547$	3288	$2^3 * 3 * 137$
3455	$5 * 691$	4152	$2^3 * 3 * 173$
3935	$5 * 787$	4728	$2^3 * 3 * 197$

$m = -75$ のとき定義式を書き直す.
$B = \sigma(a), \sigma(B) - 3a = 75$
第 3 ブロックの解では $a = 5p, B = 24Q, p = 10Q - 1$ が素数 p, Q に対して成り立つ.
1. 仮定. 解は素数 p の 5 倍 $a = 5p$ を仮定.
$B = \sigma(5p) = 6(p + 1)$ は正しい, $\sigma(B) - 15p = 75$ が条件式.
$p + 1$ は偶数なので $p + 1 = 2R$ と書ける.
2. 仮定. $p + 1 = 2R$ と奇数 R で書けると仮定する. $B = \sigma(4p) = 14R$ が成り立つ.
しかし, 数表をみると $p = 19, p + 1 = 20 = 4 * 5$ 等が並ぶので $p + 1 = 4R$ を仮定する.
2. 仮定. $p + 1 = 4R$ と奇数 R で書けると仮定する. $B = \sigma(5p) = 6(p + 1) = 24R$ が成り立つ.
ついでに R は 6 と互いに素まで仮定する.
$\sigma(B) = \sigma(24)\sigma(R) = 60\sigma(R)$ となる.
$\sigma(B) = 3a + 75 = 15p + 75 = 15(4R - 1) + 75 = 60R + 60$ なので,
$\sigma(R) = R + 1$; R は素数になる.

表 7: ダブルシグマ完全数 ;$\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解

a	素因数分解	B	素因数分解
$m = -99$			
959	$7 * 137$	1104	$2^4 * 3 * 23$
2687	2687	2688	$2^7 * 3 * 7$
2527	$7 * 19^2$	3048	$2^3 * 3 * 127$
2827	$11 * 257$	3096	$2^3 * 3^2 * 43$
87	$3 * 29$	120	$2^3 * 3 * 5$
327	$3 * 109$	440	$2^3 * 5 * 11$
687	$3 * 229$	920	$2^3 * 5 * 23$
1227	$3 * 409$	1640	$2^3 * 5 * 41$
2127	$3 * 709$	2840	$2^3 * 5 * 71$
2487	$3 * 829$	3320	$2^3 * 5 * 83$
3027	$3 * 1009$	4040	$2^3 * 5 * 101$

定義式を書き直す. $B = \sigma(a), \sigma(B) - 3a = 75$

$m = -99$ のとき第 2 ブロックの解では $a = 3p, B = 40Q$ が成り立つ.

1. 仮定. 解は素数 p の 3 倍 $a = 3p$ を仮定.

$B = \sigma(3p) = 4(p+1)$ は正しい, $\sigma(B) - 9p = 99$ が条件式.

$p+1$ は偶数なので $p+1 = 2R$ と書けるさらに R は 5 でも割れるので

ついでに R は 10 と互いに素まで仮定する.

2. 仮定. $p+1 = 10R$ と 10 と互いに素な奇数 R で書けると仮定する.

$B = \sigma(3p) = 4(p+1) = 40R$ が成り立つ.

$\sigma(B) = \sigma(40)\sigma(R) = 90\sigma(R)$ となる.

$\sigma(B) = 3a + 99 = 9p + 99 = 9(10R - 1) + 99 = 90R + 90$ なので, $\sigma(R) = R + 1$; R は素数になる.

以上の計算で 柴田心春さんの助力があった. 記して感謝申し上げる.

$\sigma^2(a) - 3a = -m$ の解が無限にある場合をパソコンで探して以上の数表ができそれを基に推論している.

解が無限にある $m = -18, -36, -75, -99, -144$ などの他にあることは確実である.

解が無限にある m 方程式の ハウスキーと言うことを提案したい.

家の鍵のようにこれを使うと無限の解が出ている. このような解全体を整数群といいたい.

以前, 双子座の流星群を家の近くで見たことがある.

流星群ではないが 3 倍積完全数 2.0 に出てくる無限個あるらしい整数群を探すことはワクワクするような体験である.

流星群ははかなく消えるがハウスキーで開けた世界の素数が織りなす整数群永遠に消えないのである.

私の気持ちを率直に言えば, 深い森にさまよい眠れる何とかに出会ったときの感動に近い.