準メルセンヌ素数 と完全数 NEO

飯高 茂

平成 32 年 5 月 31 日

1　まえがき

梶田は $\mathrm{co}\varphi(x) = 2^e$ を満たす解は 2^{e+1} の他は $p^f \alpha, (\alpha = 2^\varepsilon - 1:$ 素数) と書けることを示した.

2　余関数

$\mathrm{co}\varphi(a) = p^e, (p > 2:$ 素数).

表 1: $\mathrm{co}\varphi(a) = 3^e$

a	素因数分解
e= 2	
21	$3 * 7$
27	3^3
e= 3	
63	$3^2 * 7$
81	3^4
115	$5 * 23$
187	$11 * 17$
e= 4	
189	$3^3 * 7$
237	$3 * 79$
243	3^5
781	$11 * 71$
1357	$23 * 59$
1537	$29 * 53$

$5 * 23$ のように異なる素数の積を 半素数という. $\mathrm{co}\varphi(x) = 3^e$ の解が 半素数 qr ならば $q + r = 3^e + 1$ となる. これらは数が多いし, 解となる理由もわかるのでこれら以外の解を調べることが大切である.

表 2: co$\varphi(a) = 3^e$

a	素因数分解
e= 5	
567	$3^4 * 7$
711	$3^2 * 79$
723	$3 * 241$
729	3^6
1195	$5 * 239$
2563	$11 * 233$

表 3: $\mathrm{co}\varphi(a) = 3^e$

a	素因数分解
e= 6	
1545	$3*5*103$
1701	3^5*7
1833	$3*13*47$
2133	3^3*79
2169	3^2*241
2181	$3*727$
2187	3^7
7909	$11*719$
20329	$29*701$
32101	$47*683$
35881	$53*677$

ここで, 3 で割れない半素数の解を考える.

$3^5*7, 3^3*79, 3^2*241, 3*727, 3^7$ が解になる.

$3^f*\alpha, (\alpha:$ 素数) の形であり これらを 底 p が 3 で素数は 7,79,241,327 であり是は他の指数 5^e の場合も出てくるのでこれらを準メルセンヌ素数という.

さらに $3*5*103, 3*13*47$ の解もありこれらは 半素数 $5*103, 3*13*47$ と 3 (一般には 3 のべき) との積が解となるので 準メルセンヌ半素数と言ってもよい.

しかしこれらの研究は難しい.

3　不十分

$\mathrm{co}\varphi(a) = p^e$
$a = \alpha p^f, (p \nmid \alpha:$ 素数) の形の解を 底 p の準メルセンヌ数という.
$\varphi(a) = \varphi(\alpha)\varphi(p^f) = \varphi(\alpha)p^f - \varphi(\alpha)p^{f-1})$
$\mathrm{co}\varphi(a) = \mathrm{co}\varphi(\alpha))p^f + (\alpha-1)p^{f-1} = p^f + (\alpha-1)p^{f-1} = p^e$
したがって
$p^f + (\alpha-1)p^{f-1} = p^e.$
よって $\alpha = p^{e+1-f} - p + 1$. これは準メルセンヌ解 αp^f を与える.
i. $f = e-1$. $\alpha = p^2 - p + 1$. $p = 3$ なら $\alpha = 7$
ii. $f = e-2$. $\alpha = p^3 - p + 1$. $p = 3$ なら $\alpha = 25$ noprime!
iii. $f = e-3$. $\alpha = p^4 - p + 1$. $p = 3$ なら $\alpha = 79$

命題 1 $\mathrm{co}\varphi(x) = p^e$ の解
i. $x = p^{e+1}$
ii. $x = qr, q + r = p^e + 1$

命題 2 $\mathrm{co}\sigma(x) = \sigma(p^e)$ の解
i. $x = p^{e+1}$
ii. $x = qr, q + r = \sigma(p^e) - 1$

２個の奇素数の積 qr が解なら, $q + r$ は偶数なので, p が奇数なら $q + r = \sigma(p^e) - 1$ を満たす解は多い.

そこで, 積 qr が解の場合を除外すると, $\mathrm{co}\varphi(x) = p^e$ の解の構造が見えてくる.

4 準メルセンヌ素数

$p = q^e - q + 1 + m$ が素数のとき, 法 p, 平行移動 m の準メルセンヌ素数という.

表 4: $p = q^e - q + 1 + m$

$q = 2$	$m + 1$	p
$e = 2$	1	3
$e = 3$	1	7
$e = 5$	1	31
$e = 7$	1	127
$e = 13$	1	8191
$q = 3$	m	p
$e = 2$	1	7
$e = 4$	1	79
$e = 5$	1	241
$e = 6$	1	727
$e = 9$	1	19681
$q = 5$	m	p
$e = 5$	1	3121
$e = 7$	1	78121
$e = 15$	1	30517578121

表 5: $p = q^e - q + m + 1$

$q = 7$	$m + 1$	p
$e = 2$	1	43
$e = 3$	1	337
$e = 6$	1	117643
$e = 9$	1	40353601
$e = 21$	1	558545864083284001

表 6: $p = q^e - q + m + 1$

$q = 2$	$m + 1$	p
$e = 2$	3	5
$e = 4$	3	17
$e = 8$	3	257
$e = 16$	3	65537
$q = 3$	$m + 1$	p
$e = 2$	5	11
$e = 3$	5	29
$e = 4$	5	83
$e = 8$	5	6563
$e = 10$	5	59051
$e = 14$	5	4782971
$e = 15$	5	14348909

整数 m と p: 素数に対して, $q = p^{e+1} - p + 1 + m$ は素数とする.

$a = p^e$ とするとき $\overline{p} = p - 1, W = p^{e+1} - 1$ とおくとき $\overline{p}\sigma(a) = W$ となる.

$A = q = p^{e+1} - p + 1 + m$ は素数なので, $\sigma(A) = A + 1$ を満たし $A = q = p^{e+1} - p + 1 + m = W - p + 2 + m = \overline{p}\sigma(a) - p + 2 + m$ になり

$\sigma(A) = A + 1 = p^{e+1} - p + 2 + m = ap - p + 2 + m$ を満たす.

定義 1 与えられた p, m に対して次式を満たす a を 素数 p を底とし, 平行移動が m の超完全数 *NEO*, A をそのパートナーという.

$A = \overline{p}\sigma(a) - p + 2 + m, \sigma(A) = A + 1 = p^{e+1} - p + 2 + m = ap - p + 2 + m$,

例 1 $p = 2$ なら, 連立定義式は $A = \overline{p}\sigma(a) - p + 2 + m = \sigma(a) + m, \sigma(A) = 2a + m$ となる.

命題 3 超完全数 *NEO* において解 $a = p^{\varepsilon}$ ならパートナー A は素数.

Proof $a = p^{\varepsilon}$ により $W = p^{\varepsilon+1} - 1$ とおくと $W = ap - 1 = \overline{p}\sigma(a)$.

$A = \overline{p}\sigma(a) - p + 2 + m = W - p + 2 + m =, \sigma(A) = ap - p + 2 + m = ap - 1 - p + 3 + m = W - p + 3 + m = W - p + 2 + m + 1 = A + 1$. よって $\sigma(A) = A + 1$. **q.e.d.**

ただし逆は成り立たない.

例 $p = 7, m = -6$ において $a = 7 * 61 * 229, A = 684469$.

命題 4 超完全数 *NEO* においてパートナー A が素数ならば $\overline{p}\sigma(a) = ap - 1$.

$\overline{p}\sigma(a) = ap - 1$ なら $a = p^{\varepsilon}$ と書けるか という問題があり

$p = 2$ の場合は, これは正しいという予想は概完全数予想という.

$p = 3$ の場合は, 反例が知られていない.

$p = 5$ の場合は $a = 77$ が反例.

$p = 7$ の場合は, 反例 97783=7*61*229 が知られている.

5　完全数 NEO

整数 m と p: 素数に対して, $q = p^{e+1} - p + 1 + m$ は素数とする.

$a = p^e$ とするとき $\overline{p} = p - 1, W = p^{e+1} - 1$ とおくとき $\overline{p}\sigma(a) = W$ となる.

$A = q = p^{e+1} - p + 1 + m$ は素数なので, $\sigma(A) = A + 1$ を満たし $A = q = p^{e+1} - p + 1 + m = W - p + 2 + m = \overline{p}\sigma(a) - p + 2 + m$ になり

$\alpha = aq = p^e q$ を p を底とし平行移動 m の狭義の完全数 NEO という.　　α の満たす方程式を作る.

$W = p^{e+1} - 1, \overline{p} = p - 1$ を以下で使う. ($q = p^{e+1} - p + 1 + m = W - p + 2 + m$ に注意.)

$$\begin{aligned}\overline{p}\sigma(\alpha) &= W(q+1)\\ &= Wq + W\\ &= p\alpha - q + W\\ &= p\alpha + p - 2 - m\end{aligned}$$

かくて次式ができた.

$$\overline{p}\sigma(\alpha) = p\alpha + p - 2 - m$$

定義 2 $\overline{p}\sigma(\alpha) = p\alpha + p - 2 - m$ を満たす α を p を底とし平行移動 m の完全数 *NEO* という.

$p = 2$ なら $\sigma(\alpha) = p\alpha - m$ を満たす.

これは平行移動 m の完全数の定義式である.

$p = 3$ なら $2\sigma(\alpha) = 3\alpha + 1 - m$ を満たす.

これは定義でこれから出る完全数 NEO を調べる必要がある.

表 7: 完全数 NEO, $p = 3$

$m = -329$	
200	$2^3 * 5^2$
658	$2 * 7 * 47$
946	$2 * 11 * 43$
1066	$2 * 13 * 41$
1258	$2 * 17 * 37$

表 8: 完全数 NEO, $p = 3$

$m = -19$	
12	$2^2 * 3$
$m = -18$	
63	$3^2 * 7$
1647	$3^3 * 61$
18063	$3^4 * 223$
$m = -16$	
741	$3 * 13 * 19$
45477	$3^2 * 31 * 163$
$m = -14$	
99	$3^2 * 11$
147	$3 * 7^2$
18387	$3^4 * 227$

表 9: 完全数 NEO, $p = 3$

$m = -13$	
16	2^4
$m = -12$	
117	$3^2 * 13$
1809	$3^3 * 67$
18549	$3^4 * 229$
$m = -8$	
153	$3^2 * 17$
957	$3 * 11 * 29$
1917	$3^3 * 71$
18873	$3^4 * 233$
24957	$3^2 * 47 * 59$
29637	$3^2 * 37 * 89$
67077	$3^2 * 29 * 257$

表 10: 完全数 NEO, $p = 3$

$m = -6$	
171	$3^2 * 19$
1971	$3^3 * 73$
$m = -5$	
6	$2 * 3$
8	2^3
10	$2 * 5$
14	$2 * 7$
22	$2 * 11$
26	$2 * 13$
34	$2 * 17$

表 11: 完全数 NEO, $p = 3$

$m = -4$	
25929	$3^2 * 43 * 67$
$m = -2$	
15	$3 * 5$
207	$3^2 * 23$
1023	$3 * 11 * 31$
2975	$5^2 * 7 * 17$
19359	$3^4 * 239$
$m = -1$	
4	2^2
$m = 0$	
21	$3 * 7$
2133	$3^3 * 79$
19521	$3^4 * 241$
176661	$3^5 * 727$

表 12: 完全数 NEO, $p=3$

$m=1$	
2	2
$m=2$	
3	3
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}

表 13: 完全数 NEO, $p=3$

$m=4$	
5	5
33	$3*11$
261	3^2*29
385	$5*7*11$
897	$3*13*23$
2241	3^3*83
26937	$3^2*41*73$
46593	$3^2*31*167$
$m=6$	
7	7
39	$3*13$
279	3^2*31
$m=9$	

表 14: 完全数 NEO, $p = 3$

$m = 10$	
11	11
35	$5 * 7$
51	$3 * 17$
2403	$3^3 * 89$
20331	$3^4 * 251$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
68643	$3^2 * 29 * 263$
$m = 12$	
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$

表 15: 完全数 NEO, $p = 3$

$m = 14$	
25	5^2
$m = 16$	
17	17
69	$3 * 23$
369	$3^2 * 41$
1221	$3 * 11 * 37$
20817	$3^4 * 257$
$m = 18$	
19	19
387	$3^2 * 43$
2619	$3^3 * 97$