3 項完全数の展開
前編 新しいかもしれない不変数 $\Psi(a)$

飯高 茂

平成 31 年 9 月 2 日

1　オイラー関数 $\varphi(a)$

自然数 a に対してそれ以下で a と互いに素な自然数の個数を $\varphi(a)$ と書き $\varphi(a)$ を関数とみてオイラー関数 という.

図 1: オイラー, By Jun Iitaka

$a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ に応じて,
$\varphi(a) = 1, 1, 2, 2, 4, 2, 6$ となる.
a が素数になる必要十分条件は $\varphi(a) = a - 1$ である.
a, b が互いに素なら $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ が成り立つ. これが乗法性である.
$2\varphi(a) = a$ となる 必要十分条件は a が 2 べき, すなわち $a = 2^e$ となることである.

$2\varphi(a)-1=a$ となる a には $a=3, 3*5, 3*5*17, 3*5*17*257, 3*5*17*257*65537$ などがある.

$2\varphi(a)+1=a$ となる a が実在するかどうかはわからない.

2 ユークリッド関数 $\sigma(a)$

自然数 a に対してそれの約数の和を $\sigma(a)$ と書き $\sigma(a)$ を関数とみてユークリッド関数という.

$a=1,2,3,4,5,6,7$ に応じて,

$\sigma(a)=1,3,4,7,6,12,8$ となる.

a が素数になる必要十分条件は $\sigma(a)=a+1$ である.

a,b が互いに素なら $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$ が成り立つ. これが乗法性である.

$\sigma(a)=2a$ となる a は完全数である. たとえば $a=6,28,496,8128,33550336$.

$\sigma(a)=2a-1$ となる a には $a=1,2,4,8,16,\cdots,2^e$ などがある.

$\sigma(a)=2a+1$ となる a が実在するかどうかはわからない.

図 2: ユークリッド, By Jun Iitaka

3 $\sigma(a), \varphi(a)$ を組み合わせる

$\sigma(a)$ は a より大きく,$\varphi(a)$ は a より小さい. そこで $\sigma(a), \varphi(a)$ を組み合わせてみよう.

$\sigma(a)$ と $\varphi(a)$ の平均と a の大きさを比べるために $\Psi(a)=\sigma(a)+\varphi(a)-2a$ と定義してみた. $\Psi(a)$ を新しいかもしれない不変数とよぶ.

一般に $\omega(a)$ によって,a の相異なる素因子の個数を示す.

4 $\omega(a)=1$ の場合

$a=p^e$ とする. $p-1=\overline{p}$ も使う.

$$\Psi(a)=\sigma(p^e)+\varphi(p^e)-2p^e=\frac{p^{e+1}-1}{\overline{p}}+\overline{p}p^{e-1}-2p^e.$$

$\overline{p}=p-1$ 倍して

$$\overline{p}\Psi(a)=p^{e+1}-1+\overline{p}^2p^{e-1}-2p^e\overline{p}=p^{e-1}-1.$$

ゆえに $e\geq 2$ なら $\Psi(a)=\dfrac{p^{e-1}-1}{\overline{p}}=\sigma(p^{e-2})$.

$e=1$ なら, $\Psi(a)=\Psi(p)=0$.

すなわち, a が素数なら, $\Psi(a)=\sigma(a)+\varphi(a)-2a=0$. これは期待通り.

$\Psi(a)=0$ なら, a が素数になるか.

これは面白そうな問題だ.

$e=2$ なら, $\Psi(a)=\Psi(p^2)=\sigma(1)=1$.

すなわち, a が素数の平方ならなら, $\Psi(a)=\sigma(a)+\varphi(a)-2a=1$. これは面白い. この逆が成り立つだろうか.

$e=3$ なら, $\Psi(a)=\Psi(p^3)=\sigma(p)=1+p$.

$e=4$ なら, $\Psi(a)=\Psi(p^4)=\sigma(p^2)=1+p+p^2$.

とくに, $\Psi(2^3)=\sigma(2)=1+2=3$.

$a=pq$(相異なる素数の積) とする. $B=pq, \Delta=p+q$ とおくとき

$\sigma(a)=(p+1)(q+1)=B+\Delta+1, \varphi(a)=(p-1)(q-1)=B-\Delta+1$ になるので $\Psi(pq)=B+\Delta+1+B-\Delta+1-2B=2$.

すなわち, $a=pq$ なら $\Psi(a)=2$. この逆が成り立つだろうか.

p を素数とすると $\Psi(p)=\sigma(p)+\varphi(p)-2a=p+1+p-1-p=0$ となる. この逆が成り立てば素数の判定法が 1 つできるので面白いかもしれない.

どうなるか分からないのでパソコンで計算してみた.

その結果, 自然数 a に対して $\Psi(a)\geq 0$. そして等号が成り立つのは, $a=1$ および 素数.

表 1: $\Psi(a) = \sigma(a) + \varphi(a) - 2a$ とおくとき m に対し $\Psi(a) = m$ となる a

a	素因数分解	a	素因数分解
$m = 0$		$m = 1$	
p:素数	p	p^2	p^2
$m = 2$			
pq $(p, q > p$:素数$)$	pq		
$m = 3$		$m = 17$	
8	2^3	98	$2 * 7^2$
$m = 4$		$m = 18$	
27	3^3	52	$2^2 * 13$
$m = 6$		99	$3^2 * 11$
125	5^3	147	$3 * 7^2$
$m = 7$		175	$5^2 * 7$
16	2^4	4913	17^3
$m = 8$		$m = 20$	
12	$2^2 * 3$	24	$2^3 * 3$
343	7^3	30	$2 * 3 * 5$
$m = 9$		117	$3^2 * 13$
18	$2 * 3^2$	245	$5 * 7^2$
$m = 10$		6859	19^3
20	$2^2 * 5$	$m = 22$	
$m = 12$		68	$2^2 * 17$
28	$2^2 * 7$	275	$5^2 * 11$
45	$3^2 * 5$	$m = 24$	
1331	11^3	42	$2 * 3 * 7$
$m = 13$		76	$2^2 * 19$
50	$2 * 5^2$	153	$3^2 * 17$
81	3^4	325	$5^2 * 13$
$m = 14$		12167	23^3
63	$3^2 * 7$	$m = 25$	
75	$3 * 5^2$	242	$2 * 11^2$
2197	13^3	$m = 26$	
$m = 15$		40	$2^3 * 5$
32	2^5	171	$3^2 * 19$
$m = 16$		363	$3 * 11^2$
44	$2^2 * 11$	539	$7^2 * 11$

以上の表から $\omega(a) \geq 3$ の場合で $\Psi(a)$ の最小値は 20;$a = 2 * 3 * 5 = 30$.
$m = 1 + p$ となる素数 p のあるとき $m = 1 + p = \Psi(p^3)$. これが最大値となる. 例えば

$m=20$ なら $p=19$ があるので, $m=20=\Psi(19^3), 19^3=6859$.

表 2: $\Psi(a)=\sigma(a)+\varphi(a)-2a=m$

a	素因数分解	a	素因数分解
$m=28$		$m=36$	
70	$2*5*7$	78	$2*3*13$
92	2^2*23	110	$2*5*11$
425	5^2*17	124	2^2*31
605	$5*11^2$	261	3^2*29
637	7^2*13	1573	11^2*13
$m=29$		$m=37$	
338	$2*13^2$	578	$2*17^2$
$m=30$		$m=38$	
54	$2*3^3$	165	$3*5*11$
105	$3*5*7$	279	3^2*31
207	3^2*23	867	$3*17^2$
475	5^2*19	1127	7^2*23
507	$3*13^2$	1859	$11*13^2$

表 3: $\Psi(a) = \sigma(a) + \varphi(a) - 2a = m$

a	素因数分解	a	素因数分解
847	$7 * 11^2$	50653	37^3
24389	29^3	$m = 40$	
$m = 31$		130	$2 * 5 * 13$
36	$2^2 * 3^2$	154	$2 * 7 * 11$
64	2^6	243	3^5
625	5^4	725	$5^2 * 29$
$m = 32$		1445	$5 * 17^2$
56	$2^3 * 7$	2057	$11^2 * 17$
66	$2 * 3 * 11$	$m = 41$	
833	$7^2 * 17$	722	$2 * 19^2$
845	$5 * 13^2$	$m = 42$	
29791	31^3	135	$3^3 * 5$
$m = 34$		148	$2^2 * 37$
116	$2^2 * 29$	195	$3 * 5 * 13$
575	$5^2 * 23$	231	$3 * 7 * 11$
931	$7^2 * 19$	775	$5^2 * 31$
1183	$7 * 13^2$	1083	$3 * 19^2$

- $\Psi(a) = 0$ なら a : 素数
- $\Psi(a) = 1$ なら a : 素数の平方
- $\Psi(a) = 2$ なら a : 相異なる 2 素数の積

これ以外の m なら $\Psi(a) = m$ の解は有限個 (水谷一) この結果は驚くほど鮮やかである.
数学でこのように美しい結果が出るとき, 昔の人がすでに知っていることが多い. そこで 新しいかもしれない不変数 $\Psi(a)$ と題したのである.

5 $\omega(a) = 2$ の場合

$a = p^e q^f$ とする.
$\sigma(a) = \dfrac{(p^{e+1} - 1)(q^{f+1} - 1)}{\overline{pq}}, \varphi(a) = p^{e-1}q^{f-1}\overline{pq}, 2a = 2p^e q^f.$
$\Psi(p^e q^f) = \dfrac{(p^{e+1} - 1)(q^{f+1} - 1)}{\overline{pq}} + p^{e-1}q^{f-1}\overline{pq} - 2p^e q^f$ を
$T = \overline{pq}$ 倍すると

$$T\Psi(p^e q^f) = p^{e-1}q^{f-1}(p^2q^2 + \overline{p}^2\overline{q}^2 - 2pq\overline{pq}) - p^{e+1} - q^{f+1} + 1.$$

$X=p^2q^2+\overline{p}^2\overline{q}^2-2pq\overline{pq}), Y=pq-\overline{pq}, \Delta=p+q$ とおくとき, 簡単な計算によって $X=Y^2, Y=\Delta-1$.

かくして,

$$T\Psi(p^eq^f)=p^{e-1}q^{f-1}(\Delta-1)^2-p^{e+1}-q^{f+1}+1.$$

ここで計算の確認のため, $e=f=1$ と仮定する.

$$T\Psi(p^eq^f)=p^{e-1}q^{f-1}(\Delta-1)^2-p^{e+1}-q^{f+1}+1=(p+q-1)^2-p^2-q^2+1=2pq-2\Delta+2=2\overline{pq}=2T.$$

よって, $\Psi(pq)=2$.

A 型なら $a=2^eq$ と書けて $T=\overline{q}$. 式は簡単になり $\Psi(2^eq)=(2^{e-1}-1)q+3*2^{e-1}-1$.

たとえば, $a=28$ なら, $\Psi(2^2*27)=(2-1)7+3*2^{2-1}-1=7+6-1=12$.

6 $\omega(\alpha)\geq 3$ の場合

α の最大素因子を r, α の r での指数 を e とすると $r\geq 5, \alpha=ar^e, \omega(\alpha)-1=\omega(a)\geq 2$.

$\sigma(\alpha)=\sigma(a)\dfrac{r^{e+1}-1}{\overline{r}}, \varphi(\alpha)=\varphi(a)r^{e-1}\overline{r}, 2\alpha=2ar^e$ によって $\overline{r}$ 倍すれば

$$\overline{r}\Psi(\alpha)=\sigma(a)(r^{e+1}-1)+\varphi(a)r^{e-1}\overline{r}^2-2a\overline{r}r^e.$$

$\sigma(a)=\Psi(a)-\varphi(a)+2a$ を用いて変形して

$$\overline{r}\Psi(\alpha)=(\Psi(a)-\varphi(a)+2a)(r^{e+1}-1)+\varphi(a)r^{e-1}\overline{r}^2-2a\overline{r}r^e.$$

$\omega(a)\geq 2$ により, $a\geq 6$; のみならず 1) co $\varphi(a)=a-\varphi(a)\geq 4$, 2) $\Psi(a)\geq 2$ によって,

$$\overline{r}\Psi(\alpha)\geq\Psi(a)(r^{e+1}-1)+(-\varphi(a)+2a)(r^{e+1}-1)+\varphi(a)r^{e-1}\overline{r}^2-2a\overline{r}r^e.$$

$W=(-\varphi(a)+2a)(r^{e+1}-1)+\varphi(a)r^{e-1}\overline{r}^2-2a\overline{r}r^e$ とおくと $\overline{r}\Psi(\alpha)=\Psi(a)(r^{e+1}-1)+W$.

W が正になることを確認する.

$W=\varphi(a)U+2aV$. ただし $U=r^{e-1}\overline{r}^2+1-r^{e+1}=1-2r^e+r^{e-1}<0, V=r^{e+1}-1-\overline{r}r^e=r^e-1$.

$\omega(a)\geq 2$,$U<0$ によって, $\varphi(a)\leq a-4$ により $\varphi(a)U\geq(a-4)U$. $r\geq 5$ を使い,

$$
\begin{aligned}
W = \varphi(a)U + 2aV &\geq (a-4)U + 2aV \\
&= a(2V+U) - 4U \\
&= a(2r^e - 2 + 1 - 2r^e + r^{e-1}) - 4U \\
&= a(r^{e-1} - 1) - 4U \\
&= a(r^{e-1} - 1) - 4(1 - 2r^e + r^{e-1}) \\
&= a(r^{e-1} - 1) - 4 + 8r^e - 4r^{e-1}) \\
&\geq 6(r^{e-1} - 1) - 4 + 8r^e - 4r^{e-1}) \\
&= 2r^{e-1} - 10 + 8r^e.
\end{aligned}
$$

$\Psi(a) \geq 2$ により

$$
\begin{aligned}
\overline{r}\Psi(\alpha) &= \Psi(a)(r^{e+1} - 1) + W \\
&= 2(r^{e+1} - 1) + W \\
&\geq 2r^{e+1} - 2 + 2r^{e-1} - 10 + 8r^e.
\end{aligned}
$$

$$\Psi(\alpha) \geq 2\sigma(r^e) + 2\sigma(r^{e-2}) + 8\sigma(r^{e-1}).$$

ここで, $e = 1$ のときは公式は修正されて,
$2r^{e+1} - 2 + 2r^{e-1} - 10 + 8r^e = 2r^2 - 10 + 8r = 2(r-1)(r+5)$ により

$$\Psi(\alpha) \geq 2(r+5).$$

最も小さい場合は, $r = 5, e = 1, a = 6$. $\Psi(\alpha) \geq 2(r+5) = 20$. $\alpha = 2 * 3 * 5 = 30$.
このとき, $\Psi(\alpha) = 20)$
　これによって, 評価式が定まり厳密な証明ができる.

私はひたすら計算をしてこの結果を得たが, 毎日カルチャーや書泉の講義でともに数学の研究に励む土屋知人さんはより自然な証明を与えている. これは特記したい.