RH仮説と2定理の不等式について

宇都宮 潔

2025年2月21日

Littlewood(1914)は, Pintzの素数近似式(1980)を知り得なかったため, RHなしでも定理2が成立することを知り得なかった. von Kochの定理1の不等式は[PEE](2.4)式により, 不等式 $\sqrt{x}\ln(\ln(\ln x)/\ln x<\sqrt{x}\ln x$が言えるため前者から導ける. 本稿は定理2を示すために, 平易な例をあげ, グラフ解説, 根幹をなす不等式の相互関係・その導出方法を記した. また, Pintzの近似式とNewton法を用いた, 巨大数(Skewes数)の検出法での, 2変換$t=e^{e^x}$と $t=e^x$のその成否と理由も分析した.

【大まかな話の流れ】

$$\boxed{\pi(x)\sim\int_0^x\frac{dt}{\log t}} \Rightarrow \boxed{\pi_2(x)\sim 2C_2\int_0^x\frac{dt}{(\log t)^2}\quad C_2=\prod_{p\geqq 3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}=0.6601\cdots.} \Rightarrow \boxed{\text{Littlewoodの定理と Marek Wolfの実証実験}}$$

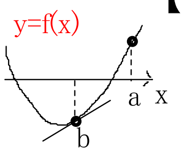
$$\left(\frac{x}{\log x}\right)'=\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\Leftrightarrow\int_2^x\frac{dt}{\log t}=\frac{x}{\log x}+\int_2^x\frac{dt}{(\log t)^2}\ ;$$

$\pi(x)\sim\dfrac{x}{\log x}$ (<u>従来近似式での限界</u>) vs $\pi(x)\sim\dfrac{x}{\log x-1}$ (<u>Pintzの近似式</u>[PEE])

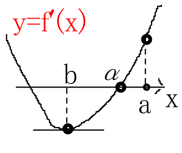
従来の予想	(1) xが小さいとき, $\pi(x)<Li(x)$ が成り立つ. (2) xが大きいとき, $\pi(x)>Li(x)$ が成り立つ.	Littlewoodが<u>RH仮説の下</u>で, これを否定(1914).

最新研究では, x～10^{316}付近で(1)から(2)への最初の(符号)変化が起きる, とされる.

【論法】



(1) x≧aのとき, f(x)≧f(a)=0であることを示すために, まず, b<aなる値bに対し, x≧bで, f(x)が増加である, すなわち, f′(x)>0を示し, 次いで, f(x)≧f(a)を言う.その結果,f(x)がどのようなxの値aから, 正になるかが不明であっても, 単調増加であれば, その範囲内で必ず, f(x)＞f(a)＝0となるx＝aが存在する, という期待できる事実を使う.



(2) 左のグラフがy=f′(x)であるとき, x=bはf(x)の$x_{変曲点}$. x=αの前後で, f′(x)の符号が変化し, x<αでの減少から, α<xでの増加に転じる.

素数の場合における難しさは，いつ素数pが現れるか予測できない点による．$p \leqq x$をみたすpで範囲を大雑把に限定しても，期待通りに素数pが現れる保証はないためによる．<u>それでも$f'(x)>0$となるxの範囲が永久に続く限り，いつか必ず$f(x)$の符号が正に変わる，</u>からです．

【注意点】 (1) $y=f'(x)$のグラフの形状は，どんなCの値についても，同じ下に凸の放物線型である．$x_{変曲点}$を過ぎ，$x=\alpha$で横軸と交わる．⇔ 方程式$f'(x)=0$の解$x=\alpha$をNewton法で求めた.その難点は公式$x_2=x_1-f(x)/f'(x)$のある．点x=aにおける接線の傾き$f'(x)$が0に近いと，このままでは計算できないが，変換$x=e^{e^t}$を行うことで解消できる．

(2) 肝心の$f(x)$の値が正に転じるxの値aに対して，$f(x) \geqq f(a)=0$となるaの値は不明のままで良いとして，上に述べた素数特有の出現事情のために(諦めて)処理する．

[グラフを使って微分法による不等式証明法を復習]

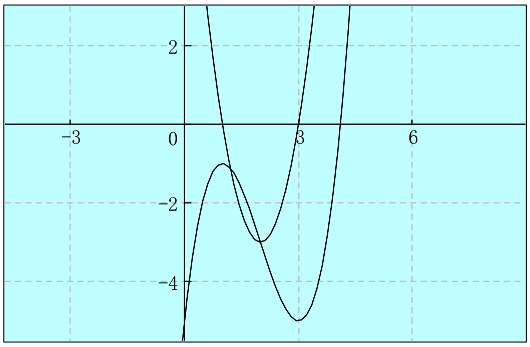
まず，例1・例2は高校数学から．

例1

微分 積分

$y_1=3x^2-12x+9$　　$x>3$のとき，$y_1=y_2'>0$より，

$y_2=x^3-6x^2+9x-5$　　変曲点(2,-3)，
$x>3$のとき，y_2は単調増加．



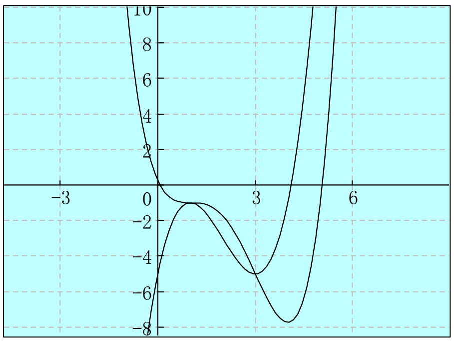
$y_1=y_2'>0$に変わるx切片=3で，y_2は単調増加に転じ，$x_1 \fallingdotseq 4.10380$で，$y_2>0$に変わる．

例2

微分 積分

$y_2=x^3-6x^2+9x-5$

$y_3=\dfrac{x^4}{4}-2x^3+\dfrac{9}{2}x^2-4x+\dfrac{1}{4}$



$y_2(1)=y_3(1)=-1$, $y_2(3)=y_3(3)=-5$

$y_2>0$に変わる$x_1 \fallingdotseq 4.103804$,再び$y_3=0$となる$x_2 \fallingdotseq 5.05978$.

$x_1<x_2$. <u>$y'>0$なら，xが大きくなるのを待てば，$y>0$になる</u>．

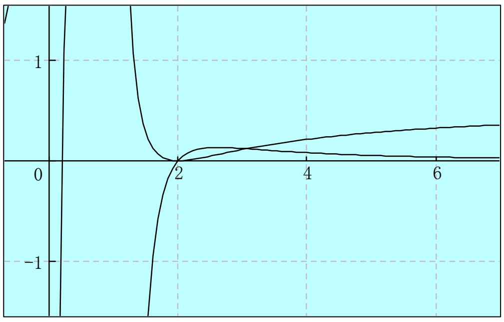
例4が，最終目標に当たりますが，その簡易版の例3はその練習用です．比較対照の目的で，例4の交点をわざと横軸上に載せるために，定数8.6811を加えています.ご理解下さい.両者とも穴1個で位相的に等しいことを了解して頂くためです．なお，ln xは自然対数で，$\log_e x$と同一．

例3

微分　積分

$$y_4=\frac{e}{2}e^{-\frac{1}{x-1}}+\frac{1}{x-1}-\ln\frac{x}{x-1}-C1;\ C1=\frac{3}{2}-\ln 2$$

$$y_5=\frac{e/2}{(x-1)^2}e^{-\frac{1}{x-1}}-\frac{1}{x(x-1)^2}$$



2交点のx座標は，

$x=2$,　$x_3=3.06467271374564$

$2<x<x_3$のとき，$y_4<y_5$，$x_3<x$ のとき，$y_4>y_5$.

$y_5=y_4'>0$に転じる$x=x_3$より大きくなれば，

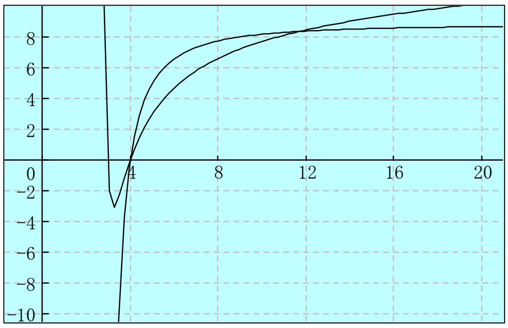
$y_4-y_5>0$に転じる．$x>x_3$のとき，ともに正より，

$y_4>y_5>0$. すなわち，$x>x_3$のとき，$y_4>0$.

例4　$C_1≒8.68105381832855$ とする.

$$y_6=10\cdot\frac{\sqrt{x}\ln(\ln(\ln x))}{\ln x}-\left(\mathrm{Li}(x)-\frac{x}{\ln x-1}\right)+C_1$$

$$y_7=10\cdot\frac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}-\frac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}+C_1$$



2交点のx座標は，

$x_4 ≒ 4.018552012152985$, $x_5=11.750110368411$

$x_4<x<x_5$のとき，$y_6<y_7$，$x_5<x$のとき，$y_6>y_7$.

$y_7=y_6'>0$に転じる$x=x_5$より大きくなれば，

$y_6-y_7>0$に転じる．$x>x_5$のとき，ともに正より，

$y_6>y_7>0$. すなわち，$x>x_5$のとき，$y_6>0$.

[関連不等式]

例3と例4に関連し，十分大きいxの値に対して，次の不等式が成り立つ．

(Inq.1)
$$\frac{1}{x(x-1)^2}<\frac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}<\frac{e/2}{(x-1)^2}e^{-\frac{1}{x-1}}<C\frac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}\quad (C>1)$$

4式を左から順に，Y_1,Y_2,Y_3,Y_4とすると，C=10の場合；

$x>21.138$のとき，$Y_4>Y_2$. また，$x>15.429$のとき，$Y_4>Y_3$である．

Y_1,Y_3は例3の関数y_5に対応し，Y_2,Y_4は例4のy_7に対応する．

Y_1,Y_3は目標達成のための，あくまで補助なので，破棄する．

したがって，C=10の場合：$x\geqq 21.138$のとき，$\frac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}<10\frac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}$.

Cの値の値の大小によらず，xが十分大きいとき，$Y_2<Y_4$となる．

具体的なC (C>1)に対する境界値xはP11の[解List]を参照．

[(Inq.1)の導出について]

方程式$\dfrac{1}{x-1}=\ln(\ln(x-1))$の解を$x_0=4.705\cdots$とする。

$x>x_0$のとき，$-\dfrac{1}{x-1}>-\ln(\ln\,(x-1))=\ln\dfrac{1}{\ln(x-1)}$

$e^{-\frac{1}{x-1}}>e^{\ln\frac{1}{\ln(x-1)}}=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ for $x>x_0$.

また，$\dfrac{1}{x-1}=\ln(\ln x-1)$の解を$x_1$とすると，$x_1=8.518\cdots$.

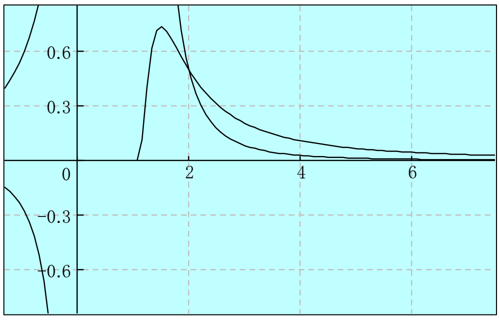
$x>x_1$のとき，$-\dfrac{1}{x-1}>-\ln(\ln x-1)=\ln\dfrac{1}{\ln x-1}$より，$\dfrac{1}{\ln x-1}<e^{-\frac{1}{x-1}}$ for $x>x_1$.

また，$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\ln x}<\dfrac{1}{\ln x-1}$であるから，$\dfrac{1}{x(x-1)^2}<\dfrac{1}{(x-1)^2}e^{-\frac{1}{x-1}}$ for $x>x_1$.

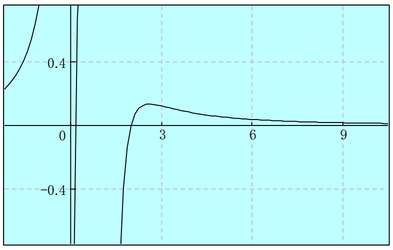
方程式$\dfrac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}=10\dfrac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}$の解$x_3=21.137\cdots$と次のグラフを参考に，3解$x_1,x_2,x_3$とこの3式を組み合わせて，(Inq.1)が導かれる.

[Y_1とY_3]

$Y_1=\dfrac{1}{x(x-1)^2}$と$Y_3=\dfrac{e/2}{(x-1)^2}e^{-\frac{1}{x-1}}$は補助にすぎないが念のために，方程式$Y_1=Y_3$の解$x_4=2$に対して，$x<x_4$のとき，$Y_1>Y_3$; $x>x_4$のとき，$Y_1<Y_3$.

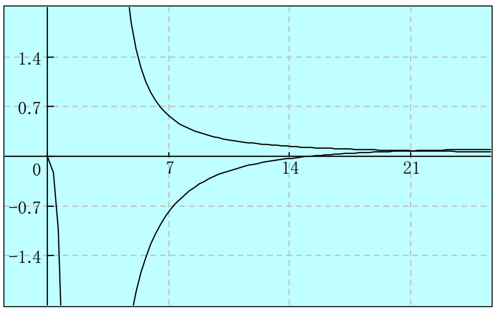


$y=\dfrac{e/2}{(x-1)^2}e^{-\frac{1}{x-1}}-\dfrac{1}{x(x-1)^2}$は,グラフから$x>x_4$で$y>0$.

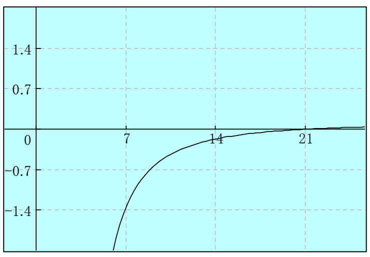


yは例3のy_5で，$\int_0^x y_5dx=y_4$.

[Y_2とY_4]　$Y_2=\dfrac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}$と$Y_4=10\dfrac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}$;方程式$Y_2=Y_4$の解$x_3=21.137\cdots$に対して，$x<x_3$のとき，$y_4<y_2$，$x>x_3$のとき，$y_4>y_2$である.



$y=10\dfrac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}-\dfrac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}$は，グラフから$x>x_3$で，$y>0$.



$\int_0^x ydx=\mathrm{Li}(x)-\dfrac{x}{\ln x-1}$.

【関連する諸定理】

素数の個数近似　　$\pi(x) \sim \int_0^x \frac{dt}{\log t}$　（ガウスの予測, 1792頃(15才)）

ふたご素数個数の近似　$\pi_2(x) \sim 2C_2\int_0^x \frac{dt}{(\log t)^2}$, $C_2=\prod_{p\geqq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}=0.6601\cdots$（定数）.

リーマン予想（RH,1896）:

すべての $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ の自明でない零点sは, 直線 $\mathrm{Im}(s)=\frac{1}{2}$ 上にある.

素数定理(アダマールとド・ヴァレ・プーサンによる証明,1896)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

素数定理の秀逸な証明論文は[**山下剛**](Smartに切れ味よく解説. 理解に最適).

定理1 (von Koch,1900) RH仮説の下で, 次式が成り立つ.[WN2]

(K.1)　　$\pi(x)=\mathrm{li}(x)+O\left(\sqrt{x}\log x\right)$.

定理2 (Littlewood, 1914) RH仮説の下で [川面][LC][WN2]

(L.1)

$$\psi(x) - x = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\log(\log(\log x))\right),$$

$$\pi(x)-\mathrm{li}(x)=\Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\frac{\log(\log(\log x))}{\log x}\right)$$ が成り立つ.

(L.2)　　$\pi(x)-\mathrm{li}(x)$は, その符号を無限回変える.

定理3 (Pintz, 1980)　$\psi(x)$が

(P.1)　　$\psi(x)=Bx+\frac{(C+o(1))x}{\log x}$

を満たすのであれば, B=1, かつ C=0でなければならない.

その帰結として, 次の**Pintzの近似式**(P.2)が成り立つ[LPT].

(P.2)　　$\pi(x) = \frac{x}{\log x-1}$.

私は既に[REE]のpage.5で, $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$の符号変化を(P.2)とLi(x)の級数展開式を用いて示した.以下に概略を再掲します:

(同2.3)　　$\mathrm{Li}(x):=\int_{\mu}^{x}\frac{dt}{\ln t}=\gamma+\ln(\ln x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^n}{n\cdot n!}$

ただし, $\mathrm{Li}(x):=\int_{\mu}^{x}\frac{dt}{\ln t}$ ($\mu=1.45136\cdots$), $\mathrm{li}(\mu)=$主値$\int_0^{\mu}\frac{dt}{\ln t}=0$, $t\neq 1$.

⇒ 公式$\int_a^c+\int_c^b=\int_a^b$で,$a=0,b=x,c=\mu$とおけば, $\mathrm{li}(x)=\int_0^x\frac{dt}{\ln t}=\int_{\mu}^{x}\frac{dt}{\ln t}=\mathrm{Li}(x)$.

(P.2)から，$\pi(x) = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln x)^n}$なので，変換 $x=e^t$を介して級数展開:

$$\mathrm{Li}(x)-\pi(x) = \mathrm{Li}(e^t)-\pi(e^t) = \gamma+\ln t+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{t^k}{k\cdot k!}-\frac{e^t}{t^k}\right)$$

この最終項のe^tのテーラー展開の$n\geqq 2k+1$の項で，$t^k/k\cdot k!$の誤差の累積のために，Li(x)−π(x)の符号が任意のxに対して，必ず負に変わることを示した.

［注］これによって定理2の(L.2)部分がRH仮説なしで，定理3の(P.2)によって示されたことになる.

［湧き上がる問題点と今回の論考の動機］

Inghamによれば，Littlewoodは，上の定理2の証明に費やしたページ数が

① RH仮説が誤りとの下で1ページ，

② RH仮説が正しいとの仮定の下で12ページ

と述べている.このen.wiki記事は更に本人はRHは不成立と信じていた,という.
定理3(Pintz)を知るはずもない彼の仕事は，彼の新たな近似式(P.2)を使っていない事実がある. それでは(P.2)を使って実証してみる価値がある，と言えるし，新たな証明が可能だと信じる理由になる，ではないか，と考えた次第である.
なお，Littlewoodの定理2は[TT]で更新されており，Trudgianは$|\pi(x)-\mathrm{li}(x)|$の上限 を与えた，と[PNT](en.wikipedia)は記す.

定理4 (T.Trudgian, 2016)

$$|\pi(x)-\mathrm{li}(x)|\leq 0.2795\frac{x}{(\log x)^{3/4}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\log x}{6.455}}\right) \text{ for } x>229.$$

これは，$\frac{1}{(\log x)(\log x-1)^2}=O\left(\frac{1}{x(\log x)^{7/4}}\right)$を意味する.

【本論】

定理1 (von Koch,1900) [WN2]

$\zeta(s)$のすべての複素零点が直線Re s=1/2に載っているという仮定の下に，

(1) $$\pi(x)=\mathrm{li}(x)+O\left(\sqrt{x}\ln x\right).$$

定理2 (Littlewood, 1914) リーマン仮説の下で [LC][WN2]

(ⅰ)
$$\psi(x) - x = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\ln(\ln(\ln x))\right),$$
$$\pi(x)-\mathrm{li}(x)=\Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\frac{\ln(\ln(\ln x))}{\ln x}\right)$$ が成り立つ.

(ⅱ) $\pi(x)-\mathrm{li}(x)$は, その符号を無限回変える.

また, 私の[HP2] P11,12の補遺3,4から, 次式(2)が成り立つ.

命題1 $x>e^4$ (>55)のとき,

(2)
$$\int_2^x \frac{du}{\sqrt{u}\ln u} < \Omega\left(\sqrt{x}\frac{\ln(\ln(\ln x))}{\ln x}\right) < \sqrt{x}\ln(\ln x)).$$

上記の3個の定理と命題から, RHの下で (3)式が成り立つことを示した.

(3)
$$\mathrm{li}(x) - \pi(x) < O(\sqrt{x}\ln x)$$

しかし, Littlewoodの時代(1914)には, Pintzによる素数定理の近似式(1980) $\pi(x)\sim x/(\log x-1)$ は未証明の上, 現在でもアダマールとド・ヴァレ・プーサンによる $\pi(x)\sim x/\log x$ が支配的で, 素数定理を紹介するWebpageでもPintzによるものを見かけない. 重大な差異は, P8(ⅰ)と(ⅱ)の比較対照で判明する. 式$\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$で, Li(x)はリーマン明示公式により, $\psi(x)$のため, 素数をp/m個として加算している. これは, Li(x)が$\pi(x)$よりもざっとLi($\sqrt{x}$)/2程度大きい, ことになる.本稿では,もっと素朴に, 対数積分$\mathrm{Li}(x)=\int_2^x \frac{dt}{\log t}$で扱っている.

また, 素数を数える関数$\pi(x)$は, 数x以下の素数pの個数を数えるから, 整数xが合成数であればカウントせず, 素数のときにのみ, 個数が以前より1だけ増える階段関数である.平たく言えば, ガウス関数(床関数)の素数版である. Littlewoodはそれまで信じられていた, どんなxに対しも, $\mathrm{Li}(x)>\pi(x)$が成立することが間違いであることを示したのである.これが覆る最小のxの値(Skews数)は約10^{316}付近である, とされているが, 詳しい値は未だ不明.

以上を念頭に, $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$の符号変化を考察するProjectの開始である. 主な武器はPintzの近似式による, 微分f′(x)が"2階最良近似式"であること.

以下では, $p\leqq x$を満たす素数pの個数を扱うので, xを整数とする.

$f(x)=\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$と $g(x)=\sqrt{x}\frac{\ln(\ln(\ln x))}{\ln x}$から, $f(x)<Cg(x) \Leftrightarrow f(x)=O(g(x))$を示すため, $f'(x)=O(g'(x)) \Leftrightarrow f'(x)<Cg'(x)$ $(C>0)$を導く.しかし, f′(x)は発散のためHLの2人は, 記号$\Omega_{\pm}$を導入. $|f(x)|=|\mathrm{Li}(x)-\pi(x)|$ ならば, $O \Rightarrow \Omega$.

（ｉ）$\pi(x)=x/\ln x$,（ⅱ）$\pi(x)=x/(\ln x-1)$ の各場合を考察し，（ⅱ）をとる．最後に,得られた結果に対応して，微分法と積分法が互いに逆演算の関係にあることを適用する(必要なら再び例1～例4で復習)．f(x)の積分定数は $\mathrm{Li}(2)=0$,or $\mathrm{Li}(\mu)=0$ として直ちに定まる．以下では,Li(2)=0の方を用いた．

さて，$\mathrm{Li}(x)=\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{\ln t}$から，$\mathrm{Li}'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{\ln t}=\frac{1}{\ln x}$．

（ｉ）$\pi(x)=x/\ln x$の場合：定理2より，$f(x)=\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{\ln t}-\frac{x}{\ln x}=O\left(\sqrt{x}\frac{\ln\ln\ln x}{\ln x}\right)$．

$\left(x(\ln x)^{-1}\right)'=1\cdot(\ln x)^{-1}+x\left(-(\ln x)^{-2}/x\right)$ より，

$$f'(x)=\frac{1}{\ln x}-\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{(\ln x)^2}\right)=\frac{1}{(\ln x)^2}\text{から，}f'(x)=O\left(\frac{1}{(\ln x)^2}\right).$$

（ⅱ） $\pi(x)=x/(\ln x-1)$の場合：定理2より，$f(x)=\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{\ln t}-\frac{x}{\ln x-1}=O\left(\sqrt{x}\frac{\ln\ln\ln x}{\ln x}\right)$．

$$f'(x)=\frac{1}{\ln x}-\left(\frac{1}{\ln x-1}-\frac{1}{(\ln x-1)^2}\right)=-\left(\frac{1}{\ln x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)+\frac{1}{(\ln x-1)^2}$$
$$=\frac{1}{(\ln x-1)^2}-\frac{1}{(\ln x)(\ln x-1)}=\frac{1}{\ln x-1}\left(\frac{1}{\ln x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$
$$=\frac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}=O\left(\frac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}\right).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=(\mathrm{Li}(x)-\pi(x))'=O\left(\dfrac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}\right)\\ \pi(x)=x/(\ln x-1)\end{array}}$$

（ｉ）$f'(x)=O\left(\dfrac{1}{(\ln x)^2}\right)$　（ⅱ）$f'(x)=O\left(\dfrac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}\right)$

（ｉ）は$(\ln x)^{-2}$で(−2)次,（ⅱ）は$(\ln x)^{-1}(\ln x-1)^{-2}$で(−3)次であることに注目．（ｉ）の(旧)素数定理近似式$\pi(x)\sim x/(\ln x)$での$O\left((\ln x)^{-2}\right)$よりも収束が速い．下の2曲線 $y=C\sqrt{x}-(\ln x)\ln(\ln(\ln x))$と$y=C\sqrt{x}-(\ln x-1)^2\ln(\ln(\ln x))$のグラフを見て両者の形状も範囲も大きく異なることを知り，$\pi(x)$近似式の正しい理解を深めて，是非とも，「Pintz式」での正当な扱いを始めて頂きたい．

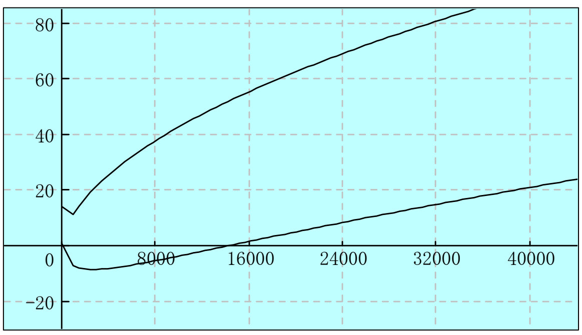
C=1/2の場合の両グラフで検証:

$\lim_{x\to e} y=\dfrac{\sqrt{e}}{2}+\infty=0.82\cdots+\infty=\infty$, $\dfrac{\sqrt{e^e}}{2}-e\ln 1=1.94\cdots$.　$\dfrac{\sqrt{e^e}}{2}-(e-1)^2(0)^2=1.946\cdots$, $\dfrac{\sqrt{e^{e^e}}}{2}-(e^e-1)^2(1)^2=776.16\cdots$.

① $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}-(\ln x)\ln(\ln(\ln x))$

② $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}-(\ln x-1)^2\ln(\ln(\ln x))$

①は上側のグラフで，発散が早い事が右グラフのx切片から分かる．
②は下側のグラフで，発散が遅い．



g(x)はLittlewoodの定理の式．これを微分し，f′(x)とg′(x)を比較する．

$g(x)=\sqrt{x}\dfrac{\ln(\ln(\ln x))}{\ln x}$, $\boxed{①\ \ f(x)=O(g(x)) \Leftrightarrow f(x)<Cg(x),\ ^{\exists}C>0}$ を微分形式で扱う.

$$g'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}(\ln x)^{-1}\ln(\ln(\ln x))-\sqrt{x}\cdot x^{-1}(\ln x)^{-2}\ln(\ln(\ln x))+x^{1/2}(\ln x)^{-1}\cdot\frac{1}{x(\ln x)\ln(\ln x)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}(\ln x)^2}\left\{(\ln x)\ln(\ln(\ln x))-2\ln(\ln(\ln x))+\frac{2}{\ln(\ln(\ln x))}\right\}=O\left(\frac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}\right).$$

(ⅱ)の場合: $f'(x)=O\left(\dfrac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}\right)$, $g'(x)=O\left(\dfrac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}\right)$

②さらに, 扱いを容易にするために同値変形⇓

(TE1) $\dfrac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}\overset{?}{<}C\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{C}\sqrt{x}\overset{?}{<}(\ln x-1)^2\ln(\ln(\ln x))$

[?は大小関係変化の意味] $f'(x)=O(g'(x))\Leftrightarrow f'(x)<Cg'(x),\ ^{\exists}C,\ C>1.$

(TE2) $\dfrac{1}{(\ln x-1)^2}\overset{?}{<}C\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{C}\sqrt{x}\overset{?}{<}(\ln x-1)^2\ln(\ln(\ln x))$

TE2はTE1の代用. グラフはほぼ同じで, 方程式y1=y2の解xは, 完全に一致する. ⇒ TE2が便利に利用できる.

(TE1), (TE2)ともにC>1のCに対して, xが十分大きいとき, 右辺の関数の方が左辺の関数よりも大きくなる(グラフ[?]参照).

(ⅰ)の場合: $f'(x)=O\left((\ln x)^{-2}\right)$, $g'(x)=O(\ln(\ln(\ln x))/\sqrt{x}\ln x$ から,

(TE3) $\dfrac{1}{\ln x}\overset{?}{>}C\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{C}\sqrt{x}>(\ln x)\ln(\ln(\ln x))$

TE3は精度が悪いために使用しない. $\pi(x)\sim x/\ln x$が原因

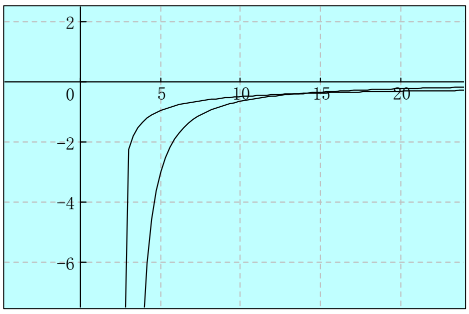
[Ⅰ]目標: ①関数$y=C\ln(\ln(\ln x))-1/(\ln x-1)^2$ $(x>e)$の符号変化を調べる.

② Cのどんな値に対しても, ①のグラフ形状が同じことを見て証明に利用.

$\boxed{C=1}$ $y1=\dfrac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{(\ln(x)-1)^2}$

$y2=\dfrac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\ln(x)}$

方程式y1=y2の解xはどのCの値に対しても同じ値.

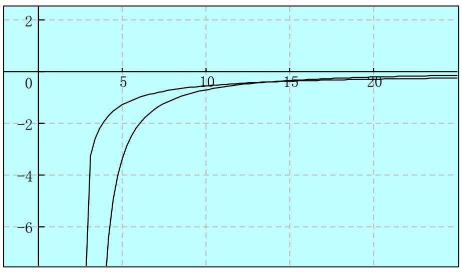


$\dfrac{1}{(\ln(x)-1)^2}=\dfrac{1}{\ln(x)}\rightarrow(\ln x)^2-3\ln x+1=0$, $\ln x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ [(黄金比)$^{\pm2}$]

(a) $(\ln x)^2-\ln x+1<0$ if $x<e^{(3+\sqrt{5})/2}$. $e^{(3+\sqrt{5})/2}=13.7\cdots>e^2=7.3\cdots$.

$1<\ln x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ if $e<x<e^{(3+\sqrt{5})/2}$, then y1<y2.

(b) $(\ln x)^2-\ln x+1>0$ if $x>e^{(3+\sqrt{5})/2}$, then y1>y2.



$\boxed{C=2}$ $y1=2\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{(\ln(x)-1)^2}$, $y2=2\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\ln(x)}$

$2\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{(\ln(x)-1)^2}$ 解はx = 80.26⋯. 即ち, y1には符号の変化がある.

$2\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\ln(x)}$. C=2では解なし. C=6, 7⇒

[cf.] $6\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\ln(x)}$ 解 x = 46.2626663382257

$7\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\ln(x)}$ 解 x = 34.9824747858767

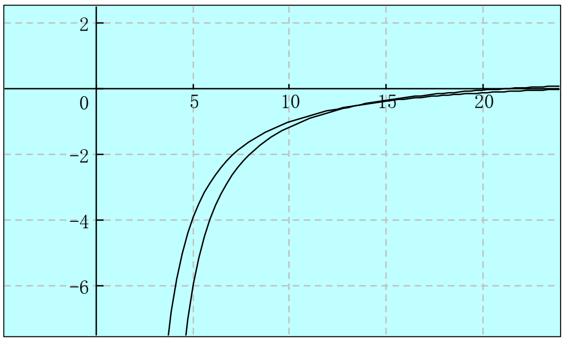
$\boxed{C=10}$

$$y=10\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$$

$$y=10\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\ln(x)}$$

$$10\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2} \qquad x = 21.137437482385$$

$$10\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\ln(x)} \qquad x = 24.9111573933102$$

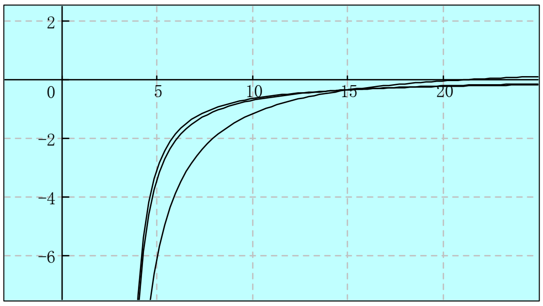


以下，目標のTE1に対応するグラフを扱う.

$$y_1=\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$$ yの値に符号変化はない.(直ぐ下の一覧で触れる)

$$y_2=2\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$$ x≒80.3で符号が変わる.

$$y_{10}=10\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$$ x≒21.1で符号が変わる.



$$y1(x)=\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$$

$$y2(x)=2\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$$

$$y10(x)=10\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}-\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$$

y1(5)= −3.024⋯	y1(15)= −0.3437⋯	y1(16)= −0.313⋯
y2(5)= −3.356⋯	y2(15)= −0.3447⋯	y2(16)= −0.308⋯
y10(5)= −6.013⋯	y10(15)= −0.3525⋯	y10(16)= −0.269⋯

Cの値に対応し，関数yをy_Cと書くと，第2項は3者とも同じゆえ，初めは$y_1>y_2>y_{10}$であるが，$x=e^{(3+\sqrt{5})/2}=13.708\cdots$を過ぎると，やがて，逆転し，$y_{10}>y_2>y_1$となる. その過程で，方程式$y_C=0$の唯一の解xは，Cの値(C>1)の増大に伴い，ある極限値に近づく[cf:下リスト]. Cがどんな値を揺れ動きつつ取っても，それに対応する唯一の解xの値の前後で y_Cの符号は変わる.逆に言えば，p≦xのとき，xの値が単調増加するとき，仮にCが乱数値をとっても，それに対応する方程式y1＝y2の解xは常に唯一なので，y=y1−y2には符号変化が起きる. TE1はTE2と同値ゆえ

$$f'(x)=(\mathrm{Li}(x)-\pi(x))'=C\cdot\frac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}-\frac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}$$ の符号変化も頻繁に起きる.

> Page1～2[論法](2)で述べたことから，どのC値に対してもNewton法で求めた解xよりも大きい値で，Li(x)−x/(ln x−1)の符号が必ず変わる値の存在(値不明は仕方ないが)が分かる.

[解List] いずれもNewton法を用いた.

$$\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$$ 解は存在しない.

$$2\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2} \qquad x = 80.2643153814483$$

巨大数(Skewes数)は解ではないのか?

$$1.36\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2} \qquad x = 605.028128111167$$
[ほぼ上限][C=1.36ほぼ下限]

$$1.38\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2} \qquad x = 392.114094433017$$

$10\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$	x = 21.137437482385	$1.5\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$	x = 198.013409884381
$40\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$	x = 16.5395203070733	$1.6\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$	x = 148.405506529221
$100\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$	x = 15.7015384060312	$1.7\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$	x = 120.552115267348
$1000\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$	x = 15.2086156243764	$1.8\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$	x = 102.477859295279
$10^{15}\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$	x = 15.1542622414793 [ほぼ下限]	$1.9\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$	x = 89.741282914958

$f1(x)=\frac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}$, $g1(x)=\frac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}$ に対し, $f1(x)\gtreqless g1(x)$ を考察することは,

$$C\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}\ln(x)}=\frac{1}{(\ln x)(\ln(x)-1)^2}\Leftrightarrow C\cdot\frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\frac{1}{(\ln(x)-1)^2}$$

であるから, 同値であり, 上記Listに一致する値の解を得られる.

[探索1] ln(ln t)= xとおき, の事態を克服するために, この工夫で探索を続けた.

$$f(t)=C\frac{\ln(\ln(\ln t))}{\sqrt{t}}-\frac{1}{(\ln t-1)^2}\Leftrightarrow f(x)=Ce^{-e^x/2}\ln x-\frac{1}{(e^x-1)^2}$$

変換$t=e^{e^x}$はNewton法のスチェルチェス積分版

$$f'(x)=-\frac{Ce^{-x/2}}{2}e^{-e^x/2}\ln x+C\cdot\frac{e^{-e^x/2}}{x}+\frac{2e^x}{(e^x-1)^3}$$

$$=Ce^{-e^x/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x/2}\ln x+\frac{1}{x}\right)+\frac{2e^x}{(e^x-1)^3}.$$

この変換で, 公式$x_2=x_1-f(x)/f'(x)$で,$f'(x)$が0よりも相当大となり, 境界値付近でも計算可能になる. ⇒ P20枠内右の傾きmの値を参照.

$x2=x1-\frac{f(x)}{f'(x)}$より, $x2=x1-\frac{Ce^{-e^x/2}\ln x-(e^x-1)^{-2}}{Ce^{-e^x/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x/2}\ln x+\frac{1}{x}\right)+2e^x(e^x-1)^{-3}}$

⇒ 大雑把に, $x2\sim x1-\frac{\ln x}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}e^{-x/2}\ln x}$で近似可能.この解は$x_{不動点}=6.97770384456574$.

無事 が解消 $\boxed{c=1.3577}$

① x1= 4	x2 = 6.99256640643307
② x2= 6.99256640643307	x3= 6.99257788727439
③ x3= 6.99257788727439	x4 = 6.99257788733961
④ x4=6.99257788733961	x5 = 6.992577887339
e^{x5}= 1088.52395451778	xx=1088.52395451778

$e^{xx/10}$= 1.87929382458793×10^{47}

e^{xx} = $(1.87929382458793)^{10}\times10^{470}$ = $5.49473644\underline{817819}\times10^{472}$

マイソフトのNewton法の解では, $e^y=(1.87929382459923)^{10}\cdot10^{470}=5.49473644\underline{850859}\times10^{472}$,

他方, 第2項削除の方法では, $e^{xx}=(1.87929382459733)^{10}\cdot10^{470}=5.49473644\underline{845303}\times10^{472}$

同方法で, Cの値を, 1.1まで下げて次の不動値を得た. $e^{e^{x2}}=5.76007560\underline{597385}\times10^{465}$.

大雑把な方法では, $e^{e^{x2}}=5.76007559\underline{203406}\times10^{465}$. なお, RHなしでは$7\times10^{370}$が最新[Skw].

[Skw]は, $Li(x)<\pi(x)$となる最小の値(Skewes数)は, RH有りで10^{316}付近と記す.

H.J.J. te Rieleの値(1987)よりは劣るが私の値もそれなりか？ 2つの値は, $e^{e^{e^{\exp(w)}}}$

形式では, $w1=\ln\ln\ln 10^{316}=1.8855\cdots$, $w2=\ln\ln\ln 10^{1088.5\cdots}=2.0575\cdots$で, $w1<w2$,

C=1.1のときの値$w3=\ln\ln\ln 10^{1072.4\cdots}=1.9427\cdots$でも, $w1<w3$となっている.

［探索2］　変換 $t=e^x$では, 方程式$C\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{(\ln(x)-1)^2}$は解けない. 初期値$x_1$

をいろいろ変えて試すと, 解が求まる場合も求まらない場合もあった.

解が求まる場合には, 毎回値が異なった. その原因を探ってみたら: ⇓

$$f(t)=C\cdot\frac{\ln(\ln(\ln t))}{\sqrt{t}}-\frac{1}{(\ln t-1)^2}\ \overset{t=e^x}{\Leftrightarrow}\ f(x)=Ce^{-x/2}\ln(\ln x)-\frac{1}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x)=-\frac{C}{2}e^{-x/2}\ln(\ln x)+Ce^{-x/2}\cdot\frac{1}{x\ln x}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$=-\frac{C}{2}e^{-x/2}\left(\ln(\ln x)-\frac{2}{x\ln x}\right)+\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{Ce^{-x/2}\ln(\ln x)-\dfrac{1}{(x-1)^2}}{-\dfrac{C}{2}e^{-x/2}\left(\ln(\ln x)-\dfrac{2}{x\ln x}\right)+\dfrac{2}{(x-1)^3}}$$

これから, xが十分大きいとき,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\sim-\frac{2\ln(\ln x)}{\ln(\ln x)-\dfrac{2}{x\ln x}}\sim-2\ \Rightarrow\ x2=x1-2$$

すなわち, $x\to\infty$のとき, 選んだ初期値x1によって, x2が決まるということになった.

【結論】 整数xが増加するとき, $f(x)=Li(x)-\pi(x)$の符号が変化することは

定理2から, f(x)が $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}\ln(\ln(\ln x)}{\ln x}$の正の定数倍で抑えられず,

$|f(x)|=\Omega(g(x))$を意味するから, $|f'(x)|=Cg'(x)$と同値である.

P3の(ⅱ)の結果とTE1にしたがって, 1つのCの値に対して, 関数

(Eq1)
$$y=C\frac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}-\frac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}$$

が符号を1回だけ変えることをグラフとニュートン法を用いて示した.

Skewes数のように$x\sim10^{316}$のような巨大数でも変換$x=e^{e^t}$により,

同じ扱いが可能で, (Eq1)は(Eq2)と同値である. このCは(Eq1)と同じ値.

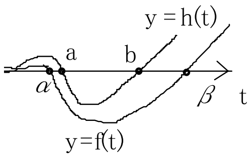
(Eq2)
$$y=Ce^{-e^t/2}e^{-t}t-e^{-t}(e^t-1)^{-2}$$

(Eq1)の関数yは, $x\to\infty$ のとき, $y\to 0$となる. $y=Cg'(x)-f'(x)$であるから,
これは, $x\to\infty$ のときには, 既に符号変化が起きており, 横軸xにほとんど平行になっている, ことを意味する. 方程式$y=0$の解と方程式$f'(x)=Cg'(x)$の解は同一であるから, $f(x)=Li(x)-x/(\ln x-1)$も, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}\ln(\ln(\ln x)}{\ln x}$も符号変化を終えており, 唯一の解$x=x_0$に対応する曲線上の点における, 2曲線の2接線が平行の位置関係にある.
$x\to\infty$では, ″極限の定義″から一致することはない. したがって, f, gが符号変化を起こしたのは, 区間(e,∞)の比較的小さいx_0の前後であり, 区間$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$においてである. 何故なら, f, gともに$x\to\infty$で発散であるためだ.増加中の曲線が一定の接線の傾きをもつなら, それは一次関数以外にはなく, 他方で,f, g は自然対数 $\ln x$ で構成される. これは明らかに矛盾である. (Eq1)で定まる関数$y=Cg'(x)-f'(x)$が符号変化を起こすのは, 方程式$y=0$ … (Eq1.1)の解の前後であり, 等号から, ある1つの正定数Cに対して定まる方程式 $f'(x)=Cg'(x)$ … (Eq1.2) の唯一の解$x=x_0$の前後をおいて他にはない. (Eq1,2)の定義域は, $e<x<\infty$であり, したがって, x_0は上に有界. ニュートン法により、どんなCの値に対しても高々5～6回で解が求められる.(Eq2)でも同様であり, Skews数のような巨大数でも変換$t=e^{e^x}$により, 方程式 $y=Cg'(t)-f'(t)=0$が解けることを既に上で示した. ここで, RHは使っていないことに注意されたい.

観点をf,g自体に移して述べ直そう. $f(x)=Li(x)-\pi(x)$で, $Li(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}$, $\pi(x)=\sum_{p\leqq x}1$とし, 整数xは絶えず増加中であるとする.Li(x)の値は, xの値が比較的小さい場合, 次の整数値に移っても, 増加分はつねに1よりも小さく, 1,000,000前後のxでは高々0.1程度で小さい.xが巨大のときには, $1/\ln x$と$1/\ln(x+1)$の差は0に極めて近いから, Li(x)の増加分は僅かでしかないために, 次の素数に出会うまでの累積量も1よりもつねに少ない事態がしばしば起きる.それに対して, $\pi(x)$は次の素数に出会った途端に1だけではあるが, 確実に増える. したがって, 一定期間$Li(x)<\pi(x)$と

なる．素数pはxが巨大数の場合，希薄にしか現れず，しかも不規則に現れる．他方，Li(x)はその間にちりも積もれば何とやらで，累積し逆転する．したがって，xが巨大数のときでも，Li(x)＞π(x)，Li(x)＜π(x)と大小関係が絶えず逆転を繰り返す．□

【別証明】 　つぎに，(TE1),(TE2)の右側の同値な式による証明を示す．方程式の解xや符号を，同値な通分後の分子で見るのである．

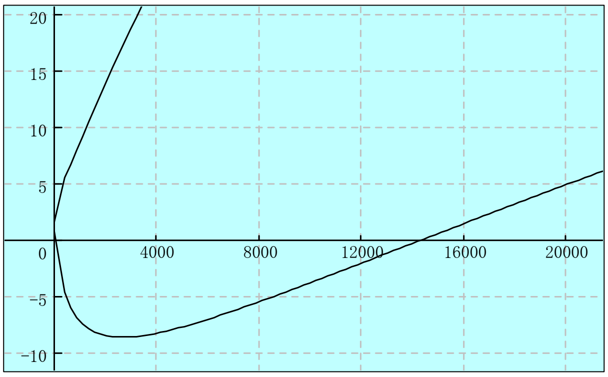


2曲線y＝h(x)とy= f(x)の横軸との交点のx座標がそれぞれx=a,b; x= α，βで，しかも，h(x)＞f(x)となっている，ことを利用する．関数(f.1)形式でのグラフを幾つか挙げる.（C=1,2,…,1000にとる.）

(f.1)
$$y=\frac{1}{C}\sqrt{x}-(\ln x-1)^2\cdot\ln(\ln(\ln x))\quad\left(x\geqq e^e,\ C>1\right)$$

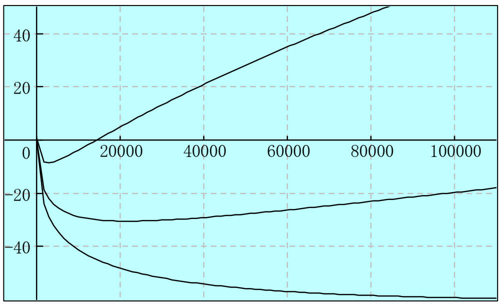
(a) C＝1,2の場合:

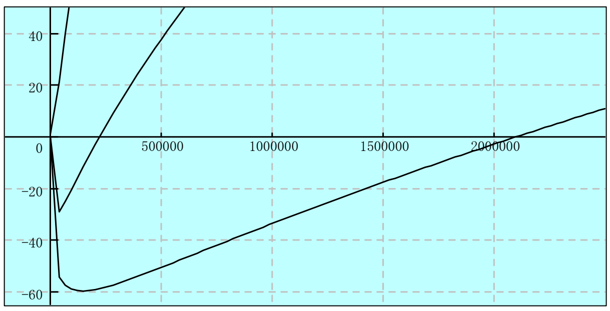
Cの値に対して，y=y_Cと定めると，y_1>y_2となっている．
y_1は，x≧e^eで単調増加関数．
y_2のグラフは下に凸であり，1つの最小値をもつ.なお，y_1だけは，x≧e^eで，y_1>0 ⇒ 符号変化なし．



(b) C=2,4, 8の場合:

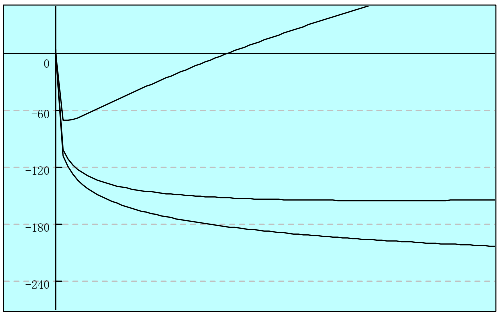
x≧e^eで，y_2>y_4>y_8である．右側のグラフは3個とも横軸との交点の個数が2個であることを示すために示した．グラフのスケールの違いで，y_2は全範囲でy_1と同様に y_2>0と誤解するが，実際にはU字形．左右のグラフは同じものである．
y_2,y_4,y_8 のどれも似た，緩やかなU字形で，1個の最小値と1個のx切片をもつ．

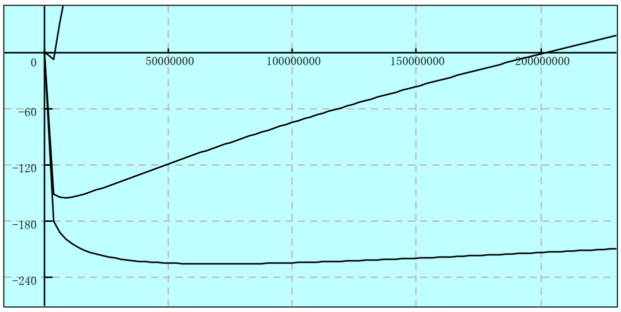


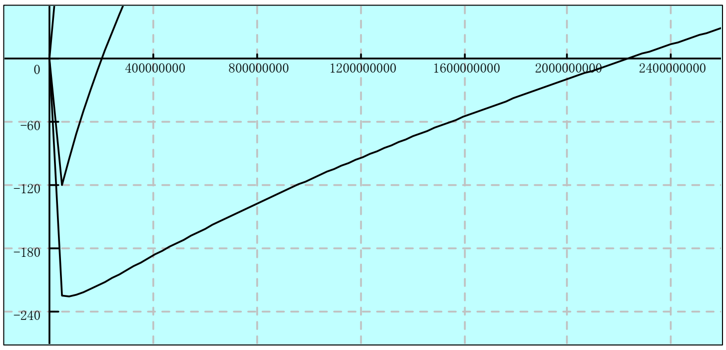


(c) C=10,40,100の場合:

y_{10}＞y_{40}＞y_{100}である．どれも似た，緩やかなU字カーブ曲線で，1個の最小値と1個のx切片をもつ．目の錯覚を防ぐために,今度は3個のグラフを示した．







y_{100}の最小値:

$y_{100}(70007530)$

$= -225.745801092\cdots$

⇒ (b),(c)より

$y_C(C>1)$には符号変化が

1回だけ起きることが確信

できる.

つぎに, (f.1)のグラフを「**指数眼鏡**」で見たグラフを示そう. (f.2)式は, 上の

(f.1)の関数で, $x \to e^x$ としたものである.

(f.2) $$Y=\frac{1}{C}e^{x/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x)) \quad (x>1,\ C>1)$$

以下で, Cの値に対して, $Y=Y_C$と書くことにする. 例えば, $C=2,\sqrt{e}$なら, Y_2, $Y_{\sqrt{e}}$.

(d) C=1,2の場合:

全範囲 $x>1$で$Y_1>Y_2$.

$3 \leqq x < \min$でY_2は減少関数.

minはY_2の最小値.

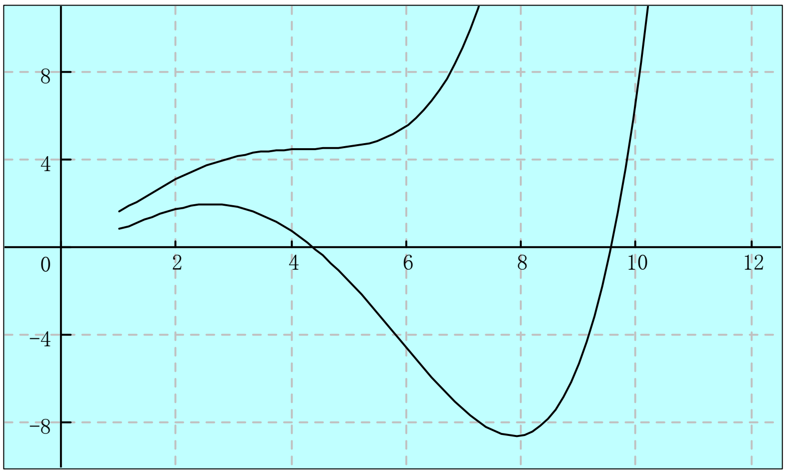
$C(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x))$

C(2.71828) = 1.94642399397601

C(e) = 1.94642378745478

C(2.71929) = 1.94630928351568

C(3) = 1.86465322470223



(e) $C=\sqrt{e}$の場合:

$y=e^{(x-1)/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x))$ $\sqrt{e}$ = 1.64872127070013

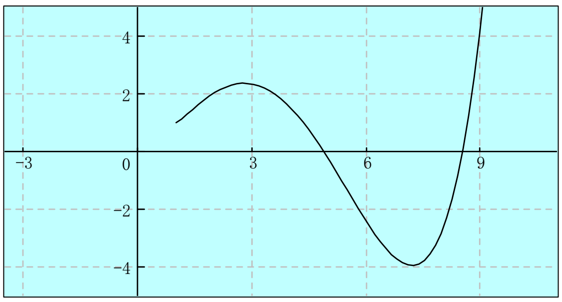
$D(x)=e^{(x-1)/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x))$

D(2.71828)= 2.36113123515408

D(e)= 2.36113140777062

D(2.71829)= 2.36113217916229

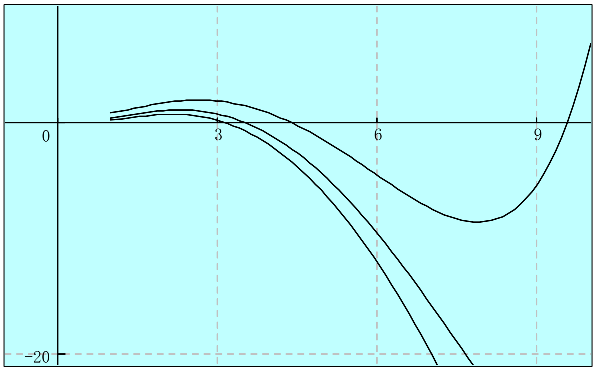
D(3)= 2.34209051799225

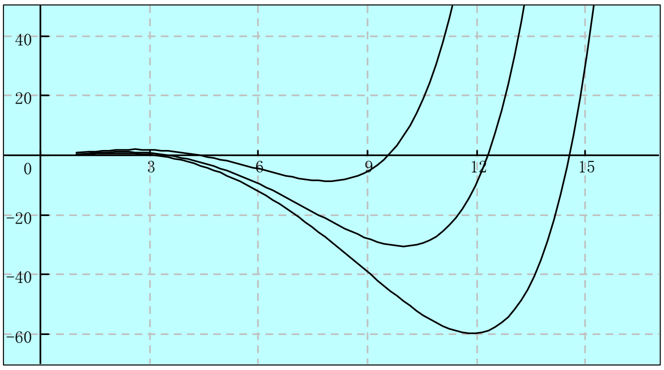


$3 \leqq x < \min_{\sqrt{e}}$で, $Y_{\sqrt{e}}$は単調減少.

(f) C=2,4,8の場合: $Y_2>Y_4>Y_8$である.

$\min_C$をY_Cの最小値とするとき，$3\leqq x<\min_C$で，単調減少，$\min_C<x$で単調増加.





(f) 各x切片：① C=2: 4.39, C=4: 3.52, C=8: 3.13.
$|E|<1.0\times10^{-3}$ ② C=2: 9.57, C=4: 12.31, C=8: 14.56.

【(e),(f),(g)から分かる事柄】

（1）C1<C2ならば，$y_{C1}>y_{C2}$で. その形状は似た，緩やかなU字カーブ曲線で，1個の最小値と1個のx切片をもつ.

（2）$C=\sqrt{e}\rightarrow2\rightarrow4,\cdots$などと増加するにつれて，それぞれ唯一の，極大点は左に，極小点とx軸との2交点は右に移動している.【以下はその証明】

(f.3) $\quad y=e^{(x-d)/2}-(x-1)^2\ln(\ln x),\quad C=e^{d/2}.$

$$y'=\frac{1}{2}e^{(x-d)/2}-(x-1)\left\{2\ln(\ln x)+\frac{x-1}{x\ln x}\right\}=0\Leftrightarrow e^{(x-d)/2}=2(x-1)\left\{2\ln(\ln x)+\frac{x-1}{x\ln x}\right\}\cdots(\mathrm{EqR})$$

(EqR)が解をもつ条件$2\ln(\ln x)+\dfrac{x-1}{x\ln x}>0$から，$x>2.00915\cdots=x_0$.

(f.3)式から. 指数(x−d)/2の符号はln(ln(ln x)))で決まる. $x_0<x<e^e$

とき，$\ln(\ln(\ln x)))<0$ ゆえ，dが増加しても，$x_{極大点}$はdを超えない.

いま，条件d>1と相加相乗平均より，$(d+2/d)/2>\sqrt{d\cdot(2/d)}=\sqrt{2}$.

$-\sqrt{2}<-(d+2/d)/2$であるから，x_1を$1/2+2\sqrt{2}$より小さく，しかも$-1/2+2\sqrt{2}$より大きい数として. $-1/2<x_1-2\sqrt{2}<1/2$を満たすように選ぶ. このとき，

$0<x_1-2\sqrt{2}<x_1+1/2-2\sqrt{2}<x_1+1/2-(d+2/d)<1.$

したがって，まず，$e^e>e^{e^{\exp(x_1+1/2-(d+2/d))}}>e^{e^{\exp(x_1-2\sqrt{2})}}>e$ から，0>ln(ln(ln x)).

このようにx_1を選ぶとき，x−dは負の符号をもつから，Ind_(*)と略記する.

よって，(x−d)/2=Ind_(ln(ln(ln x)))より，x=d+2Ind_(ln(ln(ln x))).

上の不等式とx_1の選び方から,

$$d+2(x_1-(d+1/d))=2\{x_1-(d+2/d)\}>2(x_1-2\sqrt{2}) \Rightarrow \underline{\underline{1}}>2(x_1-2\sqrt{2}),$$

or, $d+2\{x_1-(-1/2+(d+1/d))\}=2[x_1-\{-1/2+(d+2/d)\}]>2(x_1-(-1/2+2\sqrt{2}))>0.$

即ち, $1/2+2\sqrt{2}>x_1>-1/2+2\sqrt{2}$ ⋯(c1)をみたすx_1に対して, Ind_(ln(ln(ln x)))<0,
d(>1)は任意である. このとき, $0>x_1-(d+2/d)>x_1-1/2-(d+2/d)$であり,
dが増大すれば, x_1-d よりも$-(1/2+2/d)$から$-2/d$の範囲で小さくなる.
しかも, x_1は(c1)をみたすような小さい数である.
したがって, dが増大するとき, $x_{極大点}$は左に動くことが示された. □

【$x_{交点}$の値の簡易な見積法】 [①の証明はP15に記した.]

$x \geqq 19$のとき, $x-d=4\ln(x-1)+2\ln(\ln(\ln(x)))<2\sqrt{2}\sqrt{x-1}$ ⋯ ①

① ⇒ $x-d<2\sqrt{2}\sqrt{x-1}$, $(x-d)^2<8(x-1)$, $x^2-2(d+4)x+d^2+8<0$,

∴ $d+4-\sqrt{8(d+1)}<x<d+4+\sqrt{8(d+1)}$

$D/4=(d+4)^2-(d^2+8)=8(d+1)$, $R(d)=d+4+\sqrt{8(d+1)}$

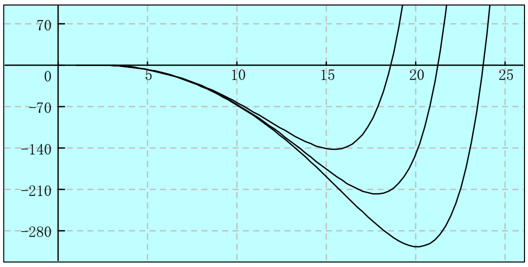
$e^{7/2}=33.11\cdots$, R(7)= 19,
$e^{9/2}=90.01\cdots$, R(9)= 21.94⋯,
$e^{11/2}=344.6\cdots$, R(11)= 24.79⋯.
R(d)値の精度は次のページの各例で触れる.

(g) $C=e^{7/2},e^{9/2},e^{11/2}$の場合: $Y_{e^{7/2}}>Y_{e^{9/2}}>Y_{e^{11/2}}$である.
$\min_C$をY_Cの最小値とするとき, $3\leqq x<\min_C$で, 単調減少, $\min_C<x$で単調増加.

$y=e^{(x-7)/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x))$

$y=e^{(x-9)/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x))$

$y=e^{(x-11)/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x))$



d=7,9,11に対する各x切片の値は約18.6, 21.3,23.8であり, ②が定める上限19,22, 25でどれも確かに抑えられている.

各x切片	[1]	d=7: 2.82, d=9: 2.76, d=11: 2.73.
$\lvert E\rvert<1.0\times10^{-3}$	[2]	d=7: 18.62, d=9: 21.26, d=11: 23.79.

[解説] $x>e^e$のとき, $\ln(\ln(\ln x))>0$ゆえ, $C\cdot\dfrac{\ln(\ln(\ln x))}{\sqrt{x}\ln x}>\dfrac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2} \overset{(TE1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{\sqrt{x}}{C}<(\ln x-1)^2\ln(\ln(\ln x)$ ⋯(g.1).

変換$x\to e^x$, $C=e^d$で, (g.1) ⇔ $(x-1)^2\ln(\ln x)>e^{(x-d)/2}$⋯(g.2). 例: d=11なら, x>23.79⋯でこの不等式が成立の意味.

したがって, dをもっと大きく選べば, (g.2)が成り立つようなxの下限値はさらに大きくなる.

(r.1) $$F(x)=\frac{\sqrt{x}}{C}-(\ln x-1)^2\ln(\ln(\ln x)),\ x>e$$

で,$C=e^{d/2}$にとり, $\ln x=t$で
置換すれば, $F(e^t)=e^{(t-d)/2}-(t-1)^2\ln(\ln t))$ となり, (r.2)を得る.

(r.2) $$f(t)=e^{(t-d)/2}-(t-1)^2\ln(\ln t))$$

(r.2)の関数$y=f(t)$のグラフは，指数関数$y_1=e^{0.5t}$と$y_2=-(t-1)^2\ln(\ln t)$の合成関数で,$y=y_1+y_2$である．tに対して変化の大きいy_1が主要項，y_2が補正項の役割を果たす.y_2のグラフは，2点$(e,0)$,$(e^e,-(e^e-1)^2)$を通る．y_2はt=1の放物線の右側半分とほぼ同型である．

y_1を定数$N=e^{d/2}$で割る度にt軸方向にdだけ平行移動する．

ただし，およそ区間(1,3)では，左に，(3,∞)では右に平行移動する．その結果，各グラフはN>1のとき,下のようなU字型グラフとなる．

一方,元の$y=F(x)$のグラフも，実際には緩やかなU字型グラフである．

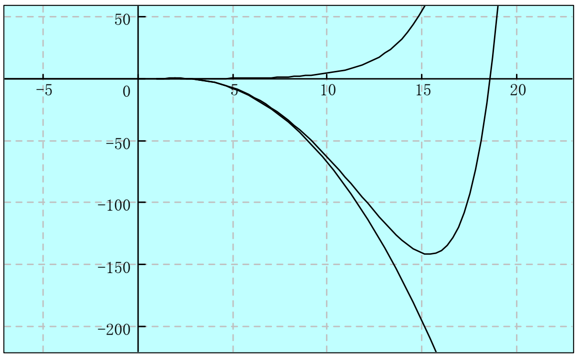
(例1) (f.2)式の関数で， $C=e^{d/2}$, d=7, $C=e^{7/2}=33.11\cdots$

$y_1=e^{(x-7)/2}$,

$y_2=-(x-1)^2\ln(\ln(x))$,

$y=e^{(x-7)/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x))$.

図で，$y_1>y>0>y_2\cdots(*)$である．d=7以外の値についても，d>1ならば,(*)が言える．



(例2) (f.2)式の関数で，C=10,40,100の場合:

d=2lnN ゆえ，

$y=e^{(x-2\ln 10)/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x))$,

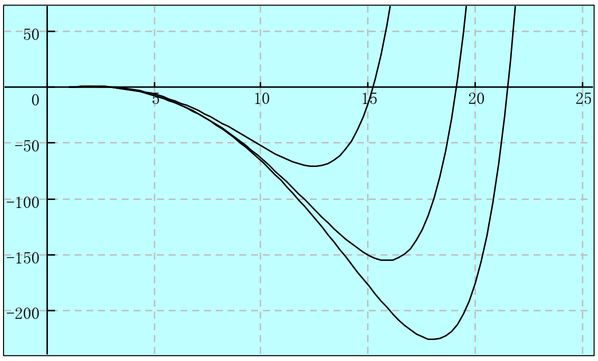
$y=e^{(x-2\ln 40)/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x))$,

$y=e^{(x-2\ln 100)/2}-(x-1)^2\ln(\ln(x))$:

2ln10= 4.605…,2ln40= 7.377…,

2ln100= 9.210…．

指数関数$y=e^{(x-d)/2}$のd値による平行移動が主たる影響力をもつ．



(例3) (f.1)式の関数に対して，C=10,40,100の場合: (例2と対照されたい)

$y=\frac{\sqrt{x}}{10}-(\ln(x)-1)^2\cdot\ln(\ln(\ln(x)))$

x≧4115865で，y>0.

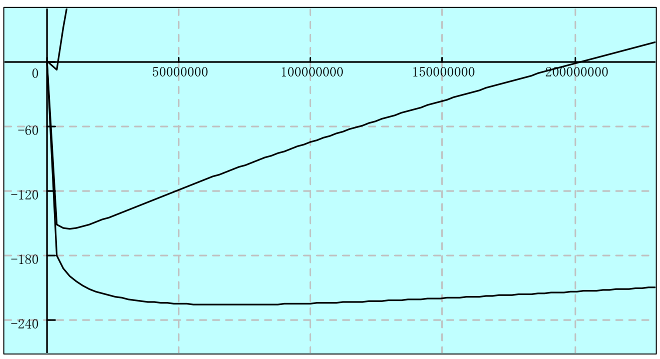
$y=\frac{\sqrt{x}}{40}-(\ln(x)-1)^2\cdot\ln(\ln(\ln(x)))$

x≧202196599で，y>0

$y=\frac{\sqrt{x}}{100}-(\ln(x)-1)^2\cdot\ln(\ln(\ln(x)))$

x≧2232585560で，y>0

この3個の値は変換 $x\to e^x$ により，いずれも初期値x1=20で求められる．



(r.2) $$F(x)=\frac{\sqrt{x}}{C}-(\ln x-1)^2\ln(\ln(\ln x))$$

(r.2)式で$x=\boldsymbol{e}^d t$とおくと, $F(\boldsymbol{e}^d t)=\sqrt{t}-(\ln t+d-1)^2\ln(\ln(\ln t+d))$.

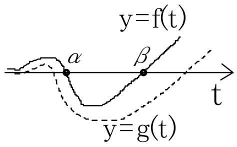
このとき,任意の実数値$d\geqq 1$に対して, 成り立つ(r.3)式を利用する.

(r.3) $$\sqrt{t}-(\ln t)^2\ln(\ln(\ln t+1))\geqq\sqrt{t}-(\ln t+d-1)^2\ln(\ln(\ln t+d))$$

(r.3)の左辺と右辺の関数をそれぞれ $f(t),g(t)$ $(t>1)$とする.

関数 $y=f(t)$が最小値を一個だけもち, $\alpha<t<\beta$で, $f(t)<0$と

なるような方程式$y=0$の解が2個だけ存在することを示せば,



$f(t)\geqq g(t)$から, 任意のdに対して, $g(t)<0$となる.したがって,

$f(t)<0$ を示せば良い. 対数法則より, $1+\ln t=\ln\boldsymbol{e}+\ln t=\ln\boldsymbol{e}t$

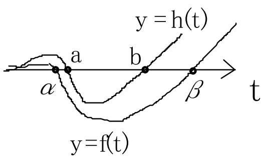
だから, $\ln(\ln t+1)=\ln\boldsymbol{e}t$. よって,次の大小関係が確認できた.

$$-\ln(\ln(\ln t))>-\ln(\ln(\ln\boldsymbol{e}t)).$$

$$\therefore\quad \sqrt{t}-(\ln t)^2\ln(\ln(\ln t))>\sqrt{t}-(\ln t)^2\ln(\ln(\ln\boldsymbol{e}t)).$$

そこで, $h(t)=\sqrt{t}-(\ln t)^2\ln(\ln(\ln t))$, $f(t)=\sqrt{t}-(\ln t)^2\ln(\ln(\ln\boldsymbol{e}t))$

と定めると,$h(t)>f(t)$であるから, $h(t)=0$の解$t=a,b\,(a<b)$に対し,



$a\leqq t\leqq b$で, $h(t)<0$を示せば, 左図のように,

$\{t\,|\,a\leqq t\leqq b\}\subset\{t\,|\,\alpha\leqq t\leqq\beta\}$を満たす実数tに対して,

$0>h(t)>f(x)$ が言える. なお, 解$t=a,b$; α,βはニュートン法で

容易に求められるので, 証明が完成する, という訳である.

［目標］ 2曲線 $y=f(x)$, $y=h(x)$,[ただし, $h(x)>f(x)$]のグラフのように,

(1) 区間$a\leqq t\leqq b$において, 不等式$f(x)<h(x)<0$であり, しかも,

(2) $h(x)=0$の2解 α,bと$f(x)=0$ の2解 α,β に対して,

包含関係$\{t\,|\,a\leqq t\leqq b\}\subset\{t\,|\,\alpha\leqq t\leqq\beta\}$が成り立つ, ことを示す.

2グラフ$y=f(x)$,$y=h(x)$の差分は, $(\ln(x))^2\cdot\{\ln(\ln(\ln(\boldsymbol{e}x)))-\ln(\ln(\ln(x)))\}$であり,

$-(\ln(x))^2\cdot\ln(\ln(\ln(x)))>-(\ln(x))^2\cdot\ln(\ln(\ln(\boldsymbol{e}x)))$であるから, この右辺の項を

第2項にもつ$y=f(x)$の方が左辺の項の$y=h(x)$よりも下にあるのは当然である.

したがって, このグラフの位置関係から, 明らかに(2)が成り立つ.

このことは, 以下の事柄によって一層強められる.

$y_1=-(\ln(x))^2\cdot\ln(\ln(\ln(x)))$, $y_2=-(\ln(x))^2\cdot\ln(\ln(\ln(\boldsymbol{e}x)))$とするとき, y_1,y_2は各々

2点$A(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{e}-1},-(\boldsymbol{e}-1)^2\ln(\ln(\boldsymbol{e}-1)))$,$B(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{e}},0)$と$C(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{e}-1},0))$,$D(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{e}},-\boldsymbol{e}^2\ln(\ln(\boldsymbol{e}+1)))$

を通り, 区間$[\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{e}-1},\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{e}}]$での両端を結ぶ線分の傾き$m_{AB}$,$m_{CD}$について,

$$m_{y_1}=m_{AB}=-0.189\cdots>m_{y_2}=m_{CD}=-0.210\cdots.$$

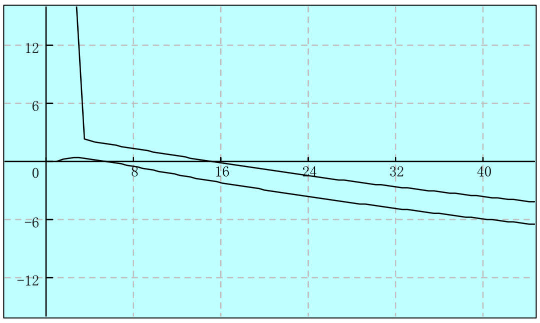
したがって,

$y_1=-(\ln(x))^2\cdot\ln(\ln(\ln(x)))$,

$y_2=-(\ln(x))^2\cdot\ln(\ln(\ln(ex)))$

の2グラフに対して,

区間[a,b]で,$y_1>y_2$である.



2関数y=h(x),y=f(x)は, $h(x)=\sqrt{x}+y_1$, $f(x)=\sqrt{x}+y_2$で定まり, しかも,

区間[a,b]=[176,940]において, $\sqrt{x}>0$であるから, h(x)>f(x)である.

A:={ t | 176≦t≦940], B:={ t | 49≦t≦1881}とすれば, A⊂B.

区間[a,b]において, f(x)<h(x)<0.

２曲線h(x), f(x)の最小値はそれぞれ,

h(453)≒−0.92748, f(499)≒ −3.94545.

区間[a,b]=[176,940]でも, $y_1>y_2$

① $\sqrt{x}=(\ln(x))^2\ln(\ln(\ln(x)))$

h(x)<0となる区間は[a,b]=[176,940].

$h(x):=\sqrt{x}-(\ln(x))^2\ln(\ln(\ln(x)))$

$x_2=x_1-\dfrac{h(x)}{h'(x)}$, 初期値$x_1$

② $\sqrt{x}=(\ln(x))^2\ln(\ln(\ln(ex)))$

f(x)<0となる区間は[α,β]=[49,1881].

$f(x):=\sqrt{x}-(\ln(x))^2\ln(\ln(\ln(ex)))$

$x_2=x_1-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, 初期値$x_1$

①をニュートン法で解くと

x1= 186, x_6 = 175.257705398333 = a

x1=1000,x_6 = 940.479599076502 = b

(cf.)接線の傾きm_1,m_2はそれぞれ

$m_1(x_6)=-0.00942482218646198$,

$m_2(x_6)=\ 0.00299424894575424$

②をニュートン法で解くと

x1=40, x_6 = 48.9851670146468 = α

x1=1800,x_5 = 1881.64530903726 = β

(cf.)接線の傾きm'_1,m'_2はそれぞれ

$m'_1(x_6)=-0.0418036131943809$,

$m'_2(x_5)=\ 0.00376206700371432$

①,②から明らかに, { t | 176≦t≦940} ⊂ { t | 49≦t≦1881} ゆえ, 証明完了. □

[h(x),f(x)の微分計算]

$$h(x)=\sqrt{x}-(\ln(x))^2\ln(\ln(\ln(x)))$$

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2\ln(x)}{x}\ln(\ln(\ln(x)))-(\ln(x))^2\frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\ln(x)}{x}\left\{2\ln(\ln(\ln(x)))+\frac{1}{\ln(\ln(x))}\right\}$$

$$f(x)=\sqrt{x}-(\ln(x))^2\ln(\ln(\ln(ex)))$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2\ln(x)}{x}\ln(\ln(\ln(ex)))-(\ln(x))^2\frac{1}{x\ln(ex)\ln(\ln(ex))}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\ln(x)}{x}\left\{2\ln(\ln(\ln(ex)))+\frac{\ln(x)}{\ln(ex)\ln(\ln(ex))}\right\}$$

合成関数の微分[Chain Rule]

(1) $y=\ln(\ln(\ln(x)))$ に対して,

$u=\ln(x)$, $v=\ln(u)=\ln(\ln(x))$とおくと,

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x},\ \frac{dv}{du}=\frac{1}{u}=\frac{1}{\ln(x)}.$$

また, $y=\ln(v)$から, $\dfrac{dy}{dv}=\dfrac{1}{v}$.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{v}\frac{1}{u}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{xuv}=\frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}.$$

(2) $y=\ln(\ln(\ln(ex)))$: $u=\ln(ex)\Rightarrow$

$u=\ln e+\ln(x)$, $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$. $v=\ln(u), y=\ln(v)$

$$\Rightarrow\frac{dv}{du}=\frac{1}{u}=\frac{1}{\ln(ex)},\ \frac{dy}{dv}=\frac{1}{v}=\frac{1}{\ln(u)}=\frac{1}{\ln(\ln(ex))}.$$

【不等式①の証明】

$x\geqq 19$で, $2\ln(x-1)+\ln(\ln(\ln(x)))<\sqrt{2}\sqrt{x-1}$ …①

$Y(x)$:=(①の右辺の式)−(①の左辺の式) とし, xで微分. y'を通分した式の分子を$Z(x)$とおく.

$$Y(x)=\sqrt{2}\sqrt{x-1}-2\ln(x-1)-\ln(\ln(\ln(x)))$$

$$Y'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x-1}}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}/2)\sqrt{x-1}-2}{x-1}-\frac{1}{x\boxed{\ln(x)\ln(\ln(x))}}\ \cdots\cdots\ (\mathrm{Eq}*)$$

$$=\frac{\left((\sqrt{2}/2)\sqrt{x-1}-2\right)x\ln(x)\ln(\ln(x))-(x-1)}{x(x-1)\ln(x)\ln(\ln(x))}$$

分子$=\left((1/\sqrt{2})\sqrt{x-1}-2\right)x\boxed{\ln(x)\ln(\ln(x))}-(x-1)$

$x\geqq e$で, $\ln(x)\ln(\ln(x))\geqq 1$なので, 思い切って,

1で置き換える. これは(Eq*)の第2項の分母から許容される.

$$Z(x)=\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{x-1}}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$$

Z(x)の符号が変わるxの値を調べる⇓

Z(9)= −0.0642392868329339
Z(11)= −0.0197414861735208
Z(12)= −0.00546047515269985
Z(12.2)= −0.00302211305840575
Z(12.4)= −0.000702195966430771
Z(12.467)= 0.0000498105863292067
Z(13)= 0.00561878812582794
Z(20)= 0.0782047179721989
Z(30)= 0.0543348298138443
Z(50)= 0.0564509516709886
Z(100)= 0.0494430011618092
Z(500)= 0.0274702734807309
Z(1000)= 0.0202949614670977
$Z(10^{100})= 7.07106781186547\times 10^{-51}$

$1/\sqrt{2}=c$ とおくとき,

$$\text{分子}>\left(c\sqrt{x-1}-2\right)x-(x-1)=cx\sqrt{x-1}-3(x-1)-2$$

$$=c(x-1)\sqrt{x-1}+c\sqrt{x-1}-3(x-1)-2$$

$\boxed{t=\sqrt{x-1}}$ $\quad = ct^3-3t^2+ct-2=g(t),\ 0<c\leqq 0.75.$

実は期待精度(少なくとも0.75以下にしたい)から, cの値の範囲を決める.

$$g'(t)=3ct^2-6t+c=3c\left(t^2-\frac{2}{c}t+\frac{1}{3}\right)$$

$$=3c\left\{\left(t-\frac{1}{c}\right)^2+\frac{c^2-3}{3c^2}\right\}>0\ ?$$

g(t)が単調増加となるようなc値とtの値の範囲を決める.

$$c=\frac{1}{\sqrt{2}} にとる \Rightarrow \left(t-\frac{1}{c}\right)^2+\frac{c^2-3}{3c^2}=\left(t-\sqrt{2}\right)^2-\frac{5}{3}\geqq 0.$$

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}t^3-3t^2+\frac{1}{\sqrt{2}}t-2$$

$$g'(t)=\frac{3}{\sqrt{2}}t^2-6t+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(t^2-2\sqrt{2}\,t+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left\{\left(t-\sqrt{2}\right)^2-\frac{5}{3}\right\}>0 \text{ if } t>\sqrt{2}+\frac{\sqrt{15}}{3}=2.705\cdots.$$

g(1) = −3.58578643762691
g(2) = −6.92893218813453
g(3) = −7.78679656440358
g(4) = −1.91673887931477
g(5) = 14.9238815542512
g(6) = 46.9777054234135
g(4.1656) = 0.000244421748803112

右のListから, $t=\sqrt{x-1}$ より, $4.1656^2= 17.3522\cdots$, $x\geqq 18.3\cdots$.

∴ $x\geqq 19$ のとき, $g(t)>0$. □

参考グラフ $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-3x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}x-2$

$$y'=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left\{\left(t-\sqrt{2}\right)^2-\frac{5}{3}\right\},\quad 変曲点\left(\sqrt{2},-5\right)$$

$$x=\sqrt{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-3x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}x-2$$

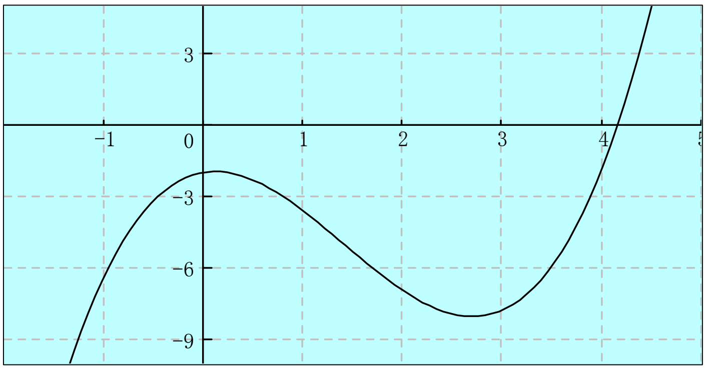
$x1=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{15}}{3}\fallingdotseq 0.123$ 極大点

$y(x1)\fallingdotseq -1.957$

$x2=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{15}}{3}\fallingdotseq 2.705$ 極小点

$y(x2)\fallingdotseq -8.042$

$y(\sqrt{2})=-5$



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^3-3\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)-2=\frac{10\sqrt{15}-45\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}=-1.95709690274908$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^3-3\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{15}}{3}\right)-2=\frac{-10\sqrt{15}-45\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}=-8.04290309725092$$

[x切片a,b: α, β付近のh,fの数値計算]

$h(x)=\sqrt{x}-(\ln(x))^2\cdot\ln(\ln(\ln(x)))$

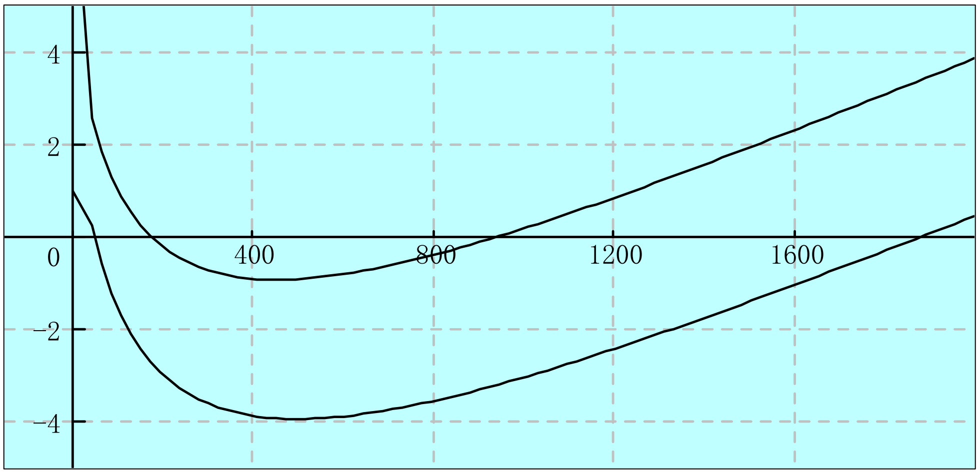
$f(x)=\sqrt{x}-(\ln(x))^2\ln(\ln(\ln(ex)))$

	h(939)= −0.00442	f(939)= −3.21341
	h(940)= −0.00143	f(940)= −3.21071
b=941	h(941)= 0.001558	f(941)= −3.20801
	h(942)= 0.004555	f(942)= −3.20531
	h(943)= 0.007554	f(943)= −3.20261

$y=\sqrt{x}-(\ln(x))^2\cdot\ln(\ln(\ln(x)))$ 上側

$y=\sqrt{x}-(\ln(x))^2\ln(\ln(\ln(ex)))$ 下側

	f(1880)= −0.00618	h(1880)= 3.39444
	f(1881)= −0.00242	h(1881)= 3.39835
β=1992	f(1882)= 0.001334	h(1882)= 3.40226
	f(1883)= 0.005096	h(1883)= 3.40617
	f(1884)= 0.008859	h(1884)= 3.41007



h(450)= −0.927429
h(451)= −0.927461
h(452)= −0.927478
最小値 h(453)= −0.927483
h(454)= −0.927473
h(455)= −0.927451

f(497)= −3.94543
f(498)= −3.94545
最小値 f(499)= −3.94546
f(500)= −3.94545
f(501)= −3.94543
f(502)= −3.94541

h(174)= 0.011918
h(175)= 0.002431
a=176 h(176)= −0.006973
h(177)= −0.016297
h(178)= −0.025540

f(174)= −2.71725
f(175)= −2.72841
f(176)= −2.73947
f(177)= −2.75044
f(178)= −2.76132

f(47)= 0.084254
f(48)= 0.041493
α=49 f(49)= −0.000620
f(50)= −0.042100
f(51)= −0.082963

h(47)= 2.42776
h(48)= 2.39126
h(49)= 2.35527
h(50)= 2.31979
h(51)= 2.28481

176≦x≦980で h(x)<0
最小値はh(453)=−0.92748

49≦x≦1881で f(x)<0
最小値はf(499)= −3.94545

A:={ t | 176≦t≦980]⊂{ t | 49≦t≦1881}:=B

区間[176,980]において, f(x)<h(x)<0.

Wikipedia [素数定理]から ⇓

【誤差評価】より詳しくは、現今最良の近似の誤差は次の結果である

(ヴィノグラードフの素数定理)。充分大きな x について、

$$\pi(x)=\mathrm{li}(x)+O\left(x\exp\left(-\frac{A(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right)$$,ただし A=0.2098[17]

さらに、1901年にヘルゲ・フォン・コッホは、もしリーマン予想が正しければ

次のように誤差評価を改善できることを証明した[18]

$$\pi(x)=\mathrm{Li}(x)+O(\sqrt{x}\log(x))$$

逆に、上記の評価式が成り立てばリーマン予想が成り立つことも知られている。

また前節で挙げた表を見れば分かるように、x が小さければ,

$$\pi(x)<Li(x)$$

が成り立っている。これが全ての x で成り立つであろうと、ガウスやリーマンさえも予想していたが、これが正しくないことは1914年にジョン・エデンサー・リトルウッドが初めて示した。これが成り立たない最小の x をスキューズ数というが、具体的な値はほとんど分かっていない。なお、$\pi(x)$と $Li(x)$の大小は、x が大きくなるにつれて無限に入れ替わる[19].

[17] ^ Kevin Ford (2002). "Vinogradov's Integral and Bounds for the Riemann Zeta Function". Proc. London Math. Soc. 85 (3): 565-633. arXiv:1910.08209. doi:10.1112/S0024611502013655.

[18] ^ von Koch Helge (1901). "Sur la distribution des nombres premiers [On the distribution of prime numbers]". Acta Mathematica 24 (1): 159-182. doi:10.1007/BF02403071. MR1554926.

[19] ^ Littlewood J.E. (1914). "Sur la distribution des nombres premiers". Comptes Rendus 158: 1869-1872. JFM 45.0305.01.

【Prime Number Theorem】 en.wikipediaの記述

In 2016, Timothy Trudgian proved an explicit upper bound for the difference between $\pi(x)$ and $li(x)$: $|\pi(x)-li(x)|\leq 0.2795\dfrac{x}{(\log x)^{3/4}}\exp\left(-\sqrt{\dfrac{\log x}{6.455}}\right)$

for x>229[19] …… (Eq♡)

[19] Timothy Trudgian (February 2016). "Updating the error term in the prime number theorem". Ramanujan Journal. 39 (2): 225-234. arXiv:1401.2689. doi:10.1007/s11139-014-9656-6. S2CID 11013503.

【(Eq♡) へのメモ】

P15の不等式①から, $\ln x<\sqrt{x/2}$…(E1)となる条件を調べると,x≧14 と分かる.

更に, x≧171のとき, $\sqrt{x/6.455}>\ln x$…(E2), x≧27のとき, $\sqrt{(\ln x)/6.455}>\ln(\ln x)$

$$\therefore\ e^{\left(-\sqrt{(\ln x)/6.455}\right)}<e^{-\ln(\ln x)}=e^{\ln(1/\ln x)}=1/\ln x$$

$e^{-\sqrt{(\ln x)/b}}=e^{-\ln t}=\dfrac{1}{t}$…(E3)から同値な(E4)を得る.

x≧171のとき, $\dfrac{1}{6.455(\ln(x))^2}>\dfrac{1}{x}$… (E4).

変換 $\ln x=b(\ln t)^2$の右辺に,$b=6.45500011307969$, $t=170.42569$を代入すると,

$b(\ln t)^2=t$ となる.すなわち, $\ln t=\sqrt{t/b}$ … (E5)が成り立っている.

このb, tは方程式(E5)の,「(b, t)を対とする解」になっている.

(E3)から, $te^{-\sqrt{(\ln x)/b}}=1$ゆえ, (Eq♡)の右辺は,$x\geqq 229$のとき,$0.2795/(\ln x)^{3/4}$となる.

$\left(\dfrac{a}{(\ln x)^{3/4}}\right)'=-\dfrac{3}{4}\dfrac{a}{x(\ln x)^{7/4}}$の絶対値は, $(\mathrm{Li}(x)-\pi(x))'=\dfrac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}$に等しいから,

$\dfrac{3}{4}\dfrac{a}{x(\ln x)^{7/4}}=\dfrac{1}{(\ln x)(\ln x-1)^2}$より, 方程式 $\dfrac{3}{4}\dfrac{a}{x(\ln x)^{3/4}}=\dfrac{1}{(\ln x-1)^2}$ …(E6)

に上と同じように「対をなす解(a,x)」があることになる.

変換$x\to e^x$して, グラフと数値計算で近似値

$x1=e^{0.086992508}=1.09088850675097$を得た.

このとき, $a=\dfrac{4}{3}\dfrac{x(\ln x)^{3/4}}{(\ln x-1)^2}$から,

$a=0.279499997936639 \fallingdotseq 0.2795$を得た.

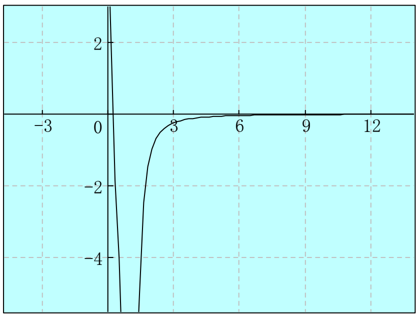
$$\frac{3}{4}\frac{0.2795}{e^x x^{3/4}}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$Y1(x)=\frac{3}{4}\frac{0.2795}{e^x x^{3/4}}-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$Y1(0.086992508)=8.85615417113444\times 10^{-9}$

$e^{0.086992508}=1.09088850675097$

⇓$y=\dfrac{3}{4}\dfrac{0.2795}{e^x x^{3/4}}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$は急減関数で, 変換 $x\to e^x$ でのみ, その実数解が求められる.



$$\frac{3}{4}\frac{a}{x(\ln x)^{3/4}}=\frac{1}{(\ln x-1)^2}$$ $x1=1.09088850675097$

$a(x)=\dfrac{4}{3}\dfrac{x(\ln x)^{3/4}}{(\ln x-1)^2}$ $a(x1)=0.279499997936639$

$a=0.279499997936639$

さらに,実際, $x2=0.086992508$, $a=0.279499997936639$ に対して,

$$\frac{3}{4}\frac{a}{e^{x2}(x2)^{3/4}}=1.19964104755921$$

$$\frac{1}{(x2-1)^2}=1.1996410475592$$

より, これは(a, x2)が(E6)で, $\ln x\to x$ とした同値式 $\dfrac{3}{4}\dfrac{a}{e^x x^{3/4}}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ … (E7)

の「対をなす解」であることを意味する.

［Reference］

[WN2]素数定理の進展・下, W・ナルキエヴィッチ/中嶋眞澄訳, 丸善, 2013

[HP2] 双子素数予想式の評価など[補正版2], 宇都宮潔

[LTP] Littelwoodの定理の初等的検証と双子素数定理・素数定理への適用 ［補正版］, 宇都宮潔

[PEE] 素数定理の誤差評価[補正版], 宇都宮潔

[川面] https://mathlog.info/articles/0d4OaIXtouVRZP3BVZxx, 川面, Littlewood の定理の証明

［LC］ On the difference π(x)－li(x), Lee Christine, the University of Manchester,2008

［山下剛]:素数定理とRiemannゼータ関数, 2017年数学入門公開講座（夏） https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kokai-koza/H29-yamashita.pdf

［MV］ H. L. Montgomery and R. C. Vaughan Multiplicative Number Theory I., Classical Theory Cambridge University Press 2006

[Ingham] The Distribution of Prime Numbers, Cambrige University, 1934
同PDFのお試しDownloadサイト:
https://www.scribd.com/document/624685779/Ingham-A-E-The-distribution-of-prime-numbers-1964

[PNT] https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem

[TT] Timothy Trudgian (February 2016). "Updating the error term in the prime number theorem". Ramanujan Journal. 39 (2): 225-234. arXiv:1401.2689. doi:10.1007/s11139-014-9656-6. S2CID 11013503.

[Skw] https://en.wikipedia.org/wiki/Skewes%27s_number