新世代完全数について

飯高 茂 (放送大学 東京多摩学習センター)

2024 年 11 月 2 日

[1]

1 はじめに

完全数の起源は数学原論にあると言われ 2000 年以上のの歴史がある.

偶数の完全数はオイラーが偶数の場合を解決し,$a=2^eQ, (Q=2^{e+1}-1:$ 素数$)$, と書けることを示した.

奇数の場合の解は存在するかどうか現代でも分からない.

ここでは約数の和 $\sigma(a)$ の代わりに オイラー関数を用いて 完全数に似た数を定義しこれらを詳しく研究する. ここでも偶数の場合は解明できるが奇数の場合は解がいろいろありこれらを詳しく研究する. とくに オイラー関数を重ねてダブルオイラー関数を導入しこれを用いた完全数の類似品を研究する. 新世代完全数と呼ぶ所以である.

これらの研究には小学生, 中学生, 高校生が関心をもち自分たちで新しい研究を行っていることを報告したい.

2 オイラー超完全数

自然数 a より小さく a と互いに素な自然数の個数を $\varphi(a)$ と書きオイラー関数という.

ただし, $\varphi(1)=1$ と定義する.

p が素数なら $\varphi(p)=p-1$. p,q が異なる素数なら $\varphi(pq)=(p-1)(q-1)$.

$\mathrm{co}\varphi(a)=a-\varphi(a)$ とおきこれをオイラー余関数という.

最初に次の結果に注目.

命題 1 $2\varphi(a)=a$ と $a=2^e$ 　は同値.

Proof

$a=2^e$ 　について, $\varphi(a)=2^{e-1}$ により $2\varphi(a)=2^{e-1}=2^e=a$. これは容易.

逆は自明ではない.

$2\varphi(a)=a$ と仮定すると, a: 偶数なので, $a=2^eL, (L:$ 奇数$)$ と書ける.

$2\varphi(a)=2^e\varphi(L)$. 仮定より $2\varphi(a)=a=2^eL$.

$L=\varphi(L)$ になり $L=1; a=2^e$.

q.e.d.

$A=2^e-1+m$ は素数と仮定する.

$a=2^e$ なら $2\varphi(a)=2^e$ なので $A=2\varphi(a)-1+m$ は素数.

$\varphi(A)=2\varphi(a)-2+m=a+m-2$.

定義 1 $A=2\varphi(a)-1+m$, $\varphi(A)=a+m-2$ を満たす a を オイラー超完全数 *(Euler hyper perfect number)* と呼ぶ.

[1]準備した原稿は不十分な点が多くあり宇都宮潔さんによって修正された. 特記して感謝申し上げる

注意 1 ユークリッド完全数では, $A = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数と仮定したので少し違う. このような定義を採用すると結果が簡単になり分かりやすい.

表 1: Euler hyper perfect number $m = 2\mu$; A: パートナー

a		$A = Q = 2^e - 5$	
$m = -4$			
a	2^e	$A = 2^e - 5$	
8	2^3	3	3
16	2^4	11	11
64	2^6	59	59
256	2^8	251	251
1024	2^{10}	1019	1019
4096	2^{12}	4091	4091
$m = -2$			
a	2^e	$A = 2^e - 3$	$2^e - 3$
8	2^3	5	5
16	2^4	13	13
32	2^5	29	29
64	2^6	61	61
512	2^9	509	509
1024	2^{10}	1021	1021
$m = 0$		$A = Q = 2^e - 1$	メルセンヌ素数
a	2^e	$A = 2^e - 1$	$2^e - 1$
8	2^3	7	7
32	2^5	31	31
128	2^7	127	127
8192	2^{13}	8191	8191

事実 1 $m = 0$ のとき $k = aA/2$ はユークリッドの完全数.

次に乗数 h をいれた場合を扱う.
$h > 2$ を奇素数とし乗数という.

定義 2 $A = 2h\varphi(a) - 1 + m$, $\varphi(A) = ah + m - 2$ を満たす a を *Euler hyper perfect number with multiplier h, transition parameter m* (平行移動 m, 乗数 h のオイラー超完全数) と呼ぶ.

以前乗数の無い場合には
$A = 2\varphi(a) - 1 + m$, $\varphi(A) = a + m - 2$ を満たす a を オイラー超完全数 と呼ぶ.
という用語を用いたが便宜上この 場合を $h = 1$ の場合として取り扱う.

3　m: 偶数の場合

定理 1 $m = 2\mu$ *(偶数)*　　　　　*.h*　　　　　　　　　　　　　　　*A*　*Q:*　　*, a*　2^e*(2*
き) となる

$a = 2^e$ となるがこれは定義の式. (したがって先祖返りの場合という.)

古典完全数論では偶数の完全数は ユークリッド完全数になるというオイラーの結果があるが上記の結果はオイラーの定理の類似と見ることができる.

4　m が奇数の場合

古典完全数論では奇数の完全数は存在しないと思われている．オイラー超完全数では奇数解が多くありしかも興味深い性質を持っていてこれらの研究は十分に意味のあるやりがいのある仕事ということができる．

4.1　$m = -1$ の場合

$m = -1$ によって, $2^e + 2 = 4; e = 1$.
$a = p$: 素数,$A = 2Q, (Q$: 素数).
$A = 2Q = 2\varphi(a) - 2 = 2(p-1) - 2 = 2p - 4, Q = p - 2$. (Q, p):双子素数.

表 2: Euler hyper perfect number $h = 1, m = -1$; A: パートナー

a		A	
4	2^2	2	2
$a = p$		$A = 2Q, Q = p - 2$	
5	5	6	$2*3$
7	7	10	$2*5$
13	13	22	$2*11$
19	19	34	$2*17$
31	31	58	$2*29$
43	43	82	$2*41$
61	61	118	$2*59$
73	73	142	$2*71$
103	103	202	$2*101$
109	109	214	$2*107$
139	139	274	$2*137$
151	151	298	$2*149$

$m = -1$ の場合, $A = 2\varphi(a) - 2, \varphi(A) = a - 3$ なので, $\varphi(2\varphi(a) - 2) = a - 3$ とまとめられる．
この場合に双子素数がでて来ることに注意しかつ厳密な証明を与えたのは当時小学生の高橋洋翔君であった．

5　$h = 1, m = -3$ のとき

表 3: Euler hyper perfect number $h = 1, m = -3$; A: パートナー

a		A	
$m = -3$			
9	3^2	8	2^3
$a = p$		$A = 4Q, p = 2Q + 3$	
13	13	20	$2^2 * 5$
17	17	28	$2^2 * 7$
29	29	52	$2^2 * 13$
37	37	68	$2^2 * 17$
41	41	76	$2^2 * 19$
61	61	116	$2^2 * 29$
89	89	172	$2^2 * 43$
97	97	188	$2^2 * 47$
109	109	212	$2^2 * 53$

$m = 1 + 2\mu = -3$ とする.
基本等式より

$$2^e \mathrm{co}\varphi(L) + 2\mathrm{co}\varphi(a) = 3 - m = 6$$

$$2^{e-1} \mathrm{co}\varphi(L) + \mathrm{co}\varphi(a) = 3.$$

$L = 1$ とすると $\mathrm{co}\varphi(a) = 3$ により数表より, $a = 9$.
$L > 1$ とすると, $2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) \geq 2^{e-1} \geq 1$.
$e = 2, \mathrm{co}\varphi(a) = 1$. $a = p$:素数, $A = 4Q$, Q:素数.
定義式 $A = 2\varphi(a) - 4 = 2(\varphi(a) + \mu)$
$m = -3 = 1 + 2\mu$ によって, $\mu = -2$.
$e = 2, A = 4Q$.
$p = 2^{e-1}Q + 1 - \mu = 2Q + 3$
二つの素数,p, Q が 1 次の関係式　$p = 2Q + 3$　で結ばれているのでスーパー双子素数という.
一般には $p = aQ + b$ と自然数 a, b によって, (互いに素で $a + b$ が奇数) という関係式で結ばれているとき p, Q が素数であるならこれをスーパー双子素数という.(高橋洋翔)
オイラー超完全数の解としてスーパー双子素数がでてきてこれらは無限の解をもっていると思われる.

6　ダブルオイラー関数

オイラー関数の合成 $\varphi(\varphi(a))$ を $\varphi^2(a)$ と書き ダブルオイラー関数という.
次の結果は 岩瀬さんによる予想である.

定理 2 $4\varphi^2(a) = a$ なら $a = 2^e$

Proof a は 偶数なので, $a = 2^e L, (2 \not| L)$ と書ける.
$\varphi(a) = 2^{e-1}(\varphi(L)), \varphi(L) = 2^f K, (f \geq 0, 2 \not| K)$ と奇数 K で書く.
$\varphi(a) = 2^{e-1+f} K$ によって $\varphi^2(a) = 2^{e-2+f}\varphi(K)$.
仮定によって $4\varphi^2(a) = 2^{e+f}\varphi(K) = a = 2^e L$.
ゆえに $2^f\varphi(K) = L$. L は 奇数なので,$f = 0$.
$\varphi(L) = K$ 奇数によって $L = 1$. $a = 2^e$
q.e.d.
$8\varphi^3(a) = a$ なら $a = 2^e$ も同様に正しい.
一般の場合は 梶田さんによると思います.

7　ダブルオイラー 超完全数

$4\varphi^2(a) = a$ と $a = 2^e$ は同値.
$A = 4h\varphi^2(a) - 1 + m$ は素数と仮定すると $\varphi(A) = 4h\varphi^2(a) - 2 + m = ah + m - 2$.

定義 3 $A = 4h\varphi^2(a) - 1 + m, \varphi(A) = ah + m - 2$ を満たす a を ダブルオイラー 超完全数 *(double Euler hyper perfect number)* と呼ぶ.

パソコンで数値例をいくつかあげる.

表 4: Double Euler hyper perfect $h=1$; A: パートナー

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-2$			
8	2^3	5	5
16	2^4	13	13
32	2^5	29	29
64	2^6	61	61
512	2^9	509	509
1024	2^{10}	1021	1021
4096	2^{12}	4093	4093
$m=-1$			
4	2^2	2	2
5	5	6	$2*3$

表 5: Double Euler hyper perfect $h=1$; A: パートナー

a	素因数分解	A	素因数分解	$aA/2$:完全数
m= 0				
4	2^2	3	3	6 :完全数
8	2^3	7	7	28
32	2^5	31	31	496
128	2^7	127	127	8128
m= 1				
3	3	4	2^2	6
5	5	8	2^3	20
17	17	32	2^5	272
257	257	512	2^9	65792
m= 2				
4	2^2	5	5(Fermat 素数)	
16	2^4	17	17	
256	2^8	257	257	
m= 4				
4	2^2	7	7	
8	2^3	11	11	
16	2^4	19	19	
64	2^6	67	67	
128	2^7	131	131	
4096	2^{12}	4099	4099	

8　偶数解の場合

a:偶数解の場合, m:偶数. 逆も正しい.

命題 2 *a:偶数解の場合, $a = 2^e, A = p$ は素数, $p = h2^e - 1 + m$:素数.(先祖返り)*

例えば $h = 1, m = -2(p = 2^e - 3), m = -4(p = 2^e - 5), m = 2(p = 2^e + 1), m = 4(p = 2^e + 3)$: $p = h2^e - 1 + m$.

9　奇数解の場合

$A = 4h\varphi^2(a) - 1 + m, \varphi(A) = ah + m - 2$ において, a が奇数解なら m も奇数. $m = 1 + 2\mu$ と書く.

よって $A = 4h\varphi^2(a) + 2\mu, \varphi(A) = ah + 2\mu - 1$ を得る.

A:偶数なので, $A = 2^e L, (L:$ 奇数$)$ と書く.

$2^e L = 4h\varphi^2(a) + 2\mu$, $2^{e-1}\varphi(L) = ah + 2\mu - 1$.

第１式を２で割って $2^{e-1}L = 2h\varphi^2(a) + \mu$,

上式から第２式を引くと

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = h(2\varphi^2(a) - a) - \mu + 1.$$

$\varphi^2(a)$ を計算するため $\varphi(a) = 2^f X, (f \geq 0, X:$ 奇数$)$ とおくとき, $\varphi^2(a) = 2^{f-1}\varphi(X)$.

$W_0 = 2^f X - \varphi(a) = 0$ とおく.

さらに $Z = 2\varphi^2(a) - a$ とおくと $2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = hZ - \mu + 1$.

$\varphi^2(a) = 2^{f-1}\varphi(X)$ によって

$$Z = Z - W_0 = 2^f\varphi(X) - a - 2^f X + \varphi(a) = -2^f\mathrm{co}\varphi(X) - \mathrm{co}\varphi(a).$$

よって

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = h(-2^f\mathrm{co}\varphi(X) - \mathrm{co}\varphi(a)) - \mu + 1$$

.

$$1 - \mu = 2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) + h(2^f\mathrm{co}\varphi(X) + \mathrm{co}\varphi(a)).$$

２倍して

$$2(1 - \mu) = 2^e\mathrm{co}\varphi(L) + 2h(2^f\mathrm{co}\varphi(X) + \mathrm{co}\varphi(a)).$$

$m = 3 - 2(1 - \mu)$ によると

$$m = 2\mu + 1 = 3 - 2h(2^f\mathrm{co}\varphi(X) + \mathrm{co}\varphi(a)) - 2^e\mathrm{co}\varphi(L).$$

これを基本等式という.

少し先回りして, 定義 3 の第 2 式 $\varphi(A) = ah + m - 2$ に戻る.

$A = 2^e Q, a = p, \varphi(a) = p - 1 = 2^f X, X = r$: 素数 とすると

$2^{e-1}Q = hp + 2^{e-1} + m - 2, p = 1 + 2^f r$ が成り立ち, $m, e.f$ が定数で, 3 素数 Q, p, r が 2 つの 1 次式で結ばれているのでこれらはウルトラ三つ子素数になる.

ウルトラ三つ子素数は解が 2 つ以上あるとき解は無限にあるという高橋予想がある.

ウルトラ三つ子素数が限りなく存在するような方程式がごく自然な解として出るところにダブルオイラー関数を用いた超完全数に意義があると思われる.

注意 2 $Z = 2\varphi^2(a) - a$ が出ているが, 梶田光 (高校 1 年) は新しく ダブルオイラ余関数 $a - 2\varphi^2(a)$ を導入し詳しく研究を行っている. 私は彼の研究に触発されてダブルオイラー 超完全数を定義した.

10　$h=1, m=-3$ のとき

命題 3 $h=1, m=-3$ のときダブルオイラー 超完全数 は次の通り.

1) $a=7, A=2^2$ *;*

2) $a=17, A=28=2^2*7$*;*

3) $a=257, A=508=2^2*127$.

Proof

$m=-3; \mu=-2$ のとき, 基本等式により,

$$3=2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)+2^f\mathrm{co}\varphi(X)+\mathrm{co}\varphi(a).$$

よって,

1) $L>1, e=2, \mathrm{co}\varphi(L)=1, \mathrm{co}\varphi(X)=0, \mathrm{co}\varphi(a)=1; X=1, a=p, L=Q$: 素数.
$\varphi(a)=p-1=2^f$. $p=2^f+1$: Fermat 素数. よって $t>0$ があり $f=2^t$.
$A=4Q=4\varphi^2(a)-4$, $\varphi(A)=2(Q-1)=p-5$.
$\varphi^2(a)=\varphi(p-1)=\varphi(2^f)=2^{f-1}$. ゆえに $A=4Q=2^{f+1}-4; Q=2^{f-1}-1$: Mersenne 素数.
$f-1=\rho=2^t-1$:素数.
$p=2^t+1=3,5,17,257,65537$ しかないので, $2^f=2,4,16,256,65536$.
$2^{f-1}-1=7,127,(65536/2-1=32767=7*31*151)$. よって,
$a=17, A=28=2^2*7$, および $a=257, A=508=2^2*127$.

2) $L=1$ のとき $3=2^f\mathrm{co}\varphi(X)+\mathrm{co}\varphi(a)$; $2=2^f\mathrm{co}\varphi(X), 1=\mathrm{co}\varphi(a)$. さらに $A=2^e, f=1, X=r, a=p.r, p$:素数.
$\varphi(a)=p-1=2r$ によって, $\varphi^2(a)=r-1$.
定義式に戻る.
$A=2^e=4\varphi^2(a)-4$. $2^{e-2}=\varphi^2(a)-1=r-2$.
よって, $r=2^{e-2}+2$:素数によって, $e=2, r=3$. $A=4, a=p=1+2r=7$.

q.e.d.

私は上の結果は十分面白いものと思っている. 完全数を元にして種々の類似の概念を導入し完全数類似の数が得られている.

パソコンによる数値解は次の通り.

表 6: Double Euler hyper perfect numbers $h = 1$; A: パートナー

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -3$			
7	7	4	2^2
17	17	28	$2^2 * 7$
257	257	508	$2^2 * 127$

11 $m = -5$ のとき

$h = 1, m = -5$ と仮定する. $\mu = -3$ により基本等式
$\varphi(a) = 2^f X, (f \geq 0, X:$ 奇数) とおいた.

$$m = 2\mu + 1 = -6 + 1 = 3 - 2(2^f \mathrm{co}\varphi(X) + \mathrm{co}\varphi(a)) + 2^e \mathrm{co}\varphi(L).$$

$$-8 = 2(2^f \mathrm{co}\varphi(X) + \mathrm{co}\varphi(a)) + 2^e \mathrm{co}\varphi(L).$$

2 で割ると

$$4 = 2^{e-1} \mathrm{co}\varphi(L) + 2^f \mathrm{co}\varphi(X) + \mathrm{co}\varphi(a).$$

1) $\mathrm{co}\varphi(L) = \mathrm{co}\varphi(X) = \mathrm{co}\varphi(a) = 1, f = 1$ の場合は,$\varphi(a) = 2^f X$, $L = Q, a = p, X = r$ はみな素になり, $e = 1$.
$A = 2Q$, $\varphi(p) = p - 1 = 2r$,
定義式に戻ると $\varphi(A) = Q - 1 = ah + m - 2 = p - 7$; $Q = p - 6$. (p, Q) は, はとこ素数という. $p = 2r + 1, Q = p - 6$ の関係がありこれらは素数なので (p, r, Q) は ウルトラ三つ子素数という.
2) $\mathrm{co}\varphi(L) = \mathrm{co}\varphi(X) = 0; \mathrm{co}\varphi(a) = 4$ のとき, $a = 8, L = X = 1, A = 2^e$ 定義式に戻ると $\varphi(A) = 2^{e-1} = ah + m - 2 = 8 - 7 = 1$. よって $e = 1; A = 2$.
数表は次の通り.

表 7: Double Euler hyper perfect numbers $h=1, m=-5$; A: パートナー

a		$\varphi(a)$	A	2
8	2^3	2^2	2	2
p		$\varphi(p)=2r$	A	$2Q, p=Q+6$
11	11	$2*5$	10	$2*5$
23	23	$2*11$	34	$2*17$
47	47	$2*23$	82	$2*41$
59	59	$2*29$	106	$2*53$
107	107	$2*53$	202	$2*101$
179	179	$2*89$	346	$2*173$
263	263	$2*131$	514	$2*257$
359	359	$2*179$	706	$2*353$
467	467	$2*233$	922	$2*461$
563	563	$2*281$	1114	$2*557$

12 $m=-9$ のとき

$h=1, m=-9$ と仮定する. $\mu=-5$ により

$$6=2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)+(2^f\mathrm{co}\varphi(X)+\mathrm{co}\varphi(a)).$$

$\mathrm{co}\varphi(L)=\mathrm{co}\varphi(X)=\mathrm{co}\varphi(a)=1$ の場合
$6=2^{e-1}+(2^f+1)$ これは $e=1, f=2$. $L=Q, a=p, X=r$ はみな素になり, $e=1, f=2$.
$A=2Q, a-1=2^2r$, $\varphi(a)=p-1=4r$,$\varphi^2(a)=2(r-1)$.
定義式に戻ると $A=2Q=4\varphi^2(a)-10, \varphi(A)=a-11$.
これより $Q=8(r-1)-5, Q-1=4r-10$

表 8: Double Euler hyper perfect numbers $h = 1, m = -9$; A: パートナー

$a = p$		$\varphi(a) = 4r$	$A = 2Q$ $(Q = 4r - 9)$	2
13	13	$2^2 * 3$	6	$2 * 3$
29	29	$2^2 * 7$	38	$2 * 19$
53	53	$2^2 * 13$	86	$2 * 43$
149	149	$2^2 * 37$	278	$2 * 139$
173	173	$2^2 * 43$	326	$2 * 163$
293	293	$2^2 * 73$	566	$2 * 283$
317	317	$2^2 * 79$	614	$2 * 307$
389	389	$2^2 * 97$	758	$2 * 379$
509	509	$2^2 * 127$	998	$2 * 499$
557	557	$2^2 * 139$	1094	$2 * 547$