0cm

スーパー完全数の平行移動

飯高 茂

1. スーパー完全数とスーパー双子素数 :まとめ

a の約数の和 $\sigma(a)$ で示す.

$\sigma(a) = 2a$ を満たすa を完全数という.

完全数 は $a = 6, 28, 496, 8128,$ などで紀元前から知られていた.

エウクレイデスの原論の最後

$q = 2^{e+1} - 1$ が素数なら $a = 2^e q$ が完全数になるという結果がある.

一般に パラメータ m を取り m だけ平行移動した狭義の完全数 α

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数になる e によって $\alpha = 2^e q$ と書けるとき α を m だけ平行移動した(狭義)完全数という.

$a = 2^e$ および $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと,$N = \sigma(a)$, $q = N + m = \sigma(a) + m, q + 1 = 2a + m$.

$\sigma(\alpha) = N(q+1) = (2^{e+1}-1)q + N = 2\alpha + N - q = 2\alpha - m.$

$\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ を
α を未知数とみて平行移動 m の完全数の方程式.
解 α を平行移動 m の(広義)完全数
(perfect number with translation parameter m)
$m = 0$ の場合
αが偶数なら $\alpha = 2^e q (q = 2^{e+1} - 1$ が素数$)$と書けることをオイラーが示した.
奇数完全数は存在しないと予想.
与えられた m に対し平行移動 m の(広義)完全数を決定することはどれもできていない.

2. スーパー完全数のm だけ平行移動

$q=2^{e+1}-1+m$が素数になるとき$\sigma(q)=q+1.$

この左辺は $\sigma(q)=\sigma(\sigma(a)+m).$

右辺は $q+1=2a+m$

一方, $q=\sigma(a)+m$ なので

$$\sigma(q)=\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m.$$

左項を抜いて次の式を得る.

$$\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m.$$

a を未知数とみて平行移動 m のスーパー完全数の方程式と言う.

また解 a を平行移動 m のスーパー完全数という.

$A=\sigma(a)+m$ とおきパートナという.

$\sigma(A)=2a+m.$

平行移動 m のスーパー完全数の連立型定義式.

$m = 0$ のとき完全数の方程式 $\sigma(a) = 2a$ と類似した形
解をスーパー完全数と呼ぶ.
この概念はD.Suryanaryana により 1969 年に導入された.

命題 1. $a = 2^e$ が平行移動 m のスーパー完全数ならば$q = 2^{e+1} - 1 + m$は素数となる.

2.1. $m=-18$ の場合. この場合,2べきの解以外は $a=3^3=27$ と $a=3p(p\neq 3, p:$ 素数$)$ となるらしい. さらに $q=2p-7$ は素数と推測する.

$a=3p$ に対してそのパートナ A は $A=\sigma(3p)-18=4p-14=2q, q=2p-7$.

Table 1. $m = -18$

a	$facor$	A	$factor$
15	$3 * 5$	6	$2 * 3$
16	2^4	13	13
21	$3 * 7$	14	$2 * 7$
27	3^3	22	$2 * 11$
39	$3 * 13$	38	$2 * 19$
57	$3 * 19$	62	$2 * 31$
64	2^6	109	109
111	$3 * 37$	134	$2 * 67$
129	$3 * 43$	158	$2 * 79$
201	$3 * 67$	254	$2 * 127$
219	$3 * 73$	278	$2 * 139$
237	3*79	302	2*151
309	3*103	398	2*199
327	3*109	422	2*211
417	3*139	542	2*271

この場合,2べきの解以外は $a = 3^3 = 27$ と $a = 3p(p \neq 5, p:$ 素数) となるらしい. このとき $q = 2p - 7$ は素数.

$a = 3p$ として出る素数はスーパー双子素数.

命題 2. $p, q = 2p - 7$がともに素数なら $a = 3p$ は平行移動 $m = -18$の スーパー完全数.

命題 3. $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m,\ m = -18$ のとき

$a = 3L, (L \neq 0 \bmod 3)$ と書けるなら, $p = L, q = 2p - 7$ はともに素数.

p と $q = 2p - 7$ がともに素数なので,これをスーパー双子素数という.

一般に与えられた 整数 $(a > 0, b)$ に対して, $p = aq + b$ とおくとき p, q がともに素数なら (p, q) を a, b に関しての 超(スーパー)双子素数という.

与えられた整数 $(a > 0, b, c > 0, d)$ に対して $p = aq + b, r = cq + d$ とおくとき
p, q, r がともに素数なら (p, q, r) をウルトラ３つ子素数という.

3. m だけ平行移動したウルトラ完全数

$a=2^e$ のとき$\sigma(2a)=4a-1, \sigma(\sigma(a)+m)-m=2a$ なので

$$\sigma(\sigma(\sigma(a)+m)-m)=4a-1$$

を得る．これをa を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, 解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数という．

$m=0$ なら $\sigma^3(a)=4a-1$ になりこれが高橋の定義したウルトラ完全数である．

4. m だけ平行移動したウルトラ完全数II型, ニュータイプ

$a=2^e, (q=2a-1+m:$ 素数$)$ のとき, $N=2^{e+1}-1$ とおくと, $\sigma(a)=N=2a-1=q-m$ なので$q=\sigma(a)+m$.

$A=\sigma(a)+m$ とおく. ($A=q$:素数, を心得ておく.)

$\sigma(A)=q+1=A+1$ なので, $B=\sigma(A)-1$ とおく. ($B=q$:素数, を心得ておく.)

$\sigma(B)=q+1=2a+m.$

$a = 2^e, (q = 2a - 1 + m :$ 素数) の仮定の下で得られた連立式

$A = \sigma(a) + m,\ B = \sigma(A) - 1,\ \sigma(B) = 2a + m$

($a = 2^e$ の仮定をすっかり忘れ) を満たす a を平行移動 m のウルトラ完全数II型という．A をパートナー, B をシャドウという.$qM = 2a - 1 + m$ を疑似メルセンヌ数という.

区別のために前の式で定められたウルトラ完全数をI型という．または高橋のウルトラ完全数とも言う．ウルトラ完全数II型をウルトラ完全数ニュータイプともいう.

ウルトラ完全数II型において $m = -28, -18, -2-2\mu (\mu :$ 完全数) のときの解からウルトラ三子素数がぞろぞろ出てくる.

ニュータイプのウルトラ完全数の発見の端緒

2018年7月2日新宿にある大学病院の地下の放射線治療室前のベンチで得られ,

その後西国分寺にある都立多摩図書館でまとまった結果が得られた.

(「私は放射線の影響かも知れませんが,数学での良いアイデアが得られた」と礼を述べた)

TABLE 2. $m=-18$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

a	$factor$	$p=a/3$	$q=2p-7$	$r=6p-19$	$r+1$	$2a+m$
15	$3*5$	5	3	11	12	15
16	2^4			13	14	16
21	$3*7$	7	7	23	24	21
29	29			39	40	29
39	$3*13$	13	19	59	60	39
64	2^6			109	110	64
129	$3*43$	43	79	239	240	129
201	$3*67$	67	127	383	384	201

定理 1. $m=-18$ のとき, $p, q=2p-7, r=6p-19$ がすべて素数なら $a=3p$ はニュータイプのウルトラ完全数になる.

Proof

$m=-18, a=3p$ を代入すると,

$A=\sigma(a)+m=4p+4-18=4p-14=2q, q=2p-7$. q: 素数と仮定すると,

$r=B=\sigma(A)-1=3q+2=3(2p-7)+2=6p-19$. r: 素数と仮定すると,

$\sigma(B)=6p-18=2a+m$

End

さらにこの逆が成り立つ.

命題 4. p :素数, $a=3p$, $A=\sigma(a)+m=2q, q=2p-7$
としてB $B=\sigma(A)-1, \sigma(B)=6p-18=2a+m$ を仮定すると, q, r はともに素数.

命題 5. $p > 3$:素数, $a = 3p$, $A = \sigma(a) + m = 2q, q = 2p - 7$ とし $B = \sigma(A) - 1, \sigma(B) = 6p - 18 = 2a + m$ を仮定すると, q, r はともに素数.

Table 3. $m = -18$ Super

a	素因数分解	$p = a/3$	$q = 2p - 7$
15	$3 * 5$	5	3
16	2^4		
21	$3 * 7$	7	7
27	3^3	9	
39	$3 * 13$	13	19
57	$3 * 19$	19	31
64	2^6		
111	$3 * 37$	37	67
129	$3 * 43$	43	79
201	$3 * 67$	67	127
219	$3 * 73$	278	$2 * 139$

$m = -18$ 以外にも $m = -28, -14, -58,$ などでウルトラ完全数 ニュータイプから多くのウルトラ三つ子素数が登場する.

5. ウルトラ完全数II型の基本定理

ウルトラ完全数II型では完全数についてのオイラーによる定理の類似が成り立つ.

定理 3. $m = 0$ のときウルトラ完全数 II型 である a は偶数を仮定すると, $a = 2^e$, かつ$q = 2a - 1$ は素数になり $\alpha = aq$ は完全数になる.

補題 1. ウルトラ完全数 II型の解aが 2 べき,すなわち $a = 2^e$ なら, $A = B = 2a - 1 + m$ は素数(a と A は補完的な役)

TABLE 4. $m=-14$ のウルトラ完全数 ニュータイプ

a		p	$A=p-13$	$q=A/6$	$B=r=12q+11$	$r+1$	$r+1-2a$
16	2^4	16	3	0.5	17	18	-14
37	37	37	24	4	59	60	-14
43	43	43	30	5	71	72	-14
64	2^6	64	51	8.5	113	114	-14
127	127	127	114	19	239	240	-14
128	2^7	128	115		241	242	-14
133	$7*19$	133	120	20	251	252	-14
199	199	199	186	31	383	384	-14
247	$13*19$	247	234	39	479	480	-14
317	317	317	304		619	620	-14
331	331	331	318	53	647	648	-14
343	7^3	343	330	55	671	672	-14
367	367	367	354	59	719	720	-14
379	379	379	366	61	743	744	-14

$343=7^3$ という特異解が出てきた.

$m=-14$ のとき解 a が素数 p で, $A=p-13$ は素数 q の6倍になることが多い.

このとき $p=6q+13$. $B=r$ とおくとこれも素数で $r=12q+11$. $(q,p=6q+13,r=12q+11)$ はウルトラ三つ子素数.

ただし $a=37$ なら $A=p-13=24, q=24/6=4$ なので素数ではなくこのままでは使えない.

$m=-14$ での結果は μ を完全数とするとき $m=-2-2\mu$ でも成り立つ(水谷一氏の指摘).

完全数の一般化と双子素数の一般化がこのように結びついたのである.驚異というべきか.