種数の１見解

1. 我が師 H先生

高校生の頃, マンモスというあだ名の先生がいた. 簡単にH先生とよぶことにする.

H先生は白髪で、マンモスというあだ名が示すとおり、巨体の持ち主で動作もゆったりしていた.

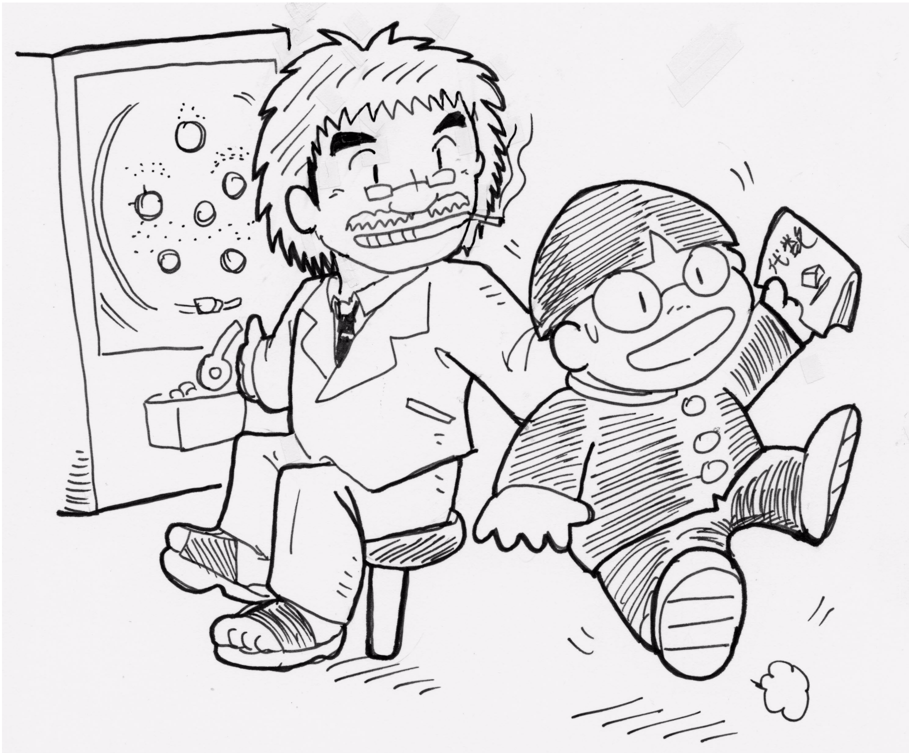

Figure 1

　アルコール漬けの毎日でありながら、パチンコも大好きな先生との評判だった.
　先生は勤務先の高校からから帰る途中でパチンコ屋に寄ることがよくあった．パチンコ屋のある道は通学路なので下校中の高校生が通る.
　ちょっと覗くとＨ先生が熱心に指先に力をいれ忘我の境地である.
　「あっ、また先生がやっている」
　と思わず声を出して口を押さえる.
　「そこにいる○○、こっちへ来いよ．結構、今日は稼いだぞう」

そのとき私は高校２年生だったから、昭和３４年、すなわち１９５９年の夏であった．その頃すでに高校ではゼミがあったのだから、この高校はなかなかよくやっていたといえよう．

今から考えてみると、Ｈ先生の独断でゼミをやっていたのかもしれない．やりたい先生が勝手にできたとすれば、それはそれですばらしいことに違いない．

1.1. Ｈ先生の授業．Ｈ先生は、巨躯でありながら声が低く、クラス全体には声が通らない．板書の字はきれいなのだが、線が細くてよく見えないと言われていた．私は背が低いのでいつも前の方に座っていたから、声や板書で不満を覚えたことはない．しかし

「先生の声が小さくて聞こえません」

と訴える生徒がいた．Ｈ先生は気にもとめないでこう言った．

「声を大きくしてくれ、と言ってください。大きくします。そのうちまた小さくなるかもしれないけど」

　Ｈ先生にとって校長などこわくもない．教科書だって批判する．そして数学の深い見方を教えてくれた．Ｈ先生の声はか細く、板書の字は薄いけれど、数学の世界にぐいぐいと引き込む不思議な魅力に満ちていた．

　高校の授業は５０分なのだが、Ｈ先生の授業を聞いていると、５０分が実に早く経つ．不思議なほどだった．ふと時計を見るとすでに３０分たっている．あと、２０分でこの至福の世界から出ないといけない、そのことを知ること自身に恐怖を感じた．

またこんなことも言われた．

「大学に入れればいいという教育ではいけない．大学に入ってから諸君が困らないような教育をしたいと思っている」

先生の矜持、真のプライドをここに見る．このような先生を生徒は誇りに思うものである．

1.2. 講習会. H先生は特別なプリントを作って高校数学プラスアルファの内容を教えてくれた.

　ハミルトン流の虚数の導入、行列式の定義など

　高校数学はしばしば、時間数の関係で理論が中途半端のままで急に終えることがある.

　それはよくない、と先生は思っておられたのであろう.

　数学ではすこし進んだことを勉強すると、視野が広がりよく分かるようになることが多い.

　そのような効果をねらっていたのかもしれない.

1.3. 究極の受験対策. 大学の入学試験は公立高校1年生にとっても大きな重圧としてのしかかってくる.

　こんなことをH先生は言った.

　「入試問題を作るのは大学の先生です.

　大学の数学が分かれば、入試問題を作る根本の精神が分かる.

　だからその問題の意図が見えるようになります.

　大学の数学の本を読めば入試問題のカラクリが見えて、問題の解法が自然にわかるようになりますよ」

そこで、私はすぐに（千葉）市内の古本屋さんにいって大学レベルの数学の本を探すと、安くて薄い本が見つかった．

東北大学の岡田良知教授の書いた『代数学提要』（内田老鶴圃）である．

薄い本なのに, 内容が充実していて無駄のない本であって実におもしろかった.

$3{,}4$ 次方程式の根の公式には感心した

ガウスによる，代数学の基本定理の証明が紹介されていたが理解できなかった.

夏休みが終わり、２学期が始まるとＨ先生はゼミをしようと言い出した．

行列式に興味を持った人を対象に、古屋茂著『行列と行列式』を勉強しよう、という提案である．

放課後に３人でＨ先生のところでゼミのように勉強することになった．

そのうち, ２人は来なくなった.

結局、一人だけではゼミは進まない。

H 先生の昔話をきくだけで終わることが多くなりじきに消滅した。

その高校では大きな職員室というのは無く、先生方は専門別に集まって研究室とよばれる部屋にいた．

数学研究室には先生方の机の周りに大きなガラス付きの書棚がいくつかあり、数学の専門書が並べられていた．

ローラン・シュワルツ著、岩村聯訳『超函数の理論』、岩澤健吉著『代数函数論』、高木貞治著『解析概論』などの堂々たる数学の本が並べられていて、厳かな学問がそこにあった．

なるほど、大学の数学は難しい．

その中に「ソビエト科学アカデミー編」:『数学通論』 というのがシリーズであった.

数学の本ではあるが読み物風になっていて読みやすかった。

リーマン面という曲面の絵があり, 曲面のアナの数を示性数と呼び、これが最も基本的な性質を表しているという.

これが、種数との出会いであった。

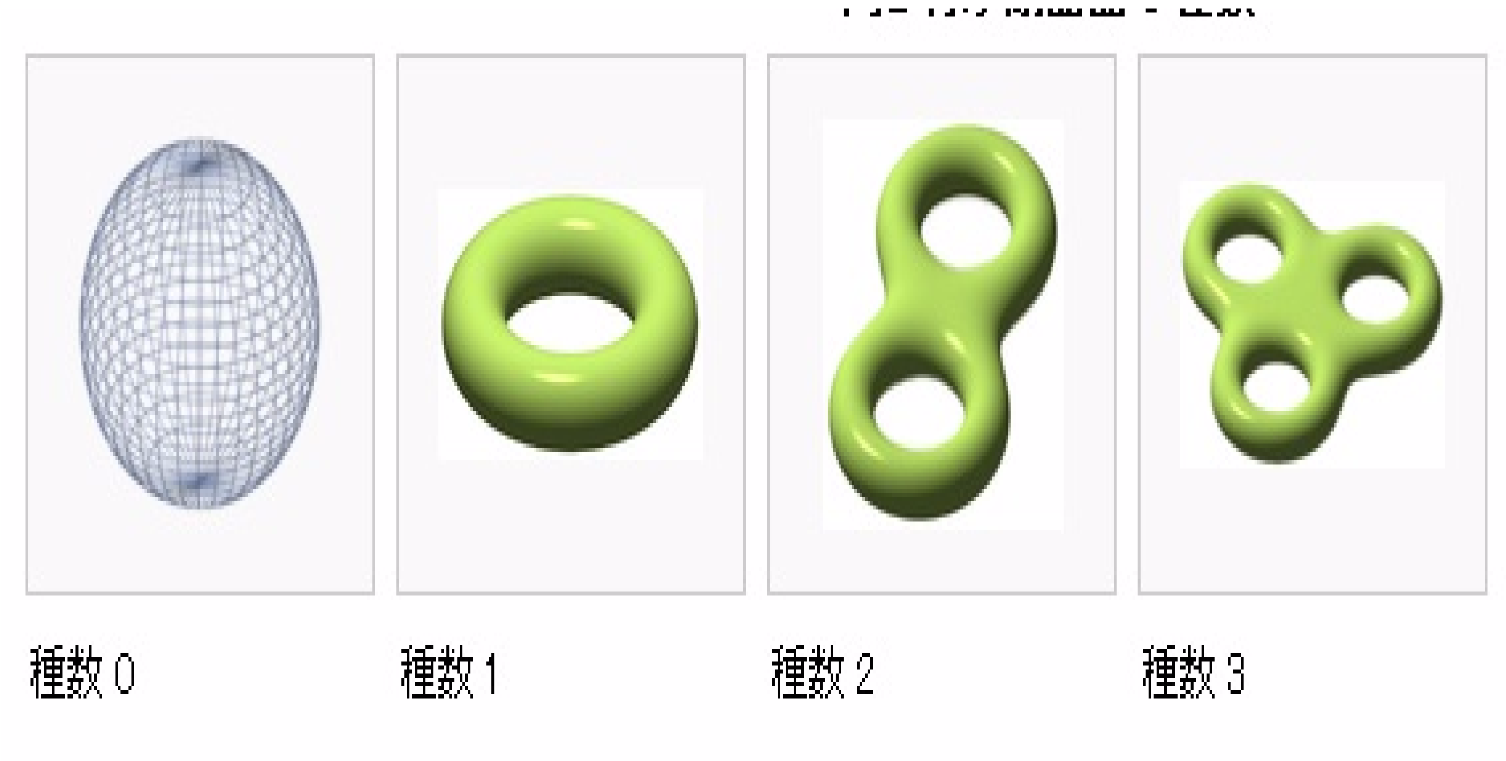

Figure 2

1.4.　Ｓ君との出会い．大学に入ってから一番うれしかったことは多くの数学少年に会え、彼等と友人になれたことである．なかでも、Ｓ君（新谷卓郎君）にあえたことが大きい．

　彼との出会いは印象的で今でもありありと覚えている．

　さて，新学期早々に知り合ったＹ君（吉田健介君）と物理や数学の話をよくしていた．

　Ｙ君は早熟の人だから何でもよく知っていた．

　私は千葉高校では大学レベルの数学や、理論物理の話し相手をしてくれる人いなかったのだが、大学では違う．

　私にとって一番興味のある数学や物理の話を友達とできる．これはうれしいことだ。

　そうは言ってもたわいない話ばかりで、複素正則関数の実部や虚部が調和関数になるのはすごいことだ、となどの話をしただけである．この会話を傍で静かに立ち聞きしている人がいる．

少し変な気がしたのだが、会話が切れるやいなや彼は話し始めた．

「大変失礼かと思いますが、お二人の話を聞いていると私の知らないことばかりです．どうしたら、そのようなことを勉強できるのでしょうか．ぜひ教えてください」

こう尋ねられ、内心どきっとし、びっくりもした．新入生だからまだ互いによく知らないとはいえ、同じ組の友達どうしなのに、驚くほど丁寧な言い方である．

「いや、別にたいしたことではありません．どこにでもある本を読んだだけです」
と答えながら、彼の様子を見ると、度の強いめがねを通して黒い瞳が輝いている．学生服の着方も鈍くさい印象である．しかし飾り気のない身なりで，コンパも嫌い．酒も飲まないとくれば私たちのお仲間に違いない．類が類を呼ぶとはこのことである．たちまちにしてうちとけ合い、何でも話せる仲になった．

1.5. 数学の仲間達. それから、３人で神田の古本屋街によく行くようになった. 古本屋には中古の洋書がよくでていたからである.

シュプリンガー社の黄色い表紙のハードカバーの数学書はとくに立派で、仰ぎ見る存在であった.

３年生になって本郷の教室になった。当時は、代数の講義は、１０時から１２時までに加えて、１３時から１４時までありその後で、助手の担当する問題演習が夕方の５時近くまであった。

他に幾何や解析関係など専門的な講義と演習が朝から晩まであった。

数学しかかない毎日は至福のときだった。

数学教育の講義もあったが、数学に没頭したかったので教育の講義を聴く気になれず、レポートを出せば単位はとれるという噂にすがって後でレポートを出すつもりだったが、期限に間に合わず単位が取れなかった。

Figure 3. 秋月康夫先生

1.6. お茶大に行く. 有名な数学者 秋月康夫先生がお茶大で学生向けの講義をするそうだ。

という連絡があり, 女子大に入れる滅多に無い機会ということもあり張り切って数学科の級友と出かけた。古びた教室に数学科の学生が多数集まった。

調和積分の本などで有名な秋月康夫先生は意外に小柄な風采のあがらない人であったが, 話は迫力があっておもしろかった。

最初に代数曲線についてふれて,

「次数より Geschlecht, すなわち種数が大切だね。知っているかな。」

と, いかにも偉そうな話しぶりだった。

たとえば, n 次曲線の種数は $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 以下で, 特異点がなければ丁度 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ になる.

　３年生の後期になり、ゼミの先生を決めなくては行けなくなった。
　新谷君はリー群の表現論をやりたいと言って早々と、岩堀長慶先生を選んだ。
　私は、整数論は敷居が高そうだから、代数幾何をとることにした。
　夭折の天才数学者　谷山豊先生の全集が私家版として東大で売られていた。
　それを繰り返し読んで、代数幾何が現代数学で重要な役を演じるようになったらしいのでそれを選ぶことにした。

2. 河田ゼミ

　狭心症で休んでいて学生がいなかった河田敬義先生（代数の講義をきいていた）に指導教官をお願い新しい代数幾何をやりたい、と言ったらしい。

Figure 4. kawada

先生や快く引き受けてくださり

スキームの理論の解説をしたDieudonne 教授の英文の講義録(100 ページほど) をテキストにしましょう。

とのことで青焼きのコピーを作るところからはじめた.

スキームの理論は A.Grothendieck の創始になる膨大な理論である.

それをきちんと本にしたのはDieudonne 教授で、フランス語の書

Éléments de géométrie algébrique (EGA)

に結実したが章別の本 I,II,IIIa,III b, と沢山あり

次の第４章はIV-1,IV-2,IV-3,IV-4 と４分冊にわかれそれぞれ300 ページあり,4 章までで合計1500 ページ超。

13 章まで書く予定だそうで いつ本ができるかだれも分からないという大変なものであった。

３章(III b) まではまじめに読んだが第4 章の半ばでギブアップした。

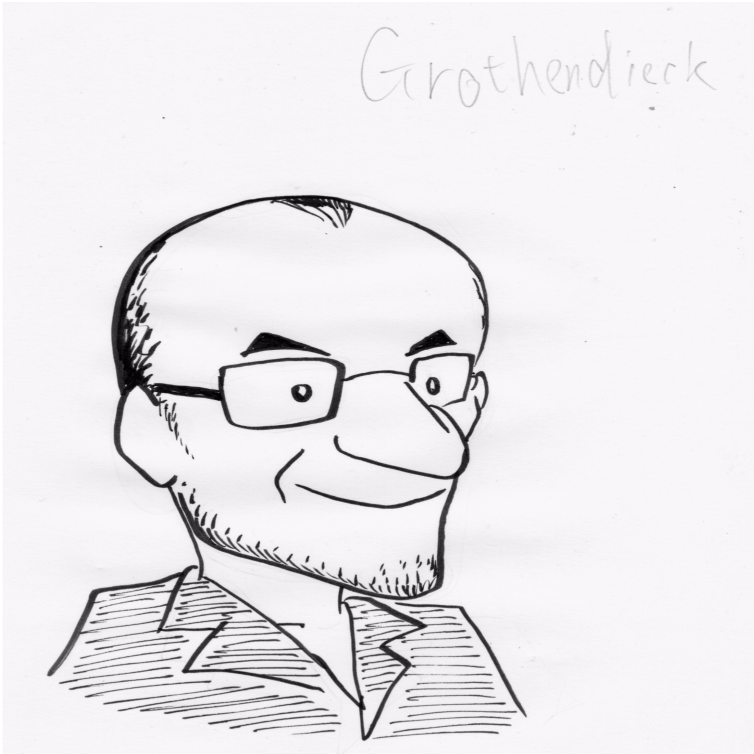

FIGURE 5. Grothendieck

2.1. 自主ゼミ. 河田ゼミの方は, H君とT君の3人で行った。

読んでいて分からないところがあり, 先生に質問すると答えがかえってこない.

先生に質問してはいけない。全部自分で考えないといけない

　くだらない論文を書くな。
　つまらない論文を読むな。
　いい論文は小平さんの、compact surfaces だ。2 次元はだいたい出来たようだからこれからは３次元をやるんだ。
　などと言われ大いに刺激を受けた。

当時、新進気鋭の若手、久賀道郎先生がさっそうと現れアーベル多様体の族の研究などを話してくれた。

歩きながら、

「ところで君、ファルマーの問題を知っているだろう。その多項式版、すなわち $n \geq 3$ のとき多項式の解は無いということが証明できるのだ。」

私は問題を理解すると直ちに天啓のようにひらめきがあり、

「種数でできる」

と答えた。

「$n \geq 3$ なら種数公式で $g > 0$ ですから、有理式では解がありません。」

と答えた。久賀先生は

それでもいいが、式の計算してもできるよ。

と言われた。その解答は、私の本「環論、これはおもしろい」に詳しく書いてある。

種数がいかに偉大なものかをあらためて意識した。

2.2. 代数曲線の場合. 代数曲線の場合は種数 g が最も大切であって, これによってその基本性質がわかる.

とくに, 有理曲線なら $g=0$.

逆に $g=0$ なら有理曲線になる.

次に複雑な曲線は楕円曲線でこれは $g=1$ で特徴付けられる.

$g \geq 2$ ならさらに複雑だがこれらは保型関数で一意化されるという共通性質がある.

2.3. **代数曲面の場合.** それでは代数曲面の場合はどうだろうか. 種数もいろいろで

幾何種数 p_g 算術種数 p_a, さらに線形種数 p_l などがある.

有理曲面なら p_g 算術種数 p_a は 0 になるが, これらが 0 でも有理曲面になるわけではない.

さらに複雑な 2 種数 P_2 があり, 有理曲面になる必要十分条件は $P_2 = p_a = 0$.

このとき $p_g = 0$ になる.

有理曲面と線織面を除外すると極小モデルになる。

代数曲面では極小モデル理論ができて美しい理論が成立する.

2.4. ザリスキーの極小モデル理論． 極小モデル理論を再構成したが, ザリスキーで戦後日本を訪れ、京大などで講義をし日本数学会のモノグラフの１つ『極小モデル理論』として出版されていた.

新しいスキーム論に比べると古色蒼然としているが、がんばって読んだ。

計算が多く、場合分けも複雑で得られた、カステルヌオヴォとザリスキーの有理性判定定理の鮮やかさに比してなんとも泥臭く美しい証明とは言えない。

2.5. シャファレヴィッチのゼミ．修士に入った頃、河田先生が

「ソ連からシャファレヴィッチらによる代数曲面のセミナーのノートが出ている」

と言われた。

「ロシヤ語だが、英訳がある。ただし訳者は数学が分からない人だ」

これは難読のセミナー集だったが、計算が多くスキーム理論と違い数学の実質が出ていて興味深かった。

さらに一般な m 種数 P_m がありそれから不変量 κ がでてきた。

$\kappa = 0$ や $\kappa = 1$ の場合に曲面の構造が決まっていくのがおもしろかった。

関連して。小平先生の compact surfaces I,II,III などを読んだ。

うわさ通り、明晰に書かれた優れた論文であった。

2.6. 小平先生とSpencer教授. 修士２年の夏に、滞米生活１７年の小平先生が１月ほど、東京に来る。

Figure 6. 小平先生

ついては琵琶湖でシンポジュームが開かれる、との知らせが河田先生からあり、Spencer 教授らの有名教授がでるシンポジュームに修士の学生として参加させてもらった。

琵琶湖周遊のクルージングがあり、その船の中で、若い者もなにかしゃべれと言われ、修士論文の準備になるかと思ってしていた、種数2の曲線の退化を調べる話をごく簡単にした。

一緒に出ていた落合氏によるとSpencer が、

「日本はすごい、中学生が数学をやっている」

と言っていた、と教えてくれた。

Spencer 教授は帰国の時、

「論文が出来たらぜひ送ってほしい」

と実に丁寧に言ってくれたのには感激した。

Spencer 教授は、その後小平教授の還暦の祝いの時東京に来て、我が家を訪ねた。

そのとき、私の母が、

「Spencer 教授を前にして、手をついてお辞儀をして終戦後、衣類や食料などを援助してくれてありがたかった。お礼をもうします。」

と言ってから、これをすぐ訳すように言った。

Spencer 教授はそのとき、うちの子どもの通っていた保育園に案内した。

白ひげの老教授を子どもたちは、サンタクロースが来た、と言って大歓迎した。

Spencer 教授も大喜びだった。

2.7. 変形と多種数. 小平先生が帰国し東大の教授に戻ったのは, 琵琶湖でシンポジュームがあった翌年の1968年で当時私は理学部助手になったばかりであった.

小平先生とSpencer教授の共同研究としては複素構造の変形論が有名である。

解析曲面の分類では、やはり多種数 P_m が基本的役割を演じている。

そこで小平先生に、

「多種数 P_m は変形で不変ではないでしょうか」

ときいてみると、

「なるほどそうかもしれない。しかし考えたことはない。」

との意外な返事である。

そこで小平先生の楕円曲面の理論などを参考にして多種数の変形不変性を証明した論文を書いた。

$\kappa = 2$ のとき極小なら $m > 1$ のとき

残った $\kappa = 0$ や $\kappa = 1$ の場合に変形不変性を調べれば良いのである。

このとき、楕円曲面の理論が役にたった。

ついでにザリスキーの理論でP_m を一般化して一般の因子 D で考えるのがありこれも勉強した。

$\dim|mD|+1$ を $h^0(mD)$ と書くと2次式になるとは言えない.

一般の代数多様体 V 上の因子 D について $h^0(mD)$ を研究することにして次の式をえた

$h^0(m_0D)>0$ となる自然数m_0 のあるとき、あるm_1 より大きい自然数m_1 について$m>m_1$ なら正の数α,β があり

$$\alpha m^\kappa \le h^0(mm_0D) \le \beta m^\kappa$$

を満たす整数κ がある.という結果であった.

κ は代数多様体 V と因子 D によって決まるので$\kappa(V,D)$ という記号で書くことにした。

これは V の次元 n 未満であり因子 D を用いて計ったある種の次元なので V の D 次元 と呼ぶことにし,

これについて,行く先が次元 $\kappa(V, D)$ のファイバー多様体の存在と、任意のファイバー多様体についての次元の評価式 (easy addition) などの基本的な性質を確立した.

基本的な結果の証明には、スキームが意外にも有用であった。角田秀一郎さんの助言が有益。

次元の評価が意味の無い場合すなわち,

すべての $m > 0$ について$h^0(mD) = 0$ の場合は $\kappa(V, D) = -\infty$ と書く。

D として標準因子 K_V をとった場合が基本的でこの場合の$\kappa(V, K_V)$ を標準因子次元、略して標準次元と呼ぶことにした。

$\kappa(V, K_V)$ を簡単に $\kappa(V)$ と書く。

こうすると, ソ連のセミナーノートの２次元の場合の不変量κ の直接の一般化になって好都合である。

代数多様体 V の次元が n のとき

$$\kappa(V) = -\infty, o, 1, 2, \cdots, n$$

になり, $0 < \kappa(V) < n$ なら一般ファイバー F の$\kappa(F)$ が0になるファイバー多様体に分解する.

この形で小平先生の楕円曲面の理論が一般化できる。こうして、高次元の代数多様体 V の構造が見えて、今後の研究方向が明確になる。

種数で曲線がおおむね決まる。

一般の代数多様体では、多種数と小平次元が最も基礎的な役割を果たしているに違いない。

これは、定理ではなくドグマであり、これを元に一般の構造を考えることができる。

高校生の頃、夢想した種数の一般化が１つの形になったのである。

これは大風呂敷であるが、いままで複雑に見えた代数曲面の分類理論も分かりやすくなる。

そういう趣旨のもとで $\kappa(V)$ の考え方を小平先生に説明した。先生は

「なるほど、そうですね。なるほど」

と言われ大変感心してくれた。

これには驚いた。先生が否定的意見：たとえば

- 大風呂敷を広げても、うまくいくかどうか分からないですよ
- 以前考えたことがあるがうまくいかなかった
- もっと地道に考えないと論文ができませんよ

などと言われたら、私はやめてしまったに違いない。

大数学者が感心してくれたので、勇気百倍である。

2.8. **結婚.** 助手になって３年目に結婚した。

Figure 7

　そして、彼女の勤め先が東京学芸大学なので、勤務先に近い小金井に、２部屋のを借りた（いわゆるダブルハウスで、一軒の家に玄関、キッチン、トイレ、風呂が２重についていて２家族で住める）

　私は次男だが、母に同居してもらった。

　月給は４万円に届かなかったが、家賃は２４０００円もした。

　一人の給料ではとってもやっていけなかった。

　新居に移ってから、頼まれて近所に買い物に行った。

　店のおばさんが、私をみてはなはだ怪しみ

「これで良いって、お母さんが言った。大丈夫？」

　と念を押すのである。これにはさすがに、びっくりした。

2.9. 例の $\kappa(V)$. 小平先生は、

「多種数の変形不変性を学位論文にして、理学博士の学位をとったらどうでしょう」

とありがたいことを言ってくださいました。

私はそれに口答えしました。

「それはそうとして、一般の代数多様体の構造についての論文がじきにできそうなのでそっちでお願いします。」

そのころ、東大の数学科の4階では、入り口に近い方に助手の研究室があり、夕方６時近くになると決まって、小平先生は私の室に来て、

「そろそろ帰りませんか」と言う。

帰り道は、本郷の近江屋という洋菓子屋でケーキを賞味しコーヒーを飲むのが常であった。

小平先生はアメリカの雑誌（サイエンスやナショジオ）から仕入れた最新の科学知識や昔話などぼそぼそと話してくれます。

そこで、あるとき話を打ち切り、

「例の $\kappa(V)$ ですが、もとは小平先生の多種数の公式がもとですから、小平次元という名前にしたいのです。」

と切り出した。先生は、

「ほうほう、」

というばかりである。

「今日のところは、私に払わせてください」

と言って、２人分、６００円を支払った。

学位論文の原稿はタイプができていたが、canonical dimension を修正液でKodaira dimension に直して作り直した。

この論文の簡単な紹介論文を、日本学士院の紀要に載せた。
一般に小平次元や多種数も変形不変だろう。
アーベル多様体は小平次元と不正則数で特徴づけられるだろう。
小平次元には加法性が成り立つだろう、などいろいろ予想をたてた。
アメリカの Princeton にある研究所に行ってはどうか、というありがたい誘いがあり研究所のアチヤー教授に申し込み、そのとき研究計画を作文して送った。
本当は 1970/71 の予定だったが、長男が入院したことがあって１年延期することにした
アチヤー教授から受け入れについて好意的な返事をいただいたが同時に、

「モイシェゾンが同趣旨のことを話しているのを聴いたよ」

と伝えてくれた。

モイシェゾンはソ連の代数曲面のゼミの論文の有力な著者だったから彼も気がついても不思議では無い。

しかし、これは危機である。

先発権争いに巻き込まれるかもしれない。

と強い危惧感をもった。

3. 小平次元の概念

モイシェゾーン教授は大変な実力者なのは分かっていた.

本気でかかってきたらかなわないだろうと思った。

モイシェゾーン教授はソ連を逃れてイスラエルに行き、そしてアメリカの大学の教授になった。

日本にも来たので、ずいぶん親しくさせてもらった。

『文芸春秋』に載った、煉獄の中のソ連知識人に書いた内容の中核的情報はモイシェゾーン教授に教えてもらったことである。

小平次元による高次元の代数多様体の分類論は、日本からは、上野謙爾、藤田隆夫、川又雄二郎、M.Reid,Vieweg, J.Kollar, 森重文、宮岡洋一さんらの優れた数学者の強力で大きな発展を遂げた。

しかし小平次元という名前が世界的に認知されたのはMumford が「代数曲線のモジュライ空間の小平次元」という力作を書いたからである。

3.1. **wikipedia.** その後小平次元ははなはだ有名になり **wikipedia**(英語版) には詳しく書かれている。

In algebraic geometry, the Kodaira dimension $\kappa(X)$ measures the size of the canonical model of a projective variety X.

Kodaira dimension is named for Kunihiko Kodaira.

The name and the notation κ were introduced by Igor Shafarevich in the seminar Shafarevich 1965.

名前と記号 κ はシャファレヴィッチのセミナーでシャファレヴィッチにより導入された。

これは違う。完全な誤解である。

実際、シャファレヴィッチは１９９５年のアジア数学会議で、iitaka variety , Kodaira dimension を紹介している。

Proceedings of the Second Asian Mathematical Conference, 1995

ON SOME ARITHMETIC PROPERTIES OF ALGEBRAIC VARIETIES

IGOR R. SHAFAREVICH
Steklov Mathematical Institute
Russian Academy of Sciences
Moscow 117 966, Russia

1. Introduction

I will try to give a short survey of what is called Arithmetics of "Algebraic Varieties" — its main results and problems

This description can be easily generalised to algebraic varieties of arbitrary dimension n. Namely, we consider rational differential forms of type $f(du_1 \wedge \ldots \wedge du_n)^m$ for some fixed system of algebraically independent rational functions $u_1, \ldots, u_n$ on X, a rational function f and $m \geq 1$. All regular forms (i.e. having no poles on X) for fixed weight m form a finite dimensional vector space Ω_m and in the same way as before we obtain a rational mapping $\varphi_m : X \to \mathbb{P}(\Omega_m)$ into a projective space. It can be proved that for all m sufficiently large and divisible by a fixed integer, the (closure of the) varieties $\varphi_m(X)$ are birationally isomorphic. So (up to birational isomorphism) there exists a single variety $I(X)$ isomorphic to all these $\varphi_m(X)$, which is called the Iitaka variety of X, and a single mapping

$$\varphi : X \to I(X) \tag{3}$$

of X onto $I(X)$. Of course, if all $\Omega_m = 0$ neither the Iitaka variety nor the mapping φ are defined. The dimension κ of the variety $I(X)$ is called the Kodaira dimension of X. If all $\Omega_m = 0$ for $m \geq 1$ and $I(X)$ is not defined, we set $\kappa = -\infty$. So κ can take the $n+2$ values $\kappa = -\infty, 0, 1, \ldots, n$.

(In this short survey we completely ignore the difficulties which arise in connection with the fact that the variety $I(X)$ and the fibres of the mapping φ may have singular points even when X has none. These difficulties are overcome in cases $n = 2$ and $n = 3$ and there exists a program of resolving them in the general case, known as "Mori's program".)

net での別の解説では

Kodaira dimension

A numerical invariant of an algebraic variety, named after K. Kodaira

who first pointed out the importance of this invariant in the theory of the classification of algebraic varieties.

小平次元という名前は、この不変量の重要性を最初に指摘したのが小平邦彦だからである。

と書かれている。少し違う。

4. Princeton の研究所

小平先生のお勧めもあって実演した Princeton の研究所での生活は、母と生れて２歳半の長男もつれて行った。

せっかくアメリカに来たので新しい研究をしようと思った。

5. 対数的小平次元の概念

代数曲面ではその普遍被覆が $\mathbf{C}^2$ となるときそれはアーベル曲面か超楕円曲面になることが分類理論で証明できる。

3 次元の場合に類似のことをしたらどうなるか。

その小平次元は $3, 2, 1, 0, -\infty$ のどれかである。

３でないことはすぐわかる。

次に 2 の場合に調べると代数曲面の上のファイバー多様体になる。

すると曲面の上の分岐構造を調べることが問題になるので一般に調べることにした。

分岐の枚数が極端に大きく無限にある場合は、分岐する曲線を取り去った補集合を考えることに対応する。

そこで、補集合を正規交差化してそこに対数的微分の構造を考えた。

これによって対数的多重微分やその大域切断の次元として、対数的多種数、およびその結果として対数的小平次元の概念が誕生した。

類似の概念は埼玉大学の酒井文雄さんが、解析的な研究の過程で導入しさらに開多様体のチャン数の不等式などが発展した。

対数的多重微分を保存する双有理写像として、固有双有理写像や強有理写像の概念が自然に導かれ、双有理幾何の新しい展開ができた。

普遍被覆が $\mathbf{C}^n$ になる代数多様体の研究は(後に中山昇氏が完成させた)進展しなかったが対数的多重微分の理論は大成功であった。

代数曲面で得られた成果を３次元以上の場合に研究することは挑戦的な課題だが極端に難しくなる。

対数的小平次元はアフィン幾何への応用もあり、宮西正宜、藤田隆夫, 角田秀一郎、小島秀雄さんたちによって大きく発展した。

そこから、代数多様体とその上の既約因子の対の双有理不変な幾何が発展し平面曲線の新しい理論展開ができるようになった。

現在進行形