$\frac{1}{81}$ の小数展開とその一般化

関　恒平

１８７３年イギリスのGlaisherは

$$\frac{1}{81} = 0.\dot{0}1234567\dot{9}$$

を一般化しr進法で$\dfrac{1}{(r-1)^2}$を表すことに成功した。

$$\frac{1}{(r-1)^2} = .\dot{0}12\cdots\overline{r-3}\;\dot{\overline{r-1}}$$

この研究では分数の小数展開を調べる。

- $\frac{1}{81} = 0.\dot{0}1234567\dot{9}$
- $\frac{2}{81} = 0.\dot{0}2469135\dot{8}$
- $\frac{1}{121} = 0.\dot{0}08264462809917355371\dot{9}$

$\boxed{\text{方法}}$

$\dfrac{1}{(r-1)^2}$の循環節と余りの一般的な形を証明する

実際にr進数での割り算を計算して出力結果と比べてみる。

$\boxed{\dfrac{1}{(r-1)^2}\text{の場合}}$

$\dfrac{1}{81}$をprologで出力した結果

```
 ?- jr(1/81,10).
[list1=[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9]]
[list2=[10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 1]]
[list3=[[1, 0], [1, 9], [2, 8], [3, 7], [4, 6],
 [5, 5], [6, 4], [7, 3], [1]]]

Yes
```

循環節は012345679
list2は割り算の余り
list3は、各成分がリストで、各々はr進数表示となっている。すなわち$r=4$で、$(2,1)$なら$2\times 4+1=9$を表している。

r進数でのリストを割り算の式で表して調べる。（余りをr進法としてリスト表示している）

（余りをr進法としてリスト表示している）

$[0]\ 1\times r = 0\times (r-1)^2 + r$ $\qquad [1, 0]$

$[1]\ r\times r = 1\times (r-1)^2 + 2r-1$ $\qquad [1, r-1]$

$[2]\ (2r-1)\times r = 2\times (r-1)^2 + 3r-2$ $\qquad [2, r-2]$

$[3]\ (3r-2)\times r = 3\times (r-1)^2 + 4r-3$ $\qquad [3, r-3]$

$\vdots$

$[n]\ (nr-(n-1))\times r = n\times (r-1)^2 + (n+1)r-n \cdots \alpha$

$[n, r-n]$

$n = r - 3$のとき、

$$\begin{aligned}[(r-3)r - \{(r-3)-1\}] \times r &= (r-3)\times(r-1)^2 \\ &\quad + \{(r-3)+1\}r - (r-3) \\ &= (r-3)\times(r-1)^2 + r^2 - 3r + 3\end{aligned}$$

$(r^2 - 3r + 3)\times r = (r-1)(r-1)^2 + 1$

となり**余りが**1で、商は$r-1$

よって、余りのリストをr進数で書くと

$[[1,0],[1,r-1],[r-2,2],\cdots,[r-3,3],[1]]$

循環節は

$[0,1,2,\cdots,r-3,r-1]$

以上によりGlaisherの結果の証明ができた。

$\frac{2}{(r-1)^2}$の場合(rは偶数)

$\frac{2}{81}$をprologで出力した結果

```
?- jr(2/81,10).
[list1=[0, 2, 4, 6, 9, 1, 3, 5, 8]]

[list2=[20, 38, 56, 74, 11, 29, 47, 65, 2]]

[list3=[[2, 0], [3, 8], [5, 6], [7, 4], [1, 1], [2, 9],
 [4, 7], [6, 5], [2]]]

Yes
```

$\dfrac{2}{(r-1)^2}$の循環節と余り

rを偶数として、prologにより$\dfrac{2}{(r-1)^2}$の4進数から12進数までの出力結果を調べることができた。

今度は$\dfrac{1}{(r-1)^2}$のときと同様にr進数のときの割算を実際に式でしてみる。

$[0]\ 2 \times r = 0 \times (r-1)^2 + 2r \qquad [2, 0]$

$[1]\ 2r \times r = 2 \times (r-1)^2 + 4r - 2 \qquad [3, r-2]$

$[2]\ (4r-2) \times r = 4 \times (r-1)^2 + 6r - 4 \qquad [5, r-3]$

$[3]\ (6r-4) \times r = 6 \times (r-1)^2 + 8r - 6 \qquad [7, r-6]$

$\vdots$

$[n]\ (2nr - 2(n-1)) \times r = 2n \times (r-1)^2 + \{(2n+2)r - 2n\}$

$[2n+1, r-2n]$

　ここまでの計算結果で$0246\cdots 2n$のように、循環節の前半の偶数部分はわかった。
循環節の偶数部分の範囲を調べよう。

割る数＞余り なので、
$(r-1)^2 > \{(2n+2)r-2n)\}$
$n < \frac{(r-1)^2-2r}{2(r-1)}$
$n < \frac{1}{2}(r-1) - \frac{r-1+1}{r-1}$
$\quad = \frac{1}{2}(r-3) - \frac{1}{r-1}$
$\quad = \frac{1}{2}(r-2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{r-1}$

これを満たす最大のnをn_1とすると$n_1 = \frac{1}{2}(r-4)$

h n oi

$$[n_1]\ 2\ \frac{1}{2}(r-4)r-2\ \ \frac{1}{2}(r-4)-1\ \ \ r$$

$$= 2\times\frac{1}{2}(r-4)\times(r-1)^2+(r-3)r+4(r-2)r-(r-4)$$

この式の余りの部分を知りたいので、右辺を変形する。

右辺 $=(r-4)(r-1)^2+(r-2)r-(r-4)$

$=(r-4)(r-1)^2+\underline{r^2-3r+4}$

この r^2-3r+4 に r をかけて n_1 の次がどうなるのかを調べる。

$$(r^2 - 3r + 4) \times r = r \times (r-1)^2 + r + 1$$

$$(r + 1) \times r = 1 \times (r-1)^2 + 3r - 1$$

$$(3r - 1) \times r = 3 \times (r-1)^2 + 5r - 3$$

$$(5r - 1) \times r = 5 \times (r-1)^2 + 7r - 5$$

$$(7r - 5) \times r = 7 \times (r-1)^2 + 9r - 7$$

$\vdots$

$$\{(2n-1) \times r - (2n-3)\} r$$

$$= (2n-1)(R-1)^2 + (2n+1)r - (2n-1) \quad (0 < n < \tfrac{r-4}{2})$$

nの範囲を調べる。

$(r-1)^2 > (2n+1)r-(2n-1)$なので

$(r-1)^2 > 2n(r-1)+r+1$

$r-1 > 2n+\frac{r+1}{r-1}$

$r-2 > 2n+\frac{2}{r-1}$

$\frac{r-4}{2} \geq n$

よってnの最大数は$\frac{r-4}{2}$（rは偶数なので$\frac{r-4}{2}$は整数)

$s=\frac{r-4}{2}$とすると$n \leq s$である。

$s=\frac{r-4}{2}$までがnの範囲なので、これを余りの式$(2s+1)r-(2s-1)$に代入して$(r-1)^2$で割る。

$\{(2s+1)r-(2s-1)\} \times r = (r-2)(r-1)^2+2$

よって余りが2となり循環したことがわかる。

余りのリストをr進数で書くと

[[2, 0],[3, r-2],[5, r-4],$\cdots$ [2s+1, r-2s], [1, 1],
[2, r-1],[4, r-3],$\cdots$[2s,r-(2s-1)], [2]]

ただし、$s = \frac{1}{2}(r-4)$

循環節は

[0, 2, 4,$\cdots$, 2s, r-4, r-1, 1, 3, $\cdots$, 2s-1]

$\frac{1}{(r+1)^2}$の循環節と余りを調べる。

$\frac{1}{121}$をprologで出力した結果を示す

```
?- jr(1/121,10).
[list1=[0, 0, 8, 2, 6, 4, 4, 6, 2, 8, 0,
 9, 9, 1, 7, 3, 5, 5, 3, 7, 1, 9]]

[list2=[10, 100, 32, 78, 54, 56, 76, 34, 98, 12,
 120, 111, 21, 89, 43, 67, 65, 45, 87, 23, 109, 1]]

[list3=[[1, 0], [1, 0, 0], [3, 2], [7, 8], [5, 4],
 [5, 6], [7, 6], [3, 4], [9, 8], [1, 2],[1, 2, 0],
  [1, 1, 1], [2, 1], [8, 9], [4, 3], [6, 7], [6, 5],
  [4, 5], [8, 7], [2, 3], [1, 0, 9], [1]]]

Yes
```

```
 ?- jr(1/100,9).
[list1=[0, 0, 7, 2, 5, 4, 3, 6, 1, 8]]

[list2=[9, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 1]]

[list3=[[1, 0], [1, 0, 0], [3, 2], [6, 7], [5, 4],
 [4, 5], [7, 6], [2, 3], [1, 0, 8], [1]]]

Yes
```

r進数のときの割算を実際に式でしてみる。

[0] $1 \times r = 0 \times (r+1)^2 + r$

[1] $r \times r = 0 \times (r+1)^2 + r^2$

[2] $r^2 \times r = (r-2) \times (r+1)^2 + (3r+2)$

[3] $(3r+2) \times r = 2 \times (r+1)^2 + r^2 - 2r - 2$

[4] $(r^2 - 2r - 2) \times r = (r-4) \times (r+1)^2 + 5r + 4$

[5] $(5r+4) \times r = 4 \times (r+1)^2 + r^2 - 4r - 4$

[6] $(r^2 - 4r - 4) \times r = (r-6) \times (r+1)^2 + (7r+6)$

[7] $(7r+6) \times r = 6 \times (r+1)^2 + r^2 - 6r - 6$

⋮

$$[2n-1] \quad \{(2n-1)r + (2n-2)\} \times r$$
$$= (2n-2)(r+1)^2 + r^2 - 2(n-1)r - 2(n-1)$$
$$[r-2(n-1), r-2(n-1)]$$

$$[2n] \quad ^{\copyright} r^2 - 2(n-1)r - 2(n-1)^{\text{a}} \times r$$
$$= (r-2n)(r+1)^2 + \{(2n+1)r + 2n\}$$
$$[2n+1, 2n]$$

$\boxed{\text{証明}}$

nの範囲を調べる。

余り>0なので

$r^2-2(n-1)r-2(n-1)>0$

計算すると、

$n<\frac{r}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2(r+1)}$

$n<\frac{r}{2}$(rは偶数)

$n<\frac{r+1}{2}$(rは奇数)

これを満たす最大のnをn_1およびn_2とおく。（n_1はrが偶数のとき。n_2はrが奇数とき）

(1)rが偶数のとき

$n_1 = \frac{r}{2}$

$n = n_1$を$(2n+1)r + 2n$に代入すると、

$(2n_1 + 1)r + 2n_1 = r^2 + 2r$

$r \times (r^2 + 2r) = (r-1)(r+1)^2 + r^2 + r + 1$

$(r^2 + 2r) \times r = (r-1)(r+1)^2 + r^2 + r + 1$

⋮

© $\{2nr + (2n-1)\}r \underset{\text{a}}{=} (2n-1)(r+1)^2 + r^2 - (2n-1)(r+1)$

$r^2 - (2n-1)(r+1)$ $r = (r-2n-1)(r+1)^2 + (2n+2)r +$

$(2n+1)\cdots\beta$

$r-2n-1 \geq 0$なので

$\frac{r-1}{2} \geq n$

rが偶数なら$\frac{r-2}{2}$がnの最大値

この最大値をsとおく

この$s=\frac{r-2}{2}$を余りの式に代入すると

βの余り$=r^2+r-1$

$(r^2+r-1)\times r=(r-1)(r+1)^2+1$

よって余りが1となり循環したことがわかる。

(2)rが奇数のとき

$n_2 = \frac{r+1}{2}$

n_2を$r^2 - 2(n-1)r - 2(n-1)$に代入すると、

$r^2 - 2\frac{r-1}{2}r - 2\frac{r-1}{2} = r^2 - r^2 + r - r + 1 = 1$

よって余りが1となり循環したことがわかる。

$\boxed{\text{結論}}$

(1) $\dfrac{1}{(r-1)^2}$ の循環節と余りのリストをr進法で表示して一般的に表すと、

循環節は $[0, 1, 2, \cdots, r-3, r-1]$

余りのリストは

$[[1, 0], [1, r-1], [r-2, 2], \cdots [r-3, 3], [1]]$

となる。

(2) rが偶数のとき、$\dfrac{2}{(r-1)^2}$の循環節と余りの列をr進法で表示して一般的に表すと、

循環節は $[0, 2, 4, \cdots, 2n, r, 1, 3, 5 \cdots, 2n-1]$
（ただし$n = \frac{r-1}{2}$)
余りのリストは
$[[2, 0], [3, r-2], \cdots, [2n+1, r-2n], [r-3, 4], [1, 1,],$
$[2, r-1], \cdots, [2n, r-(2n-1)][2]]$

(3) $\dfrac{1}{(r+1)^2}$の循環節と余りのリストをr進法で表示して一般的に表すと、

rが偶数のとき

循環節は$[0, 0, r-2, 2, \cdots, r-2, 0,$

$$r-1, r-1, 1, r-3, \cdots, 1, r-1]$$

となる。

余りのリストは

$[[1, 0], [1, 0, 0], [3, 2], \cdots, [1, 2], [r+1, r],$

$[1, 1, 1], [2, 1], [r-2, r-1], \ldots, [2, 3], [1, 0, r-1], [1]]$

$\dfrac{1}{(r+1)^2}$の循環節と余りのリストをr進法で表示して一般的に表すと、

rが奇数のとき

循環節は$[0, 0, r-2, 2, \cdots, 1, r-1]$

余りのリストは

$[[1, 0], [1, 0, 0], [3, 2], \cdots, [1, 0, r-1], [1]]$

となる。

$\dfrac{1}{(r+1)^2}$ の r が偶数のとき

Table 1. 循環節

前半部	0	0	$r-2$	$\cdots$	$r-2$	0
後半部	$r-1$	$r-1$	1	$\cdots$	1	$r-1$
和	$r-1$	$r-1$	$r-1$	$\cdots$	$r-1$	$r-1$

Table 2. 余りのリスト

前半部	$[1,0]$	$[1,0,0]$	$[3,2]$	$\cdots$	$[1,2]$	$[r+1,r]$
後半部	$[1,1,1]$	$[2,1]$	$[r-2,r-1]$	$\cdots$	$[1,0,r-1]$	$[1]$
和	$[1,2,1]$	$[1,2,1]$	$[1,2,1]$	$\cdots$	$[1,2,1]$	$[1,2,1]$