スライドシャフリングの研究

学習院大学 理学部 数学科
相京 佑美

平成 20 年 2 月 2 日

目 次

1　目的

トランプなどのカードにおいて，偶数枚でも奇数枚でも対応できるスライドシャフリングを以下のように考え，実行したときの結果を考察する．

2　方法

2.1　方法の説明

N 枚のカードにおいて，２番目から N －１番目までのカードを最初に置き，次に最初のカードと最後のカードを並べ，それから先頭のカードを最後に持っていく．

４枚の場合は次の通りである．

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4} \rightarrow \boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{4}$

$\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{4} \rightarrow \boxed{3}\boxed{1}\boxed{4}\boxed{2}$

この操作を繰り返すといつかは元に戻る．元に戻るまでの回数を**周期**といい，Ｋとおく．

例 N ＝ 6 のとき

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$

$\downarrow$

$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{1}\boxed{6}\boxed{2}$

$\downarrow$

$\boxed{5}\boxed{1}\boxed{6}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{4}$

$\downarrow$

$\boxed{6}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{1}$

$\downarrow$

$\boxed{2}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{1}\boxed{3}$

$\downarrow$

$\boxed{4}\boxed{6}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{5}$

$\downarrow$

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$

このとき K ＝ 6 である．

2.2　プログラミング

```
/* リストを定義する. genlist */
genlist(A,Z,[]):- A>Z,!.
genlist(A,Z,[A|List]):- A1 is A+1,
                        genlist(A1,Z,List).

例　?-  genlist(5,12,L).
        L = [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]
     Yes


/* ２つのリストをくっつける. append0 */
append0(Z = [] + Z).
append0([A|Z] = [A|X] + Y):- append0(Z = X + Y).

例　?- append0(L=[1,2]+[3,4]).
        L = [1, 2, 3, 4]
     Yes


/* 左を基準にリストを２つに分ける. left */
left(A=[]+A,0):- !.
left(A=B+C,N):- N>0, N1 is N-1,!,
                left(A=B1+[X|C],N1),
                append0(B=B1+[X]),
                !.

例　?- left([a,b,c,d,e]=A+B,3).
        A = [a, b, c]
        B = [d, e]
     Yes


/* リストを３つに分ける. mid */
mid(L=A+C+B,N,M):- left(L=A+D,N),
                   left(D=C+B,M).

例 ?- mid([a,b,c,d,e,f]=A+C+B,2,2).
       A = [a, b]
       C = [c, d]
       B = [e, f]
    Yes
```

```
/* 最初と最後の数をくっつけ，後ろにまわす．gshf2 */
gshf2(N,L):- length(N,NN),
             P is NN-2,
             mid(N=A+B+C,1,P),
             append0(M=A+C),
             append0(L=B+M),
             !.
```

例　?- gshf2([1,2,3,4,5,6,7,8],L).
      L = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 1,8]
    Yes

```
/* gshf2 を実行して得られたリストにおいて，最初の数を最後にまわす．yshf2 */
yshf2(N,P):- length(N,NN),
             genlist(1,NN,L),!
             gshf2(N,M),
             left(M=A+B,1),
             append0(P=B+A),!.
```

例　?- yshf2([1,2,3,4,5,6,7],L).
      L = [3, 4, 5, 6, 1, 7, 2]
    Yes

```
/* yshf2 を元に戻るまで繰り返す．yshf4*/
yshf4(L,N,A,W,K):- yshf2(L,M),
                   N1 is N-1,W1 is W+1,
                   N0 is 3001-N,
                   write(M),nl,
                   (M==A -> write(W),K=W ;yshf4(M,N1,A,W1,K)).
```

例　?- yshf4([1,2,3,4,5,6,7],8,[1,2,3,4,5,6,7],8,L).
```
      [3, 4, 5, 6, 1, 7, 2]
      [5, 6, 1, 7, 3, 2, 4]
      [1, 7, 3, 2, 5, 4, 6]
      [3, 2, 5, 4, 1, 6, 7]
      [5, 4, 1, 6, 3, 7, 2]
      [1, 6, 3, 7, 5, 2, 4]
      [3, 7, 5, 2, 1, 4, 6]
      [5, 2, 1, 4, 3, 6, 7]
      [1, 4, 3, 6, 5, 7, 2]
      [3, 6, 5, 7, 1, 2, 4]
```

```
    [5, 7, 1, 2, 3, 4, 6]
    [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
    19

    L = 19
 Yes
```

```
/* 元に戻るまで繰り返す. bigyshf */
bigyshf(N,K):- genlist(1,N,L),
               yshf4(L,300,L,1,K),!.
```

例　?- bigyshf(7,L).

```
    [3, 4, 5, 6, 1, 7, 2]
    [5, 6, 1, 7, 3, 2, 4]
    [1, 7, 3, 2, 5, 4, 6]
    [3, 2, 5, 4, 1, 6, 7]
    [5, 4, 1, 6, 3, 7, 2]
    [1, 6, 3, 7, 5, 2, 4]
    [3, 7, 5, 2, 1, 4, 6]
    [5, 2, 1, 4, 3, 6, 7]
    [1, 4, 3, 6, 5, 7, 2]
    [3, 6, 5, 7, 1, 2, 4]
    [5, 7, 1, 2, 3, 4, 6]
    [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
    12

    L = 12
 Yes
```

3　結果

N=4 のとき

```
?- bigyshf(4,L).
   [3, 1, 4, 2]
   [4, 3, 2, 1]
   [2, 4, 1, 3]
   [1, 2, 3, 4]
   4

   L = 4
Yes
```

N=5 のとき

```
?- bigyshf(5,L).
   [3, 4, 1, 5, 2]
   [1, 5, 3, 2, 4]
   [3, 2, 1, 4, 5]
   [1, 4, 3, 5, 2]
   [3, 5, 1, 2, 4]
   [1, 2, 3, 4, 5]
   6

   L = 6
Yes
```

N=6 のとき

```
?- bigyshf(6,L).
   [3, 4, 5, 1, 6, 2]
   [5, 1, 6, 3, 2, 4]
   [6, 3, 2, 5, 4, 1]
   [2, 5, 4, 6, 1, 3]
   [4, 6, 1, 2, 3, 5]
   [1, 2, 3, 4, 5, 6]
   6

   L = 6

Yes
```

以下同様に続ける.

N=4〜30まで実行し，表にまとめた.

シャフリングの操作は，トランプの置換に対応するので，置換を共通部分のないサイクルに分解することができる．このとき，各々のサイクルの要素の個数の最小公倍数が周期になる.

表 1: N=4〜30 までの結果

N	サイクル	サイクルの型	回数 K
4	(1 3 4 2)	[4]	4
5	(1 3)(2 4 5)	[2,3]	6
6	(1 3 5 6 2 4)	[6]	6
7	(1 3 5)(2 4 6 7)	[3,4]	12
8	(1 3 5 7 8 2 4 6)	[8]	8
9	(1 3 5 7)(2 4 6 8 9)	[4,5]	20
10	(1 3 5 7 9 10 2 4 6 8)	[10]	10
11	(1 3 5 7 9)(2 4 6 8 10 11)	[5,6]	30
12	(1 3 5 7 9 11 12 2 4 6 8 10 1)	[12]	12
13	(1 3 5 7 9 11)(2 4 6 8 10 12 13)	[6,7]	42
14	(1 3 5 7 9 11 13 14 2 4 6 8 10 12)	[14]	14
15	(1 3 5 7 9 11 13)(2 4 6 8 10 12 14 15)	[7,8]	56
16	(1 3 5 7 9 11 13 15 16 2 4 6 8 10 12 14)	[16]	16
17	(1 3 5 7 9 11 13 15)(2 4 6 8 10 12 14 16 17)	[8,9]	72
18	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 18 2 4 6 8 10 12 14 16)	[18]	18
19	(1 3 5 7 9 11 13 15 17)(2 4 6 8 10 12 14 16 18 19)	[9,10]	90
20	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 20 2 4 6 8 10 12 14 16 18)	[20]	20
21	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19)(2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 21)	[10,11]	110
22	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 22 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20)	[22]	22
23	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21)(2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 23)	[11,12]	132
24	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 24 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22)	[24]	24
25	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23)(2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 25)	[12,13]	156
26	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 26 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24)	[26]	26
27	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25)(2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 27)	[13,14]	182
28	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 28 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26)	[28]	28
29	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27)(2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 29)	[14,15]	210
30	(1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 30 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28)	[30]	30

4　考察

シャフリングを置換として考えると，共通部分のないサイクルの積に分解される．この場合, 次の性質があることが上の結果から予測される．

4.1　偶数の場合

①サイクルは１つ．

②サイクル内の並び方は，N までの奇数 (小さい順に)，N，N − 1 までの偶数 (小さい順に) の順に並ぶ.
例 N =12 のとき (1 3 5 7 9 11 12 2 4 6 8 10)

③ N 枚のシャフリングの周期は，与えられた数 N に一致する．
例 N = 4 のとき

```
?- bigyshf(4,L).
   [3, 1, 4, 2]
   [4, 3, 2, 1]
   [2, 4, 1, 3]
   [1, 2, 3, 4]

L = 4
```

このことは，一般に正しいことが次のように証明できる．

証明

一度シャッフルしてみると，$1, 2, 3, \cdots, 2k-1, 2k$ が $2, 3, \cdots, 2k-1, 1, 2k$ となり，$3, \cdots, 2k-1, 1, 2k, 2$ となる．
これを置換で表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2k-5 & 2k-4 & 2k-3 & 2k-2 & 2k-1 & 2k \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2k-3 & 2k-2 & 2k-1 & 1 & 2k & 2 \end{pmatrix}$$

となる．
さらに，サイクルで表すと $(1\ 3\ 5\ \cdots\ 2k-3\ 2k\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ 2k-2)$ となる．(証明終）

4.2 奇数の場合

①サイクルは２つ.

②サイクル内の並び方は，１つ目のサイクルは N を除いた奇数が小さい順にすべて並び，2 つ目のサイクルは偶数が小さい順に N − 1 まですべて並び，最後に N がつく.

例 N = 13 のとき (1 3 5 7 9 11)(2 4 6 8 10 12 13)

このことは，一般に正しいことが次のように証明できる.

証明

一度シャッフルしてみると，$1, 2, 3, \cdots, 2k-1, 2k, 2k+1$ が $2, 3, \cdots, 2k-1, 2k, 1, 2k+1$ となり，$3, \cdots, 2k-1, 2k, 1, 2k+1, 2$ となる.

これを置換で表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2k-4 & 2k-3 & 2k-2 & 2k-1 & 2k & 2k+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2k-2 & 2k-1 & 2k & 1 & 2k+1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる.

さらに，サイクルで表すと

$(1\ 3\ 5\ \cdots\ 2k-1\ )(2\ 4\ 6\ \cdots\ 2k-2\ 2k\ 2k+1)$ となる.（証明終）

③ N 枚のシャフリングの周期は，$N = 2K + 1$ のとき $K(K + 1)$ となる.

例 N = 5 のとき

```
?- bigyshf(5,L).
   [3, 4, 1, 5, 2]
   [1, 5, 3, 2, 4]
   [3, 2, 1, 4, 5]
   [1, 4, 3, 5, 2]
   [3, 5, 1, 2, 4]
   [1, 2, 3, 4, 5]
   6

L = 6
```

N=5 のときのサイクル (1 3)(2 4 5)　2 × 3 = 6　←最小公倍数となる.

④ N 枚のシャフリングの周期は，N $-$ 2 枚と N $-$ 1 枚それぞれのシャフリングの周期の和と一致する．

証明

N $=$ 2K $-$ 1 のときのシャフリングの周期は (K $-$ 1)K，N $=$ 2K のときは 2K，N $=$ 2K $+$ 1 のときは K(K $+$ 1) と表せる．

このとき $(2K-1)+2K=K^2+K$ となり,N $=$ 2K $+$ 1 のときのシャフリングの周期と一致する．(証明終）

5　終わりに

5.1　感想

プログラミングが苦手でとても苦労しましたが，飯高先生はじめゼミのみんなに助けられ，論文を完成することが出来ました．研究結果は，奇数・偶数ごとに違いがきれいに出てびっくりしました．奇数の⑤の結果を見つけたときは感激でした．

大学４年の１年間は，アルバイトばかりしていたので，週２回のゼミは自分が学生であることを思い出し実感する場であり，また，同年代の友達と交流が持てる貴重な場でした．研究そっちのけで世間話や卒業旅行の計画に夢中になったあまりに，飯高先生に注意を受け，ご迷惑を掛けてしまったこともありましたが，研究はもちろん，そのようにゼミのみんなと１年間楽しく過ごすことができました．どうもありがとうございました．

5.2　参考文献

NUMBER THEORY　　George E.Andrews 著
日本語 LATEX2 ε ブック　　中野 賢 著　　アスキー出版局