スライドシャフリングの研究

学習院大学 理学部 数学科
相京 佑美

◇◆方法◆◇

N 枚のカードにおいて，２番目からN－1番目までのカードを最初に置き，次に最初のカードと最後のカードを並べ，それから先頭のカードを最後に持っていく．

４枚の場合は次の通りである．

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4} \rightarrow \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{4}$

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{4} \rightarrow \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$

この操作を繰り返すといつかは元に戻る．

元に戻るまでの回数を**周期**といい，K とおく．

例 $N = 6$のとき

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6} \rightarrow \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{2}$

$\rightarrow \boxed{5}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{4} \rightarrow \boxed{6}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{1}$

$\rightarrow \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{6}\ \boxed{1}\ \boxed{3} \rightarrow \boxed{4}\ \boxed{6}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}$

$\rightarrow \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}$

このとき$K = 6$である.

◇◆考察◆◇

　シャフリングを置換の積として考えると，共通部分のないサイクルの積に分解される．この場合,次の性質があることが結果から予測される.

偶数の場合

①サイクルは１つ.

②サイクル内の並び方は，Ｎまでの奇数(小さい順に)，Ｎ,Ｎ－１までの偶数(小さい順に)の順に並ぶ.

　例 N ＝ 12のとき (1 3 5 7 9 11 12 2 4 6 8 10)

③N 枚のシャフリングの周期は，与えられた数 N に一致する．

例 N ＝ 4のとき

```
?- bigyshf(4,L).
    [3, 1, 4, 2]
    [4, 3, 2, 1]
    [2, 4, 1, 3]
    [1, 2, 3, 4]
L = 4
```

このことは，一般に正しいことが次のように証明できる．

《証明》

一度シャッフルしてみると，$1, 2, 3, \cdots, 2k-1, 2k$が$2, 3, \cdots, 2k-1, 1, 2k$となり，$3, \cdots, 2k-1, 1, 2k, 2$となる．

これを置換で表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2k-5 & 2k-4 & 2k-3 & 2k-2 & 2k-1 & 2k \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2k-3 & 2k-2 & 2k-1 & 1 & 2k & 2 \end{pmatrix}$$

となる．

さらに，サイクルで表すと$(1\ 3\ 5\ \cdots\ 2k-3\ 2k\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ 2k-2)$

となる．(証明終)

奇数の場合

①サイクルは２つ.

②サイクル内の並び方は，１つ目のサイクルはＮを除いた奇数が小さい順にすべて並び，2つ目のサイクルは偶数が小さい順にＮ－１まですべて並び，最後にＮがつく.

例 N ＝ 13のとき (1 3 5 7 9 11)(2 4 6 8 10 12 13)

このことは，一般に正しいことが次のように証明できる.

《証明》

一度シャッフルしてみると，$1, 2, 3, \cdots, 2k-1, 2k, 2k+1$が$2, 3, \cdots, 2k-1, 2k, 1, 2k+1$となり，$3, \cdots, 2k-1, 2k, 1, 2k+1, 2$となる．

これを置換で表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2k-4 & 2k-3 & 2k-2 & 2k-1 & 2k & 2k+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2k-2 & 2k-1 & 2k & 1 & 2k+1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．

さらに，サイクルで表すと

$(1\ 3\ 5\ \cdots\ 2K-1)(2\ 4\ 6\ \cdots\ 2k-2\ 2k\ 2k+1)$となる．（証明終）

③N枚のシャフリングの周期は$N=2K+1$のとき$K(K+1)$となる.

例 $N=5$のとき

```
?- bigyshf(5,L).
    [3, 4, 1, 5, 2]
    [1, 5, 3, 2, 4]
    [3, 2, 1, 4, 5]
    [1, 4, 3, 5, 2]
    [3, 5, 1, 2, 4]
    [1, 2, 3, 4, 5]
    6
L = 6
```

N=5のときのサイクル(1 3)(2 4 5)　2×3＝6

④N枚のシャフリングの周期は，$N-2$枚と$N-1$枚のそれぞれのシャフリングの周期の和と一致する．

このことは，次のように証明できる．

《証明》

$N=2K-1$のときのシャフリングの周期は$(K-1)K$，$N=2K$のときは$2K$，$N=2K+1$のときは$K(K+1)$と表せる．

このとき$(2K-1)+2K=K^2+K$となり,$N=2K+1$のときのシャフリングの周期と一致する．(証明終)