インド式計算法の公式の一例を一般化

学習院大学理学部数学科４年
橋本　光

インド式計算法の公式の一例を一般化す

$$(3333333333)^2 = 1111111110888888888$$

3を有限個並べて2乗すると上の様に綺麗に

$$(\underbrace{333\cdots333}_{l})^2 = \underbrace{111\cdots111}_{l-1}0\underbrace{888\cdots888}_{l-1}$$

同じ様な綺麗で簡単になる式をG進法で沢山探し
見つけた。

例）

$$(2525252525)^2$$

$$= 7070707067070707071$$

（8進数）

$$(3\ 11\ 3\ 11\ 3\ 11\ 3\ 11\ 3\ 11)^2$$

$$= 14\ 0\ 14\ 0\ 14\ 0\ 14\ 0\ 13\ 14\ 0\ 14\ 0\ 14\ 0\ 14\ 0$$

$$(0.\underbrace{333\cdots333}_{l})^2 = 0.\underbrace{111\cdots111}_{l-1}0\underbrace{888\cdots88}_{l-1}$$

となるので、$l \to \infty$とし、循環小数を考えた。

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0.111\cdots = 0.\dot{1}$$

ここで、$\frac{1}{3}$と$\left(\frac{1}{3}\right)^2$の循環節の長さが等しくなって

$\frac{1}{n}$と$\left(\frac{1}{n}\right)^2$の循環節の長さに着目した。

手順１）

G進数での$\frac{1}{n}$と ${}^{3}\,\frac{1}{n}\,{}^{\prime\, 2}$の循環節の長さが同じ時の

(G =< 20, n =< 500, 但しG, nは

例)

```
?- jun(10).
```

と入力すると、条件を満たすnが、

3

487

と出力される。

Table 1

G進法	3	7	8	9	10	11	14	15	17	18
n	11	4	3	11	3	71	29	4	3	5
	55	5		22	487	142	353		4	7
	110	10		55		355			6	35
	220	20		110		497			12	37
				220						18
										25
										33

(G =< 20

注）G = 2, 4, 5, 6, 12, 13, 16, 19 については、n =<
では存在しない。

手順２）条件を満たすｎを使い、循環節を出力

例）

```
?- j4(1/3,10,N).
```

と入力すると、循環節とその長さＮが、

```
3
N=1
```

と出力される。

手順３）循環節を有限個並べ、それを2乗し出力

```
?- same_list(A=[3]^5),gdig(B=A^2,10).
```

と入力すると、

```
A = [3, 3, 3, 3, 3]

B = [1, 1, 1, 1, 0, 8, 8, 8, 8, 9]
```

と出力される。他のものでも出力結果をだし、
つけることを行う。

法則性１

$$?-\text{same\_list}(A=[\underbrace{a,b,c}_{3}]\wedge m),\text{gdig}(B=A\wedge$$

と入力すると、出力結果は

$$A=[\underbrace{a,b,c,a,b,c,\cdots,a,b,c}_{3*m}]$$

$$B=[\underbrace{d,e,f,d,e,f,\cdots,d,e,g}_{3*m},\underbrace{h,i,j,h,i,j,\cdots,}_{3*m}$$

$$(g=f-1$$

例）7進数で $\frac{1}{5} = 0.\dot{1}25\dot{4}$ の循環節について、

$?- \mathrm{same\_list}(A = [1, 2, 5, 4] \wedge 3), \mathrm{gdig}(B =$

と入力すると、

$A = [\underbrace{1, 2, 5, 4, 1, 2, 5, 4, 1, 2, 5, 4}_{4*3}]$

$B = [\underbrace{1, 6, 5, 0, 1, 6, 5, 0, 1, 6, 4, 6}_{4*3}, \underbrace{5, 0, 1, 6, 5, 0, 1, 6}_{4*3-1}$

と出力される。

注）Bは7進数での $\frac{1}{25} = 0.016501650\cdots$ の循環

法則性2

$?-\ \mathrm{same\_list}(A = [a, b, c] \wedge m), \mathrm{gdig}(B = A \wedge 2,$

$$A = [a, b, c, a, b, c, \cdots, a, b, c]$$

$$B = [\overbrace{d, e, f, d, e, f, \cdots, d, e,}^{X} \overbrace{g, h, i, j, h, i, j, \cdots, h,}^{Y}$$

$$\frac{X + Y}{\underbrace{\qquad\qquad}_{A\text{の長さ}}}$$

ここで、$z = G - 1$である。

例） $\frac{1}{3} = (0.\underbrace{333\cdots333}_{1*10})^2 = 0.\overbrace{111\cdots1110}\,\overbrace{888\cdots}$

$$
\begin{array}{r}
111\cdots110 \\
+\ 888\cdots889 \\
\hline
\underbrace{999\cdots999}_{1*10}
\end{array}
$$

$\frac{1}{5} = (0.\underbrace{125412541254}_{4*3})^2 = 0.0\overbrace{165016501646}\,\overbrace{50\cdots}$

$$
\begin{array}{r}
165016501646 \\
+\ 501650165020 \\
\hline
\underbrace{666666666666}_{4*3}
\end{array}
$$

10進数で、n = 3の次に簡単な数n = 487につい

$$\frac{1}{487} = 0.\dot{0}020533880903490759753593429158110882 9$$

$$2669404517453798767967145790554414784394$$

$$6899383983572895277207392197125256673511$$

$$5297741273100616016427104722792607802874$$

$$0308008213552361396303901437371663244353$$

$$61806981519507186858316221765913757\dot{7}$$

この循環節を3つ並べて2乗すると

$$(002053\cdots002053\cdots002053)^2 =$$

421640264958742500073787046367779937512912
148906475972829501326058633295245162732060
790347811054564466688310866934548781670454
578359735041257499926212953632220062487087
851093524027170498673941366704754837267939
209652188945435533311689133065451218329545

前半部＋後半部＝$\underbrace{999999\cdots999999}_{1458}$

◎法則の証明

$A=\frac{1}{n}$、$A^2=(\frac{1}{n})^2$、$B=\frac{1}{G^{p*l}}*A$　(pはAの循

　とおき、一例として7進数で$\frac{1}{5}=0.\dot{1}25\dot{4}$につい

$$A=\frac{1}{5}=0.\dot{1}25\dot{4}$$

$$A^2=\frac{1}{25}=0.01\dot{6}5\dot{0}$$

$$B=\frac{1}{7^{4*l}}*A=0.\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\dot{1}25\dot{4}$$

$C=A-B$とする　　$(C=0.\underbrace{1254\cdots1254}_{4*l})$

$$C^2 = (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = (A^2 - AB) -$$

ここで

$$AB = \frac{1}{7^{4*l}} * A^2 = 0.0\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\dot{1}65\dot{0}$$

$$B^2 = \frac{1}{7^{8*l}} * A^2 = 0.0\underbrace{00\cdots00}_{8*l}\dot{1}65\dot{0}$$

$$A^2 - AB = 0.0\dot{1}65\dot{0} - 0.0\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\dot{1}65\dot{0} = 0.0\,\underbrace{1650}_{4}$$

$$AB - B^2 = 0.0\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\dot{1}65\dot{0} - 0.0\underbrace{00\cdots00}_{8*l}\dot{1}65\dot{0} = 0$$

より

$$C^2 = 0.0\underbrace{1650\cdots165}_{4*l-1} - 0.0\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\underbrace{1650\cdots165}_{4*l-1}$$

$$= 0.0\overbrace{\underbrace{16501650\cdots16501646}_{4*l}}^{X}\overbrace{\underbrace{50165016\cdots5016}_{4*l-1}}^{Y}$$

$$\begin{array}{rr} & 16501650\cdots16501646 \\ + & 50165016\cdots50165020 \\ \hline & \underbrace{66666666\cdots66666666}_{\text{Cの長さ}=4*l} \end{array}$$

$(Z =$

その他の場合でも同様にして証明できる。

よって法則1、2は成立する。□