インド式計算法の公式の一例を一般化

学習院大学理学部数学科４年
橋本　光

インド式計算法の公式の一例を一般化する

$$(3333333333)^2 = 11111111108888888889$$

（10進数）

3を有限個並べて2乗すると上の様に綺麗になる。

$$(\underbrace{333\cdots333}_{l})^2 = \underbrace{111\cdots111}_{l-1}0\underbrace{888\cdots888}_{l-1}9$$

同じ様な綺麗で簡単になる式をG進法で沢山探し、法則性を見つけた。

例）

$$(2525252525)^2$$

$$= 7070707067070707071$$

（8進数）

$$(3\ 11\ 3\ 11\ 3\ 11\ 3\ 11\ 3\ 11)^2$$

$$= 14\ 0\ 14\ 0\ 14\ 0\ 14\ 0\ 13\ 14\ 0\ 14\ 0\ 14\ 0\ 14\ 0\ 14\ 1$$

（15進数）

$$(0.\underbrace{333\cdots333}_{l})^2 = 0.\underbrace{111\cdots111}_{l-1}0\underbrace{888\cdots888}_{l-1}9$$

となるので、$l \to \infty$とし、循環小数を考えた。

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0.111\cdots = 0.\dot{1}$$

ここで、$\frac{1}{3}$と$\left(\frac{1}{3}\right)^2$の循環節の長さが等しくなっているので、

$\frac{1}{n}$と$\left(\frac{1}{n}\right)^2$の循環節の長さに着目した。

手順１）

G進数での$\frac{1}{n}$と$\left(\frac{1}{n}\right)^2$の循環節の長さが同じ時のみnを出力

(G =< 20, n =< 500, 但しG, nは互いに素)

例)

```
?- jun(10).
```

と入力すると、条件を満たすnが、

3

487

と出力される。

Table 1

G進法	3	7	8	9	10	11	14	15	17	18	20
n	11	4	3	11	3	71	29	4	3	5	281
	55	5		22	487	142	353		4	7	
	110	10		55		355			6	35	
	220	20		110		497			12	37	
				220						185	
										259	
										331	

(G =< 20, n =< 500)

注）G = 2, 4, 5, 6, 12, 13, 16, 19 については、n =< 500 の範囲では存在しない。

手順２）条件を満たすnを使い、循環節を出力

例）

```
?- j4(1/3,10,N).
```

と入力すると、循環節とその長さNが、

```
3

N=1
```

と出力される。

手順３）循環節を有限個並べ、それを2乗し出力

```
?- same_list(A=[3]^5),gdig(B=A^2,10).
```

と入力すると、

```
A = [3, 3, 3, 3, 3]

B = [1, 1, 1, 1, 0, 8, 8, 8, 8, 9]
```

と出力される。他のものでも出力結果をだし、法則性を見つけることを行う。

法則性１

$$?-\mathrm{same\_list}(A=[\underbrace{a,b,c}_{3}]\wedge m),\mathrm{gdig}(B=A\wedge 2,G).$$

と入力すると、出力結果は

$$A=[\underbrace{a,b,c,a,b,c,\cdots,a,b,c}_{3*m}]$$

$$B=[\underbrace{d,e,f,d,e,f,\cdots,d,e,g}_{3*m},\underbrace{h,i,j,h,i,j,\cdots,h,i,k}_{3*m}]$$

$$(g=f-1,k=j+1)$$

例）7進数で $\frac{1}{5} = 0.\dot{1}25\dot{4}$ の循環節について、

$$?- \mathrm{same\_list}(A = [1, 2, 5, 4] \wedge 3), \mathrm{gdig}(B = A \wedge 2, 7).$$

と入力すると、

$$A = [\underbrace{1, 2, 5, 4, 1, 2, 5, 4, 1, 2, 5, 4}_{4*3}]$$

$$B = [\underbrace{1, 6, 5, 0, 1, 6, 5, 0, 1, 6, 4, 6}_{4*3}, \underbrace{5, 0, 1, 6, 5, 0, 1, 6, 5, 0, 2}_{4*3-1}]$$

と出力される。

注）B は7進数での $\frac{1}{25} = 0.016501650\cdots$ の循環節である。

法則性 2

$$?-\mathrm{same\_list}(A = [a, b, c] \wedge m), \mathrm{gdig}(B = A \wedge 2, G).$$

$$A = [a, b, c, a, b, c, \cdots, a, b, c]$$

$$B = [\overbrace{d, e, f, d, e, f, \cdots, d, e, g}^{z\ X}, \overbrace{h, i, j, h, i, j, \cdots, h, i, k}^{z\ Y}]$$

$$\begin{array}{lr} & X \\ + & Y \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A\text{の長さ}}} \end{array}$$

ここで、$z = G - 1$である。

例） $\frac{1}{3} = (0.\underbrace{333\cdots333}_{1*10})^2 = 0.\overbrace{111\cdots1110}^{X}\,\overbrace{888\cdots8889}^{Y}$

$(G = 10)$

$$
\begin{array}{rr}
 & 111\cdots110 \\
+ & 888\cdots889 \\
\hline
 & \underbrace{\color{red}{999\cdots999}}_{1*10}
\end{array}
$$

$\frac{1}{5} = (0.\underbrace{125412541254}_{4*3})^2 = 0.0\overbrace{165016501646}^{X}\,\overbrace{50165016502}^{Y}$

$(G = 7)$

$$
\begin{array}{rr}
 & 165016501646 \\
+ & 501650165020 \\
\hline
 & \underbrace{\color{red}{666666666666}}_{4*3}
\end{array}
$$

10進数で、n ＝ 3の次に簡単な数n ＝ 487について

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{487} = 0.&\dot{0}02053388090349075975359342915811088295687885010 \\
&266940451745379876796714579055441478439425051334 70 \\
&6899383983572895277207392197125256673511293634 4\cdots \\
&5297741273100616016427104722792607802874743326 4887 \\
&030800821355236139630390143737166324435318275154 00 \\
&618069815195071868583162217659137 57\dot{7}
\end{aligned}
$$

(l＝486)

この循環節を3つ並べて2乗すると

$$(002053\cdots002053\cdots002053)^2 =$$

42164026495874250007378704636777993751291273311436
14890647597282950132605863329524516273206026082666
790347811054564466688310866934548781670454 40171 $\cdots$
57835973504125749992621295363222006248708726688563
85109352402717049867394136670475483726793973917333
2096521889454355533311689133065451218329545 59828 $\cdots$

$(l = 2911)$

前半部＋後半部＝$\underbrace{999999\cdots999999}_{1458}$

◎法則の証明

$A = \frac{1}{n}$、$A^2 = (\frac{1}{n})^2$、$B = \frac{1}{G^{p*l}} * A$　（p は A の循環節の長さ）

　とおき、一例として7進数で $\frac{1}{5} = 0.\dot{1}25\dot{4}$ について証明

$$A = \frac{1}{5} = 0.\dot{1}25\dot{4}$$

$$A^2 = \frac{1}{25} = 0.0\dot{1}65\dot{0}$$

$$B = \frac{1}{7^{4*l}} * A = 0.\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\dot{1}25\dot{4}$$

$C = A - B$ とする　　$(C = 0.\underbrace{1254\cdots1254}_{4*l})$

$$C^2 = (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = (A^2 - AB) - (AB - B^2)$$

ここで

$$AB = \frac{1}{7^{4*l}} * A^2 = 0.0\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\dot{1}65\dot{0}$$

$$B^2 = \frac{1}{7^{8*l}} * A^2 = 0.0\underbrace{00\cdots00}_{8*l}\dot{1}65\dot{0}$$

$$A^2 - AB = 0.0\dot{1}65\dot{0} - 0.0\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\dot{1}65\dot{0} = 0.0\underbrace{1650\cdots165}_{4*l-1}$$

$$AB - B^2 = 0.0\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\dot{1}65\dot{0} - 0.0\underbrace{00\cdots00}_{8*l}\dot{1}65\dot{0} = 0.0\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\underbrace{1650\cdots165}_{4*l-1}$$

より

$$C^2 = 0.0\underbrace{1650\cdots165}_{4*l-1} - 0.0\underbrace{00\cdots00}_{4*l}\underbrace{1650\cdots165}_{4*l-1}$$

$$= 0.0\overbrace{\underbrace{16501650\cdots16501646}_{4*l}}^{X}\overbrace{\underbrace{50165016\cdots5016502}_{4*l-1}}^{Y}$$

$$\begin{array}{rr} & 16501650\cdots16501646 \\ + & 50165016\cdots50165020 \\ \hline & \underbrace{66666666\cdots66666666}_{C\text{の長さ}=4*l} \end{array}$$

$$(Z = 6 = G - 1)$$

その他の場合でも同様にして証明できる。

よって法則1、2は成立する。□