2 項係数の最大係数の 2 の指数について

猪野 和憲

平成 20 年 2 月 7 日

目 次

1 目的

1.1 研究内容

パスカルの三角形の値を上から取っていった数列を考え、各項が 2 で何回割れるのかという規則性について研究した。

まず初めにパスカルの三角形の中心の値の数列 $P(n) = 1, 2, 6, 20, 70, 252, \cdots$ を考える。

パスカル三角形中心の値の数列は 2 項係数 $\binom{2n}{k}$ の最大係数 $\binom{2n}{n}$ で作られる数列

$$P(n) = \frac{(2n)!}{n!^2} \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と一致しているので、$P(n)$ を素因数分解したときの 2 の指数 $E(n)$ を考えていく。

次に、中心の値をとった数列 $P(n)$ の左下の数列 $Q(n) = 1, 3, 10, 35, 126, \cdots$ を考えると、2 項係数 $\binom{2n+1}{k}$ の最大係数 $\binom{2n+1}{n+1}$ で作られる数列

$$Q(n) = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と一致しているので、$Q(n)$ を素因数分解したときの 2 の指数 $F(n)$ を考えていく。

1.2 パスカルの三角形

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} \ \frac{2n!}{n!^2}$$

$$\downarrow \ \downarrow$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

2　方法

2.1　プログラム

$P(n)$ と $Q(n)$ の各項を素因数分解し、2 の指数の数列 $E(n)$ と $F(n)$ を表示させるプログラム

① 自然数 $n!$ を素因数分解したときに、素数 P の指数を求める。

```
ino(N,P,0):-N<P,!.
ino(N,P,E):-N1 is N//P,
ino(N1,P,E1),E is N1 + E1.
```

②-A 自然数 n に対して、$\dfrac{(2n)!}{n!^2}$ を素因数分解したときの 2 の指数を表示させる。

```
bino(N,E):-N2 is 2*N,
ino(N2,2,E2),ino(N,2,E1),E is E2 - 2*E1.
```

②-B 自然数 n に対して、$\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}$ を素因数分解したときの 2 の指数を表示させる。

```
cino(N,E):-N2 is 2*N+1,
ino(N2,2,E2),ino(N,2,E1),E is E2 - (E1+1)-E1.
```

③-A 1 から N までに対して、$\dfrac{(2n)!}{n!^2}$ を素因数分解したときの 2 の指数を表示させる。

```
bfor(N):-for(1=<N,Z),
 bino(Z,E),write(E),nl,fail.
bfor(N).
```

③-B 1 から N までに対して、$\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}$ を素因数分解したときの 2 の指数を表示させる。

```
cfor(N):-for(1=<N,Z),
 cino(Z,E),write(E),nl,fail.
cfor(N).
```

3　結果

3.1　表

表 1: $0 \leq n < 50$ ときの n と $P(n) = \dfrac{(2n)!}{n!^2}$ の各項を素因数分解したときの 2 の指数の列 $E(n)$ の表

n	2 の指数 E(n)	n	2 の指数	n	2 の指数	n	2 の指数	n	2 の指数
0	0	10	2	20	2	30	4	40	2
1	1	11	3	21	3	31	5	41	3
2	1	12	2	22	3	32	1	42	3
3	2	13	3	23	4	33	2	43	4
4	1	14	3	24	2	34	2	44	3
5	2	15	4	25	3	35	3	45	4
6	2	16	1	26	3	36	2	46	4
7	3	17	2	27	4	37	3	47	5
8	1	18	2	28	3	38	3	48	2
9	2	19	3	29	4	39	4	49	3

表 2: $0 \leq n < 50$ ときの n と $Q(n) = \dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}$ の各項を素因数分解したときの 2 の指数の列 $F(n)$ の表

n	2 の指数 F(n)	n	2 の指数	n	2 の指数	n	2 の指数	n	2 の指数
0	0	10	2	20	2	30	4	40	2
1	0	11	1	21	2	31	0	41	2
2	1	12	2	22	3	32	1	42	3
3	0	13	2	23	1	33	1	43	2
4	1	14	3	24	2	34	2	44	3
5	1	15	0	25	2	35	1	45	3
6	2	16	1	26	3	36	2	46	4
7	0	17	1	27	2	37	2	47	1
8	1	18	2	28	3	38	3	48	2
9	1	19	1	29	3	39	1	49	2

4　考察 1:E(n) について

まず、考察 1 で n と E(n) について考えていき、考察 2 で n と F(n) について考えていく。

4.1　n と E(n) についてについての予想

2 の指数 $E(n)$ に対して n を場合分けをする。

2 の指数 $E(n)$	n
0	0
1	1,2,4,8,16,32,$\cdots$
2	3,5,6,9,10,12,17,18,20,24,33,34,36,40,48,$\cdots$
3	7,11,13,14,19,21,22,25,26,28,35,37,38,41,42,44,49,50,$\cdots$
4	15,23,27,29,30,39,43,45,46,$\cdots$
5	31,47,$\cdots$

2 の指数が 1 のときの n の値は 1,2,4,8,16,32,$\cdots$ なので、

$$n = 2^{\varepsilon} \ (\varepsilon = 0, 1, 2, \cdots)$$

と予想できる。

しかし、2 の指数が 2 のときの n の値 (3,5,6,9,10,12,17,18,20,24,$\cdots$) は、3 と 5 の倍数がではないかと思ったが 15 がないなど、規則を見出すことができなかった。

オンライン整数列大辞典でこの数列を調べてみると、n を 2 進展開したときに 1 が 2 つでてくる数の列ではないかなということがわかった。

例）

$$3 = 2^0 + 2^1$$
$$5 = 2^0 + 2^2$$
$$6 = 2^1 + 2^2$$

4.2　予想

2 の指数が 0 のとき、$n = 0$
2 の指数が 1 のとき、$n = 2^{\varepsilon_1} \ (0 \leq \varepsilon_1)$
2 の指数が 2 のとき、$n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} \ (\varepsilon_1 < \varepsilon_2)$
2 の指数が 3 のとき、$n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + 2^{\varepsilon_3} \ (\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3)$
2 の指数が 4 のとき、$n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + 2^{\varepsilon_3} + 2^{\varepsilon_4} \ (\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4)$ $\cdots$ 2 の指数が m のとき、$n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + \cdots + 2^{\varepsilon_m} \ (\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_m)$
$\cdots$
と予想される。

4.3 証明の準備

4.3.1 Legendre の公式

$n!$ を素因数分解したときの素数 p の累乗 $e_p(n)$ は、

$$e_p(n) = \sum_{k=1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

と表せる。（Legendre の公式）

また、漸化式で表すと、

$$\begin{aligned} e_p(n) &= \sum_{k=1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \sum_{k=2} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \sum_{k=1} \left\lfloor \frac{\frac{n}{p}}{p^k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + e_p \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

4.3.2 $e_p(p^\varepsilon)$ の値

次に $e_p(p^\varepsilon)$ を考える。(p は素数)
① $\varepsilon = 0$ のとき

$$\begin{aligned} e_p(p^0) &= e(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

② ε が自然数のとき

$$\begin{aligned} e_p(p^\varepsilon) &= \frac{p^\varepsilon}{p} + e\left(\frac{p^\varepsilon}{p}\right) \\ &= p^{\varepsilon-1} + e(p^{\varepsilon-1}) \\ &= p^{\varepsilon-1} + \cdots + p^1 + e(p^1) \\ &= p^{\varepsilon-1} + \cdots + p^1 + 1 \\ &= 1 + p + \cdots + p^{\varepsilon-1} \\ &= \frac{1-p^\varepsilon}{1-2} \\ &= p^\varepsilon - 1 \end{aligned}$$

よって、$e_p(p^\varepsilon) = p^\varepsilon - 1$ となる。

4.3.3 $\dfrac{2n!}{n!^2}$ を素因数分解したときの 2 の指数 $E(n)$

以下、$e_2(n) = e(n)$ とする。
パスカルの三角形に最大係数 $\dfrac{2n!}{n!^2}$ を素因数分解したときの 2 の指数 $E(n)$ は、

$$\begin{aligned} E(n) &= e(2n) - 2e(n) \\ &= n + e(n) - e(n) \\ &= n - e(n) \end{aligned}$$

と表せる。

4.4　証明

4.5　n = 0 のとき

$$E(0) = 0$$

4.6　n = 2^{ε} のとき

① $\varepsilon = 0$ のとき

$$\begin{aligned} E(2^0) &= e(2^1) - 2e(2^0) \\ &= 2^0 - e(2^0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

② ε が自然数のとき

$$\begin{aligned} E(2^{\varepsilon}) &= e(2^{\varepsilon+1}) - 2e(2^{\varepsilon}) \\ &= 2^{\varepsilon} - e(2^{\varepsilon}) \\ &= 2^{\varepsilon} - 2^{\varepsilon-1} - e(2^{\varepsilon-1}) \\ &= 2^{\varepsilon} - 2^{\varepsilon-1} - \cdots - 1 - e(1) \\ &= 2^{\varepsilon} - \frac{1 - 2^{\varepsilon}}{1 - 2} - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

4.7　n = $2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2}$ のとき

① $n = 2^0 + 2^{\varepsilon_2}$ $(0 < \varepsilon_2)$ のとき

$$\begin{aligned} E(2^0 + 2^{\varepsilon_2}) &= 2^0 + 2^{\varepsilon_2} - e(2^0 + 2^{\varepsilon_2}) \\ &= 1 + 2^{\varepsilon_2} - \left(\frac{1}{2} + 2^{\varepsilon_2 - 1}\right) - e\left(\frac{1}{2} + 2^{\varepsilon_2 - 1}\right) \\ &= 1 + 2^{\varepsilon_2} - 2^{\varepsilon_2 - 1} - e(2^{\varepsilon_2 - 1}) \\ &= 1 + 2^{\varepsilon_2} - 2^{\varepsilon_2 - 1} - \cdots - 1 - e(1) \\ &= 1 + 2^{\varepsilon_2} - \frac{1 - 2^{\varepsilon_2}}{1 - 2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

② $n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2}$ $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2)$ のとき
$E(2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2})$

$$\begin{aligned}
&= 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} - e(2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2}) \\
&= 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} - (2^{\varepsilon_1 - 1} + 2^{\varepsilon_2 - 1}) - e(2^{\varepsilon_1 - 1} + 2^{\varepsilon_2 - 1}) \\
&= 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} - 2^{\varepsilon_1 - 1} - 2^{\varepsilon_2 - 1} - e(2^{\varepsilon_1 - 1} + 2^{\varepsilon_2 - 1}) \\
&= 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} - 2^{\varepsilon_1 - 1} - 2^{\varepsilon_2 - 1} - \cdots - 2^0 - 2^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} - e(2^0 + 2^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}) \\
&= 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} - (2^0 + \cdots + 2^{\varepsilon_1 - 1}) - (2^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 1} + \cdots + 2^{\varepsilon_2 - 1}) - e(2^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 1}) \\
&= 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} - \frac{1 - 2^{\varepsilon_1}}{1 - 2} - 2^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 1}(\frac{1 - 2^{\varepsilon_1 + 1}}{1 - 2}) - (2^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 1} - 1) \\
&= 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + 1 - 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 1} - 2^{\varepsilon_2} - 2^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 1} + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

よって、$n = 2_1^{\varepsilon} + 2_2^{\varepsilon}$ $(0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ のときは $E = 2$ となる。

4.7.1 $n = 2_1^{\varepsilon} + 2_2^{\varepsilon} + 2_3^{\varepsilon}$ 以上のとき

$n = 2_1^{\varepsilon} + 2_2^{\varepsilon} + 2_3^{\varepsilon}$ $(0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3)$ のときも同様の証明により $E(n) = 3$ となる。

同様に $n = 2_1^{\varepsilon} + 2_2^{\varepsilon} + \cdots + 2_m^{\varepsilon}$ $(0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_m)$ のときも数学的帰納法によって $E(n) = m$ となる。

5　考察 2：F(n) について

5.1　n と F(n) についての予想

2 の指数 $F(n)$ に対して n を場合分けをする。
n と 2 項係数 $Q(n) = {}_{2n+1}C_{n+1}$ を素因数分解したときの 2 の指数 $F(n)$ の表

2 の指数 $F(n)$	n
0	0,1,3,7,15,31,$\cdots$
1	2,4,5,8,9,11,16,18,19,23,32,33,35,39,47, $\cdots$
2	6,10,12,13,18,20,21,24,25,27,34,36,37,40,41,43,48,$\cdots$
3	14,22,26,28,29,38,42,44,45,$\cdots$
4	30,46,$\cdots$

$$\begin{aligned} F(n) &= e(2n+1) - e(n+1) - e(n) \\ &= [n + \frac{1}{2}] + e([n + \frac{1}{2}]) - e(n+1) - e(n) \\ &= n - e(n+1) \\ &= -1 + n + 1 - e(n+1) \\ &= E(n+1) - 1 \end{aligned}$$

となる。
　ここで、$F(n) = 0$ なら $E(n+1) = 1$ となる。
よって、$n + 1 = 2^{\varepsilon}$
だから、$n = 2^{\varepsilon} - 1$ となる。

よって、$\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}$ を素因数分解したときの 2 の指数 $F(n)$ が、

0 のとき $n = 2^{\varepsilon_1} - 1$ $(0 \le \varepsilon_1)$
1 のとき $n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} - 1$ $(0 \le \varepsilon_1 < \varepsilon_2)$
2 のとき $n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + 2^{\varepsilon_3} - 1$ $(0 \le \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3)$
3 のとき $n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + 2^{\varepsilon_3} + 2^{\varepsilon_4} - 1$ $(0 \le \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4)$
$\cdots$
m のとき $n = 2^{\varepsilon_1} + \cdots + 2^{\varepsilon_m} - 1$ $(0 \le \varepsilon_1 < \cdots < \varepsilon_m)$
$\cdots$
となる。

6　考察おまけ

6.1　Q(n) の左下の数列 R(n) について

$Q(n)$ の左下の数列 $R(n) = 1, 4, 15, 56, 216, \cdots$ を考えると、2 項係数 $\binom{2n+2}{k}$ の最大係数 $\binom{2n+2}{n+2}$ で作られる数列

$$R(n) = \frac{(2n+2)!}{(n+2)n!} \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と一致しているので、$R(n)$ を素因数分解したときの 2 の指数 $G(n)$ を考えていく。

$$\begin{aligned} G(n) &= e(2n+2) - e(n+2) - e(n) \\ &= (n+1) + e(n+1) - e(n+2) - e(n) \end{aligned}$$

1) n が奇数のとき、$e(n+1) = e(n+2)$ より、

$$G(n) = n + 1 - e(n) \ G(n) = E(n) + 1$$

2) n が偶数のとき、$e(n+1) = e(n)$ より、

$$G(n) = n + 1 - e(n+2) \ G(n) = E(n+2) - 1$$

となる。

7　今後の課題と感想

7.1　課題

$P(n)$ と $Q(n)$ と $R(n)$ の規則性は見つかったが、さらに左下の数列の規則性がわかりませんでした。ですからパスカルの三角形の値を縦に取った数列を一般化できるといいです。

7.2　感想

飯高先生様、ゼミのみんな、研究を手伝ってくれたみんな、数列大辞典様まことにありがとうございます。
研究してたのが進まなくなったときは、正直かなり焦りました。
だけど、住み込んで修行しなんとかまとめることができました。
そして、何か法則を見つけて証明できるのは想像以上にうれしかったです。
何か一つの事に専念して頑張ることの大切さを改めて感じました。
この気持ちを忘れずに、お父さんやお兄さんのような立派な銀行員になりたいと思います。