

この研究では、インド式計算法の一般化について

$$99^2 = 9801$$

$$999^2 = 998001$$

$$9999^2 = 99980001$$

9がn個並んだ数を  $9^{(n)}$  と書くことにする。

$$(9^{(n)})^2 = 9^{(n-1)}8(1)0^{(n-1)}1(1)$$

$(9^{(n)})^2 = 9^{(n-1)}8(1)0^{(n-1)}1(1)$  であることの

証明)

$$a = 1 = 0.9^{(\infty)}$$

$$0.9^{(n)} = a - \frac{a}{10^n}$$

$$0.9^{(n)} = \alpha \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \left(a^2 - \frac{a^2}{10^n}\right) - \left(\frac{a^2}{10^n} - \frac{a^2}{10^{2n}}\right) \\ &= (0.9^\infty - 0.0^{(n)}9^{(\infty)}) - (0.0^{(n)}9^{(\infty)} - 0.0^{(2n)}9^{(\infty)}) \\ &= 0.9^{(n)} - 0.0^{(n)}9^{(n)} \\ &= 0.9^{(n-1)}8(1)0^{(n-1)}1(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1^{(10)})^2 &= [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 0, 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, \\
(2^{(10)})^2 &= [4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6, 0, 3, 9, 5, 0, 6, 1, 7, \\
(3^{(10)})^2 &= [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, \\
(4^{(10)})^2 &= [1, 9, 7, 5, 3, 0, 8, 6, 4, 1, 5, 8, 0, 2, 4, 6, \\
(5^{(10)})^2 &= [3, 0, 8, 6, 4, 1, 9, 7, 5, 2, 4, 6, 9, 1, 3, 5, \\
(6^{(10)})^2 &= [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \\
(7^{(10)})^2 &= [6, 0, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 4, 8, 3, 9, 5, 0, 6, \\
(8^{(10)})^2 &= [7, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 3, 2, 0, 9, 8, 7, \\
(9^{(10)})^2 &= [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
\end{aligned}$$

$$(3^{(10)})^3 =$$

[3, 7, 0, 3, 7, 0, 3, 7, 0, 2, 5, 9, 2, 5, 9, 2, 5, 9, 2, 7,  
7, 0, 3, 7]

$$(6^{(10)})^3 =$$

[2, 9, 6, 2, 9, 6, 2, 9, 6, 2, 0, 7, 4, 0, 7, 4, 0, 7, 4, 1,  
9, 6, 2, 9, 6]

$$(9^{(10)})^3 =$$

[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2,  
9, 9, 9, 9, 9]

$$(9^{(10)})^4 =$$

[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5,  
9, 9, 9, 9, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]

$$(9^{(10)})^5 =$$

[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9,  
9, 9, 9, 9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 0]

$$(9^{(10)})^6 =$$

[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 4,  
9, 9, 9, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 0,  
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]

$$(9^{(10)})^7 =$$

[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 9, 9, 9, 9,  
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 7, 9, 0, 0, 0, 0, 0,  
9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]

$$(9^{(10)})^8 =$$

[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 7, 9, 9, 9, 9,  
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 4, 4, 0, 0, 0, 0, 0,  
9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]

$$(9^{(10)})^9 =$$

[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 5, 9, 9, 9, 9,  
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 5, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 7, 4, 0, 0, 0, 0, 0,  
9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 6, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 9, 9, 9, 9, 9,

$$(1^{(10)})^9 =$$

[2, 5, 8, 1, 1, 7, 4, 7, 8, 9, 3, 9, 0, 1, 3, 9, 8, 7, 0, 3,  
9, 6, 9, 1, 2, 5, 6, 5, 7, 1, 6, 1, 6, 4, 9, 4, 9, 6, 5, 4, 9,  
2, 4, 6, 5, 4, 5, 4, 8, 8, 8, 2, 1, 5, 7, 8, 5, 6, 1, 2, 8, 2,  
6, 8, 1, 9, 5, 9, 1]

$$(9^{(10)})^9 =$$

[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 5,  
9, 9, 9, 1, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 5, 9, 9, 9, 9, 9, 9,  
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 3, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 6, 4, 9,  
0, 0, 0, 0, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]

$(9^{(n)})^m$  は格別にきれいに数が並ぶ。

その理由として  $0.9^{(\infty)} = 1$  であることが関係して  
えられる。

だから一般に、 $G$  を底とし、 $G-1 = g$  とするとき  
 $0.g^{(\infty)} = 1$  であることを使って計算するので  
 $(g^{(n)})^m$  も割と簡単に書けることが予想できます。



$$2 \leq G \leq 10, n = 10, (g^{(n)})^2$$

$$(1^{(10)})^2 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(2^{(10)})^2 = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(3^{(10)})^2 = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(4^{(10)})^2 = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(5^{(10)})^2 = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(6^{(10)})^2 = [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(7^{(10)})^2 = [7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(8^{(10)})^2 = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(9^{(10)})^2 = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(9^{(10)})^2 = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

## 2 乗計算公式

$G \geq 2, G - 1 = g$  のとき、

$$(g^{(n)})^2 = g^{(n-1)}(g-1)^{(1)}0^{(n-1)}1^{(1)} \text{ が成り立つ}$$

$$2 \leq G \leq 10, n = 10, (g^{(n)})^3$$

$$(1^{(10)})^3 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1,$$

$$(2^{(10)})^3 = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2,$$

$$(3^{(10)})^3 = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 3, 3, 3, 3, 3,$$

$$(4^{(10)})^3 = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 4, 4, 4, 4, 4,$$

$$(5^{(10)})^3 = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 5, 5, 5, 5, 5,$$

$$(6^{(10)})^3 = [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 6, 6, 6, 6, 6,$$

$$(7^{(10)})^3 = [7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 7, 7, 7, 7, 7,$$

$$(8^{(10)})^3 = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 8, 8, 8, 8, 8,$$

$$(9^{(10)})^3 = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 9, 9, 9, 9, 9,$$

$$(9^{(10)})^3 = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]$$

### 3 乗計算公式

$G \geq 3$ 、 $G - 1 = g$  のとき、

$$(g^{(n)})^3 = g^{(n-1)}(g-2)^{(1)}0^{(n-1)}2^{(1)}g^{(n)} \text{ が成}$$

$$2 \leq G \leq 10, n = 10, (g^{(n)})^4$$

$$(1^{(10)})^4 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(2^{(10)})^4 = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(3^{(10)})^4 = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(4^{(10)})^4 = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(5^{(10)})^4 = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(6^{(10)})^4 = [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(7^{(10)})^4 = [7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(8^{(10)})^4 = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(9^{(10)})^4 = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$(g^{(10)})^4 =$$

$$[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, \\ 9, 9, 9, 9, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$$

#### 4 乗計算公式

$G \geq 6$ 、 $G - 1 = g$  のとき、

$$(g^{(n)})^4 = g^{(n-1)}(g-3)^{(1)}0^{(n-1)}5^{(1)}g^{(n-1)}(g-3)^{(1)}$$

が成り立つ。



$$(9^{(10)})^5 =$$

$$[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9, \\ 9, 9, 9, 9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 9, 9, 9, 9, 9, \dots]$$

### 5 乗計算公式

$G \geq 10$ 、 $G - 1 = g$  のとき、

$$(g^{(n)})^5 =$$

$$g^{(n-1)}(g-4)^{(1)}0^{(n-1)}g^{(1)}g^{(n-1)}(g-9)^{(1)}0^{(n-1)}$$

た



## 2 乗計算公式

$G - 1 = g$ 、 $a = 0.g^{(\infty)}$  とする。

$0.g^{(n)} = \alpha$  とおくと  $\alpha = a - \frac{a}{G^n}$  と書ける。

$$\alpha^2 = \left(a^2 - \frac{a^2}{G^n}\right) - \left(\frac{a^2}{G^n} - \frac{a^2}{G^{2n}}\right)$$

$$a^4 = 1 = 0.9^{(\infty)}$$

$$\alpha^2 = 0.g^{(n)}(g - 1)^{(1)}0^{(n-1)}1^{(1)}$$

よって  $G \geq 2$  のとき  $(g^{(n)})^2 = g^{(n)}(g - 1)^{(1)}0^{(n-1)}1^{(1)}$  が成り立つ。

### 3 乗計算公式

$G - 1 = g$ 、 $a = 0.g^{(\infty)}$  とする。

$0.g^{(n)} = \alpha$  とおくと、 $\alpha = a - \frac{a}{G^n}$  と書ける。

$$\alpha^3 = \left(a^3 - \frac{a^3}{G^n}\right) - 2\left(\frac{a^3}{G^n} - \frac{a^3}{G^{2n}}\right) + \left(\frac{a^3}{G^{2n}} - \frac{a^3}{G^{3n}}\right)$$

$$a^3 = 1 = 0.g^{(\infty)}$$

$$\alpha^3 = 0.g^{(n-1)}(g-2)^{(1)}0^{(n-1)}2^{(1)}g^{(n)}$$

よって  $G \geq 3$  のとき  $(g^{(n)})^3 = g^{(n-1)}(g-2)^{(1)}0^{(n-1)}2^{(1)}g^{(n)}$  が

#### 4 乗計算公式

$G - 1 = g$ 、 $a = 0.g^{(\infty)}$  とする。

$0.g^{(n)} = \alpha$  とおくと、 $\alpha = a - \frac{a}{G^n}$  と書ける。

$$\alpha^4 = \left(a^4 - \frac{a^4}{G^n}\right) - 3\left(\frac{a^4}{G^n} - \frac{a^4}{G^{2n}}\right) + 3\left(\frac{a^4}{G^{2n}} - \frac{a^4}{G^{3n}}\right) - \left(\frac{a^4}{G^{3n}} - \frac{a^4}{G^{4n}}\right)$$

$$a^4 = 1 = 0.g^{(\infty)}$$

$$\alpha^4 = 0.g^{(n-1)}(g-3)^{(1)}0^{(n-1)}5^{(1)}g^{(n-1)}(g-3)^{(1)}0^{(n-1)}1^{(1)}$$

よって  $G \geq 6$  のとき  $(g^{(n)})^4 = g^{(n-1)}(g-3)^{(1)}0^{(n-1)}5^{(1)}g^{(n-1)}(g-3)^{(1)}0^{(n-1)}1^{(1)}$  が成り立つ。

## 5 乗計算公式

$G - 1 = g$ 、 $a = 0.g^{(\infty)}$  とする。

$0.g^{(n)} = \alpha$  とおくと、 $\alpha = a - \frac{a}{G^n}$  と書ける。

$$\alpha^5 = \left(a^5 - \frac{a^5}{G^n}\right) - 4\left(\frac{a^5}{G^n} - \frac{a^5}{G^{2n}}\right) + 6\left(\frac{a^5}{G^{2n}} - \frac{a^5}{G^{3n}}\right) - 4\left(\frac{a^5}{G^{3n}} - \frac{a^5}{G^{4n}}\right)$$

$$a^5 = 1 = 0.g^{(\infty)}$$

$$\alpha^5 = 0.g^{(n-1)}(g-4)^{(1)}0^{(n-1)}9^{(1)}g^{(n-1)}(g-9)^{(1)}0^{(n-1)}4^{(1)}g^{(n)}$$

よって  $G \geq 10$  のとき  $(g^{(n)})^5 = g^{(n-1)}(g-4)^{(1)}0^{(n-1)}9^{(1)}g^{(n-1)}$

が成り立つ。

## 分割和

$G \geq 2$ 、 $G - 1 = g$  のとき、

$(g^{(n)})^2 = g^{(n-1)}(g-1)^{(1)}0^{(n-1)}1^{(1)}$  の右辺の 2 分割和について

右辺を  $g^{(n-1)}(g-1)^{(1)}$  と  $0^{(n-1)}1^{(1)}$  に分割して足すと

$g^{(n-1)}(g-1)^{(1)} + 0^{(n-1)}1^{(1)} = g^{(n)}$  となります。

例)

$G = 10$ 、 $n = 5$  の場合

$$(9^{(5)})^2 = 9^{(4)}8^{(1)}0^{(4)}1^{(1)}$$

$$99998 + 00001 = 99999 = 9^{(5)}$$

$$3 \text{ 乗計算公式の } 3 \text{ 分割和} = 2 \times g^{(n)}$$

$$4 \text{ 乗計算公式の } 4 \text{ 分割和} = 2 \times g^{(n)}$$

$$5 \text{ 乗計算公式の } 4 \text{ 分割和} = 3 \times g^{(n)}$$