すべての部分群の生成とHasse図の描画

学習院大学数学科

中山裕介

2008年2月5日

目的

Prolog によるプログラミングにより

1. 与えられた群 $(G, \times)$ のすべての部分群を求める。
2. 求めた部分群の Hasse 図を作成する。

全ての部分群の生成

群 G の部分群族を $\mathcal{B}(G)$ と書くことにする。

$$\mathcal{B}(G) = \{H \mid H \leq G\}$$

生成元で表すと

$$= \{\langle A \rangle \mid A \subset G\}$$

これを素直にやると部分群の生成を $2^{|G|}$ 回行わなければならない。

すべての部分群を生成するアルゴリズム

入力: **群** $(G, \times, e)$

出力: G **の全ての部分群の集合** S

$S \leftarrow \{\langle e \rangle, G\}$、$N \leftarrow \{\langle e \rangle\}$

$N \neq \emptyset$ **の間以下を繰り返す**

$H \in N$ **を取り、**$N \leftarrow N \backslash \{H\}$ **とする**

G/H **の代表元の集合** R **を求める（生成元の制限）**

すべての $g \in R$ **に対して**

$H' = \langle H, g \rangle$ **を求める（**Dimino **のアルゴリズム）**

$H' \notin S$ **ならば** $S \leftarrow S \cup \{H'\}$、$N \leftarrow N \cup \{H'\}$

生成元の制限

すでに求まっている部分群 H に付け足す生成元 $x \in G$ を選ぶときに

$$xH = yH \Rightarrow \langle H, x \rangle = \langle H, y \rangle$$

を用いて x を G/H の代表元に制限できる。

Dimino のアルゴリズム

集合 $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ から生成される群を求める方法。

$$H_1 = \langle g_1 \rangle,\ H_k = \langle H_{k-1}, g_k \rangle$$

の手順で H_n を求めることで計算の回数を減らす。
H_k を求めるときは、$H_k \leq H_{k-1}$ より左コセット分解

$$H_k = x_1 H_{k-1} \cup x_2 H_{k-1} \cup \cdots \cup x_n H_{k-1}$$

の代表元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が求まればよい。
特に $gHg^{-1} = H$ の場合、ある t があって次のようにできることも用いる。

$$H_k = H_{k-1} \cup gH_{k-1} \cup g^2 H_{k-1} \cup \cdots \cup g^t H_{k-1}$$

対称群と交代群の部分群の個数

群	位数	部分群の個数	計算時間（秒）
2 **次対称群** $\boldsymbol{S_2}$	2	2	0.00
3 **次対称群** $\boldsymbol{S_3}$	6	6	0.00
4 **次対称群** $\boldsymbol{S_4}$	24	30	0.08
5 **次対称群** $\boldsymbol{S_5}$	120	156	11.46
6 **次対称群** $\boldsymbol{S_6}$	720	1455	6109.75
3 **次交代群** $\boldsymbol{A_3}$	3	2	0.00
4 **次交代群** $\boldsymbol{A_4}$	12	10	0.01
5 **次交代群** $\boldsymbol{A_5}$	60	59	1.26
6 **次交代群** $\boldsymbol{A_6}$	360	501	504.01

- Web 上の *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* にある結果と一致している。
- 後でこれらの Hasse 図を描画する。

2 つの巡回群の直積の部分群の個数

m 次の巡回群 C_m と n 次の巡回群 C_n の直積の部分群の個数について調べてみた。

互いに素な整数 m, n に関しては $C_m \times C_n = C_{mn}$ より

$$\#\mathcal{B}(C_m \times C_n) = mn \text{ の約数の個数}$$

となることが分かる。

$C_m \times C_n$ の部分群の個数 $\#$

m	n	$\#$	m	n	$\#$	m	n	$\#$	m	n	$\#$
2	2	5	3	3	6	4	5	6	5	8	8
2	3	4	3	4	6	4	6	16	6	6	30
2	4	8	3	5	4	4	7	6	6	7	8
2	5	4	3	6	12	4	8	22	6	8	22
2	6	10	3	7	4	5	5	8	7	7	10
2	7	4	3	8	8	5	6	8	7	8	8
2	8	11	4	4	15	5	7	4	8	8	37

$\gcd(m,n) \neq 1$ な m, n に関しては第 1 成分と第 2 成分の要素の数

$$\phi(H) = \# \{i \mid (i,j) \in H\}$$
$$\psi(H) = \# \{j \mid (i,j) \in H\}$$

に注目してみる。

$C_6 \times C_6$ の部分群 H に対する $(\phi(H), \psi(H))$ の個数

$\phi \backslash \psi$	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

この表や他の m, n に関する ϕ, ψ を見ると各 $(\phi(H), \psi(H))$ の個数は $\gcd(\phi(H), \psi(H))$ であることが観察できる。
よって次の予想が得られる。

$$\#\mathcal{B}(C_m \times C_n) = \sum_{a|m,\, b|n} \gcd(a, b)$$

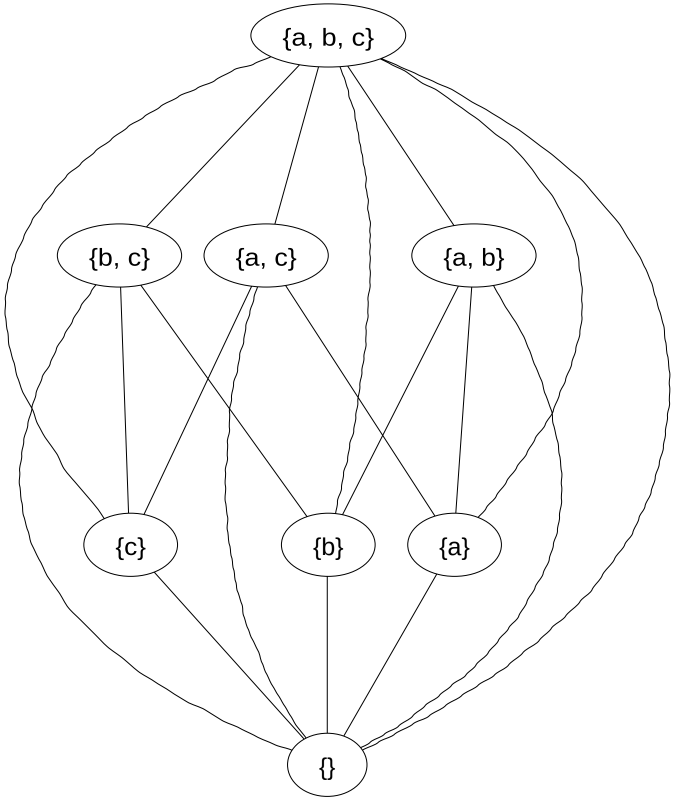
この証明は赤尾先生にしていただいた。
Web 上に似た記述があることからこの式自体は知られたものと思われる。

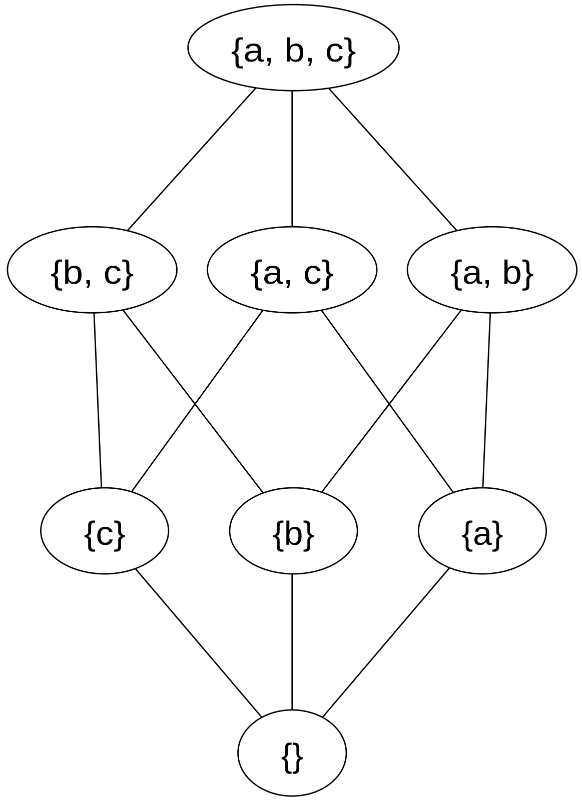
Hasse 図の作成

Hasse 図

- 順序集合 $(X, \preceq)$ を図示したもの。
- より順序の大きいものが上に配置される。
  すなわち $a \preceq b$ ならば b は a よりも上に配置される。
- 順序の定まった要素間は**必要最小限**の辺で結ばれる。
  すなわち $a \preceq b$ かつ $b \preceq c$ なら a、c 間の辺は省略する。
- Hasse 図は要素を頂点、順序を辺とするグラフから単調な辺を除いたグラフ（推移簡約）に他ならない。

例: 冪集合の Hasse 図





左: $\{a, b, c\}$ **の冪集合のすべての包含関係を書いたもの**

右: $\{a, b, c\}$ **の冪集合の包含関係による** Hasse **図**

有向グラフの推移閉包 (transitive closure)

- すべての到達可能な頂点の間に辺を追加したグラフ
- 頂点 u から頂点 v に到達可能なとき $u \overset{\Gamma}{\leadsto} v$ と書く

$$u \overset{\Gamma}{\leadsto} v \Leftrightarrow \exists k \geq 0,\ \exists \{(u, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_k, v)\} \subset E$$

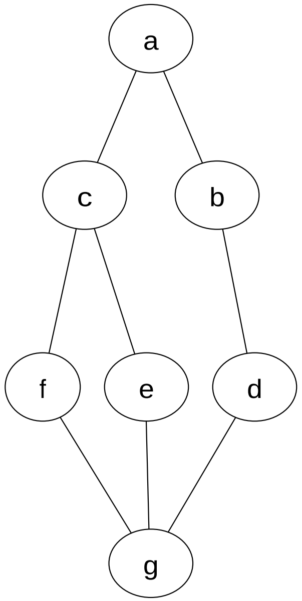
- グラフ $\Gamma = (V, E)$ の推移閉包を $\Gamma^+ = (V, E^+)$ と書く

$$E^+ = \left\{ u \overset{\Gamma}{\leadsto} v \;\middle|\; u, v \in V \right\}$$

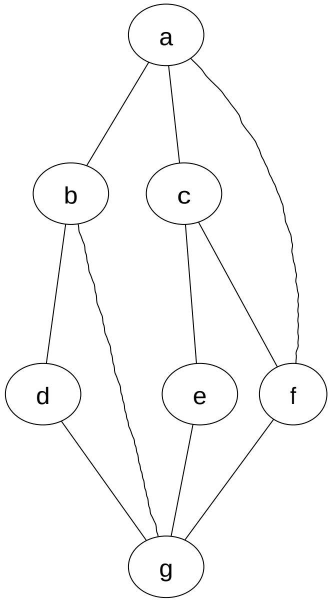
有向グラフの推移簡約 (transitive reduction)

- グラフから単調な辺をすべて除去したグラフ
- 推移閉包の逆問題となっている
- グラフ $\Gamma = (V, E)$ の推移簡約を $\Gamma^{-} = (V, E^{-})$ と書く

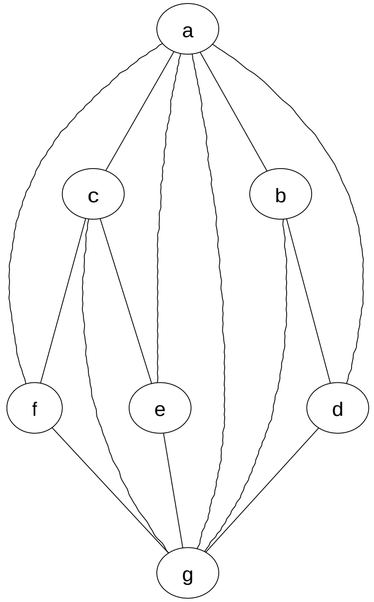
推移閉包・推移簡約の例



推移簡約



推移閉包



推移簡約の計算

各辺に対し始点からその辺を通らずに終点へ到達可能な辺を取り除けばよい。

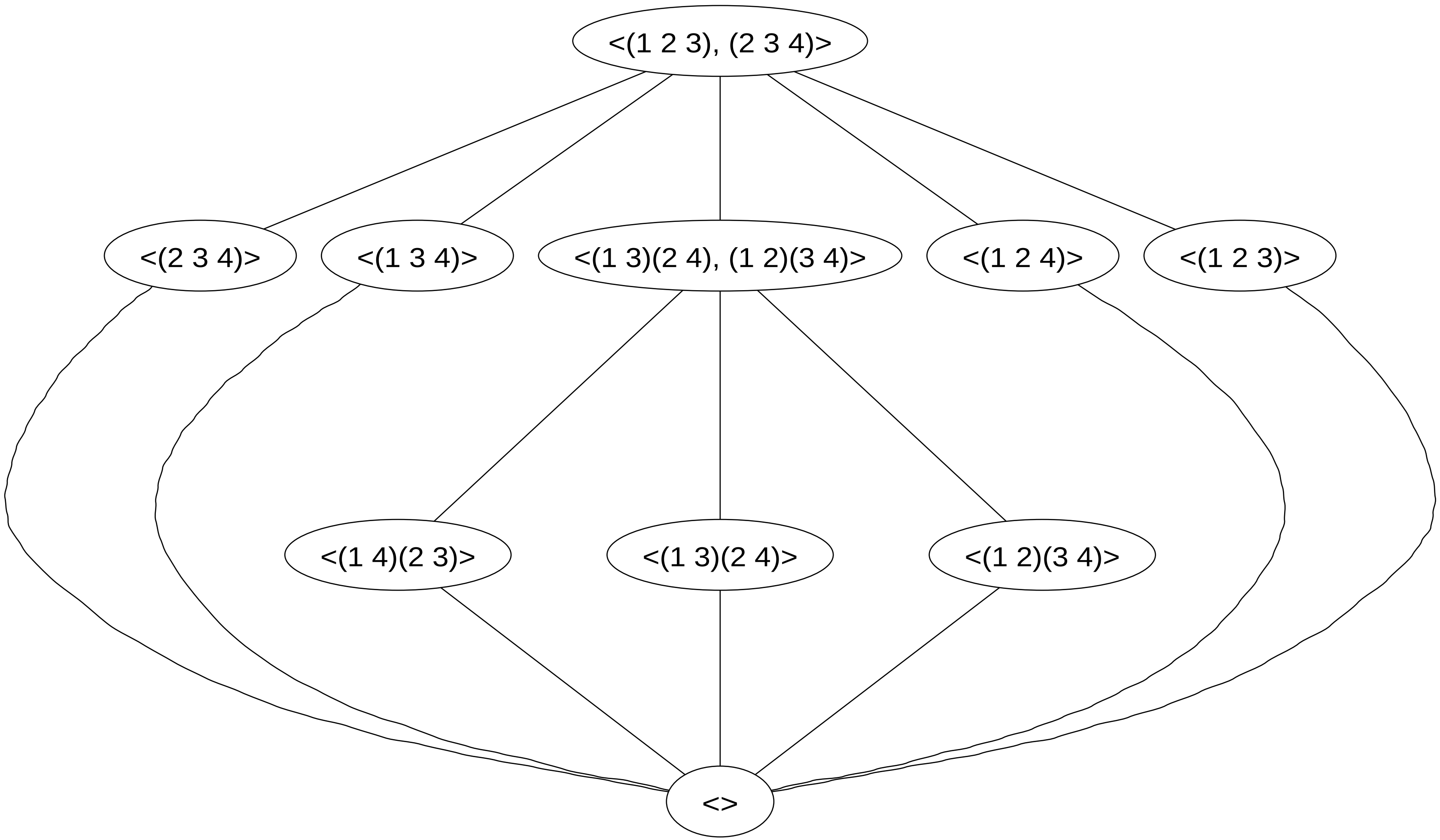
$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{-} &= \boldsymbol{E} - \left\{ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E} \;\middle|\; \exists(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{w} \overset{\boldsymbol{\Gamma}}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{v} \right\} \\ &= \left\{ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E} \;\middle|\; \forall(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{w} \overset{\boldsymbol{\Gamma}}{\not\rightsquigarrow} \boldsymbol{v} \right\} \end{aligned}$$

ここで $u \overset{\boldsymbol{\Gamma}}{\rightsquigarrow} v \Leftrightarrow (u, v) \in E^{+}$ より推移閉包 Γ^{+} を求めておけば

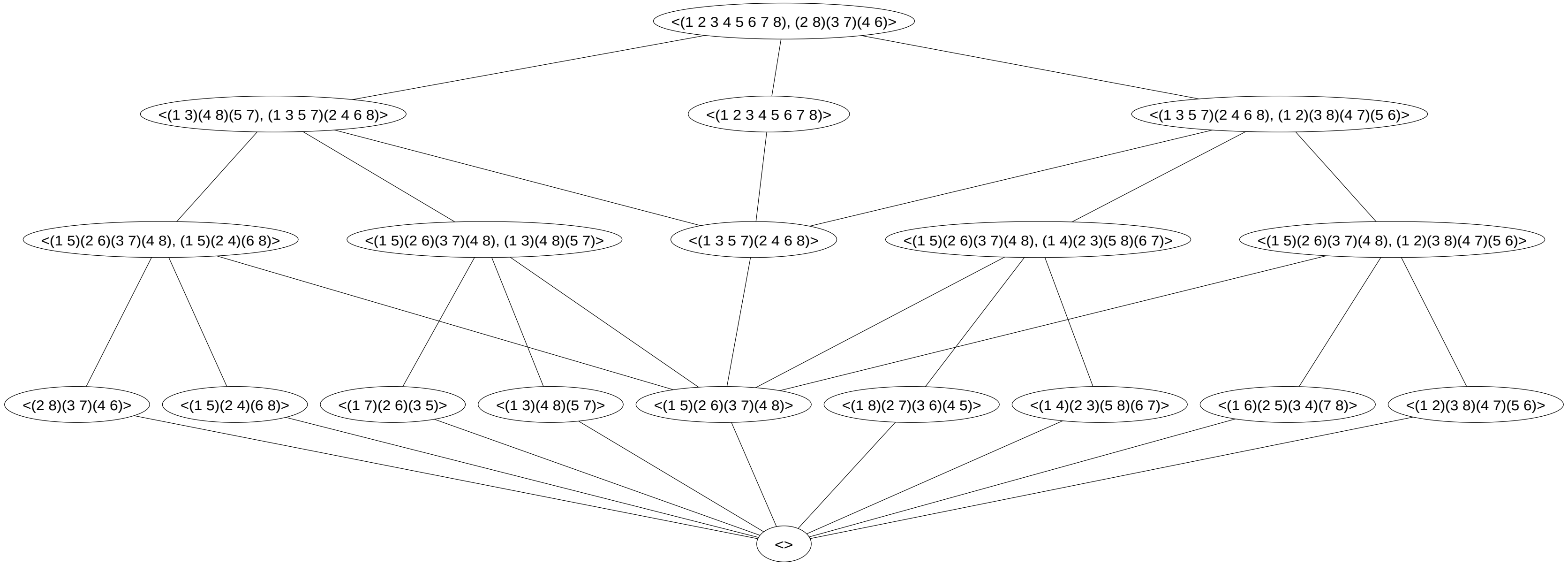
$$\boldsymbol{E}^{-} = \left\{ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E} \;\middle|\; \forall(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{E}, (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \notin \boldsymbol{E}^{+} \right\}$$

とできる。

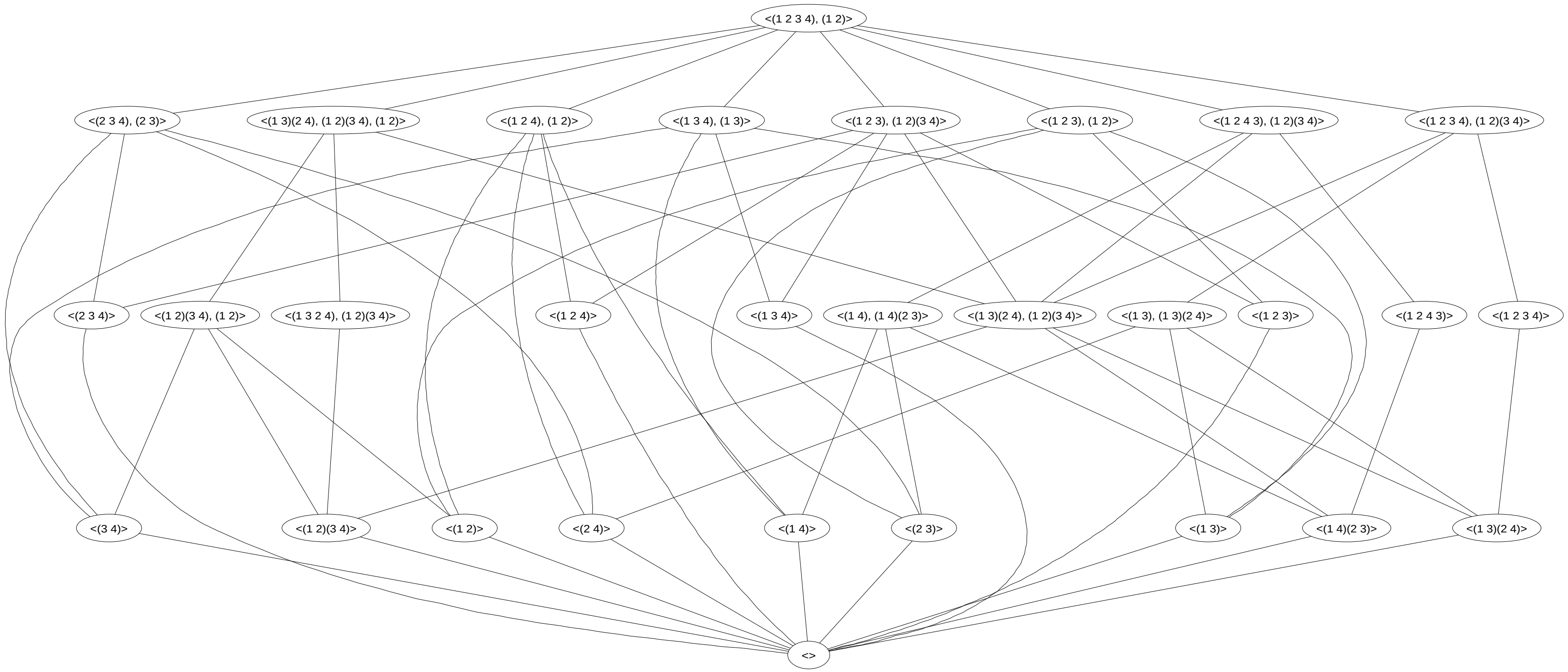
いろいろな群の Hasse 図



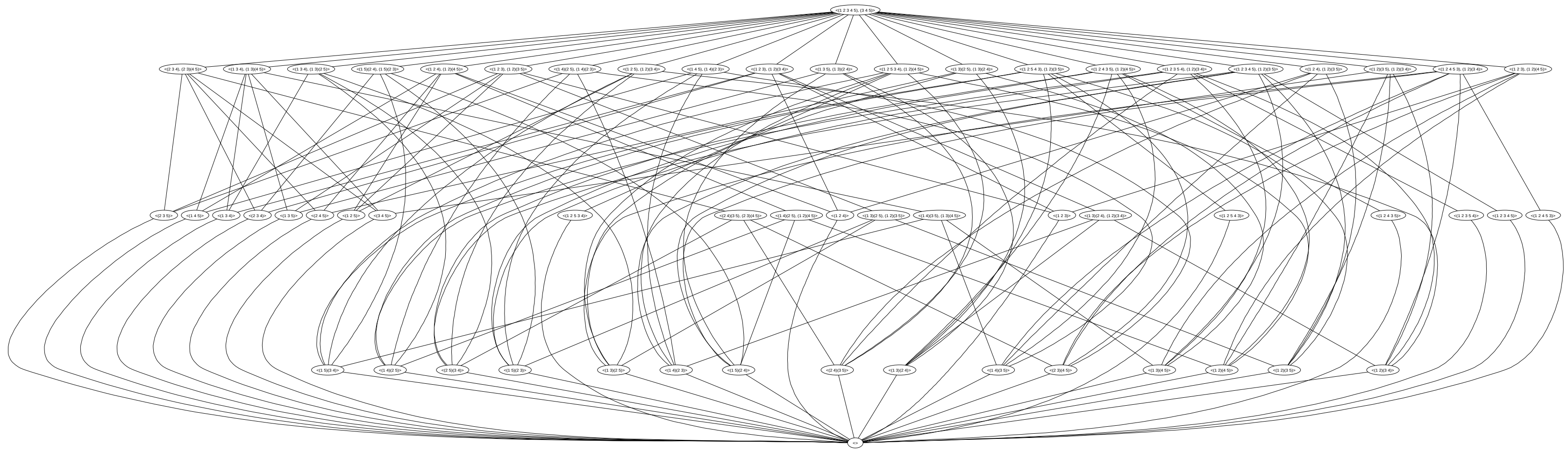
4 **次交代群** $\boldsymbol{A_4}$ **の部分群の** Hasse **図**



位数 16 の二面体群 D_8 の Hasse 図



4 次対称群 S_4 の部分群の Hasse 図



5 次交代群 A_5 の部分群の Hasse 図

おわり