２種類のシャフリングの関係性について

学習院大学理学部数学科

山口友加里

2008年2月5日

目的

この研究において、

- ２つに分けて考えるシャフリング（modified perfect faro shuffle）
- ４つに分けて考えるシャフリング

の周期を比較し、２種類のシャフリングの関係性を研究した。

2つに分けるシャフリングの仕方

☆枚数8枚で考える

1 2 3 4 5 6 7 8

◎半分で分ける。

1 2 3 4 　 5 6 7 8

◎後ろ半分を上に並べる。

5 6 7 8

1 2 3 4

◎左上から下へ順に並べていく。

5 1 6 2 7 3 8 4

4つに分けるシャフリングの仕方

☆枚数8枚で考える

1 2 3 4 5 6 7 8

◎4つに分ける。

1 2　3 4　5 6　7 8

◎後ろの組から上に並べる。

7 8

5 6

3 4

1 2

◎左上から下へ順に並べていく。

7 5 3 1 8 6 4 2

◎Prologの一例を挙げる。

```
?- shuffle([1,2,3,4,5,6,7,8],6).
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
[5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4]
[7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2]
[8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]
[4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5]
[2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
```
←6回目で元に戻る。

このようにシャフリングを繰り返すと元に戻る。

元に戻る回数を周期という。上の場合は周期は６である。

Table 1

枚数	周期(2つVer.)	周期(4つVer.)
4	4	2
6	3	
8	6	3
10	10	
12	12	6
14	4	
16	8	4
18	18	
20	6	3
22	11	
24	20	10
26	18	
28	28	14
30	5	

枚数を与えると周期がわかった。逆に周期を与えた場合、枚数がわかるだろうか。

10枚で２つに分けるシャフリングを考える。
最初の並び方をxとし、1回シャフリングした時の並び方をyとする。

Table 2. 10枚で2つに分けるシャフリング

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
2y	12	2	14	4	16	6	18	8	20	10
2y − x	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0

となる。

このことから

$$2\mathsf{y} - \mathsf{x} \equiv 0 \qquad \mod 11$$

$$\mathsf{y} \equiv \frac{1}{2}\mathsf{x} \qquad \mod 11 \cdots (1)$$

例えば、

$$2 \times 6 = 12 \equiv 1 \qquad \mod 11$$

$$6 \equiv \frac{1}{2} \qquad \mod 11$$

(1) に代入して

$$\mathsf{y} \equiv 6\mathsf{x} \mod 11$$

これを用いて考えると、

Table 3. x を 6 倍して mod 11 で考える

x	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
6x	6 12 18 24 30 36 42 48 54
6x (mod11)	6 1 7 2 8 3 9 4 10 5

上図より、xをそれぞれ6倍してmod 11で考えると1回シャフリングしたyになる。

さらに、2回xをシャフリングしたものをzとすると、同様にして

$$z \equiv 6y \quad \mathrm{mod}\ 11$$

よって、$y \equiv 6x \quad \mathrm{mod}\ 11$なので、

$$z \equiv 6 \times 6x = 6^2 x \qquad \mathrm{mod}\ 11$$

　これを繰り返し、m回シャフリングをしたときに元に戻るとしたら、

$$6^{\mathsf{m}}\mathsf{x} \equiv \mathsf{x} \mod 11$$

$\mathsf{x} \neq 0$なのでxで両辺割ると、

$$6^{\mathsf{m}} \equiv 1 \mod 11$$

となる最小の整数mが周期となる。
計算していくと、m=10のときに元に戻るので、周期は10である。
◎また、$\underline{6^{\mathsf{m}}\text{は}2^{\mathsf{m}}}$と書き直せる。

一般の場合

枚数2n枚のとき、

$$2^{m} \equiv 1 \mod 2n+1$$

上の式を満たす最小の正の整数 m が周期となる。

周期と枚数の関係式

$$2^{m}-1=k(2n+1)$$

これにより、周期からシャフリングする枚数を考えることができる。

例 周期$\mathsf{m}=6$のとき、周期と枚数の関係式に代入する。

$$2^6-1=\mathsf{k}(2\mathsf{n}+1)$$

$$63=\mathsf{k}(2\mathsf{n}+1)$$

よって$2\mathsf{n}+1$は3,7,9,21,63と考えられるから

$$2\mathsf{n}=2,6,8,20,62$$

よって周期が6のときの枚数は8枚、20枚、62枚である。

(注：枚数が2枚ならば周期が2、枚数が6枚のときは周期が3となり最小の整数ではないので除く。)

同様にして4つのシャフリングも考えることができる。

ただし、枚数は4枚からとなるので注意する。

周期と枚数の関係式

枚数を$4\mathsf{n}$、周期をmとすると、

$$4^{\mathsf{m}} - 1 = \mathsf{k}(4\mathsf{n} + 1)$$

結果の表を見てみると、枚数が４の倍数のとき、２つのシャフリングの周期は４つのシャフリングの周期の２倍であることがわかる。

Table 4. シャフリングの結果その１の１部分

枚数	周期(2つVer.)	周期(4つVer.)
4	4	2
6	3	
8	6	3
10	10	
12	12	6
14	4	
16	8	4

２つに分けるシャフリングと４つに分けるシャフリングの周期の関係式を考えたい。

２つに分けるシャフリングの周期をp、４つに分けるシャフリングの周期をmとする。

$$2^{\mathsf{p}} \equiv 1 \qquad \mod 2 \times 2\mathsf{n} + 1 \ldots (1)$$

$$4^{\mathsf{m}} \equiv 1 \qquad \mod 4\mathsf{n} + 1 \ldots (2)$$

(2)を考える。

$$4^{\mathsf{m}} = 2^{2\mathsf{m}} \equiv 1 \qquad \mod 4\mathsf{n} + 1$$

これを(1)と比較して、

$$\mathsf{p} = 2\mathsf{m}$$

となり2つに分けるシャフリングの周期は4つに分けるシャフリングの周期の2倍であることがわかる。

　しかし、2つに分けるシャフリングの周期が奇数のときのみ
4つに分けるシャフリングの周期と一致することがわかった。