

究極の完全数

飯高 茂

平成 29 年 7 月 19 日

1 究極の完全数

P を素数とし $\sigma(P^e)$ が素数 q のとき $a = P^e q$ を底が P の狭義の完全数と呼ぼう. このとき $q = \frac{P^{e+1} - 1}{P}$ となる.

次に底が P の狭義の完全数を整数 m だけ平行移動する.

$q = \frac{P^{e+1} - 1}{P} + m$ は素数として $a = P^e q$ を m だけ平行移動した底が P の狭義の完全数と呼ぶ.

底が P の狭義の完全数の満たす方程式を作る.

$$\bar{P}\sigma(a) = \bar{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1} - 1)(q + 1)$$

になり, $N = P^{e+1} - 1$ を使うと, $(q - m)\bar{P} = N$.

$$\sigma(a) = \sigma(P^e)(q + 1), Pa = (N + 1)q \text{ より}$$

$$\bar{P}\sigma(a) = N(q + 1) = Nq + N.$$

$$Nq = Pa - q, N - q = (P - 2)q - m\bar{P} \text{ を参考にして}$$

$$\bar{P}\sigma(a) = Nq + N = Pa - q + N = Pa + (P - 2)q - m\bar{P}.$$

これより q は $a = P^e q$ の最大素因子と考えられるので $q = \text{Maxp}(a)$ を利用すると

$$\bar{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a) - m\bar{P}. \quad (1)$$

これが m だけ平行移動した底が P の狭義の完全数の満たす方程式.

例えば $P = 2$ なら

$$\sigma(a) = 2a - m.$$

$P = 2$ に限って不愉快な $\text{Maxp}(a)$ が消えた.

$P = 3$ なら

$$2\sigma(a) = 3a + \text{Maxp}(a) - 2m.$$

1.1 微小解

平行移動しない場合を扱う. したがって

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a)$$

を満たす.

この解を m だけ平行移動した底が P の広義の完全数と呼ぶ.

さらにこれを究極の完全数 (ultimate perfect numbers) と呼ぶ. 印象深い用語ができることと諒解しやすく, また研究したくなるという効果がある.

まず $s(a) = 1$ のときの解を求めよう. ($s(a) = 1$ のときの解を微小解という.)
 $a = q^f$ が上の式を満たすとする.

1. $f = 1$ のとき.

$$\overline{P}(q + 1) - Pq = (P - 2)q.$$

これより,

$$P - q - 1 = (P - 2)q.$$

$(P - 1)(q - 1) = 0$ がでて矛盾.

2. $f \geq 2$ のとき.

$Y = q^f$ とおけば $a = Y, \overline{q}\sigma(a) = qY - 1$ を満たし $\text{Maxp}(a) = q$ によって

$$\frac{\overline{P}(qY - 1)}{\overline{q}} = PY + (P - 2)q.$$

整理して

$$Y(\overline{P}q - P\overline{q}) = \overline{P} + (P - 2)q\overline{q}.$$

$\overline{P}q - P\overline{q} = P - q$ に注意して

$$\overline{P} = Y(P - q) - (P - 2)q\overline{q} = q(q^{f-1}(P - q) - (P - 2)\overline{q}).$$

よって $\overline{P} = wq$ を満たす自然数 w がある. $P - 1 = wq$ なので

$$w = q^{f-1}(P - q) - (P - 2)\overline{q} = P(q^{f-1} - \overline{q}) - q^f + 2\overline{q}.$$

よって

$$w = (1 + wq)(q^{f-1} - \overline{q}) - q^f + 2\overline{q}.$$

$$w(1 - q^f + q\overline{q}) = -q^f + q^{f-1} + \overline{q}.$$

i) $w = 1$ のとき.

定義の $\bar{P} = wq$ により $P = 1 + q$ となり P, q はともに素数だから $q = 2, P = 3, Y = 2^f$.

$2\sigma(a) = 3a + 2$ なので $a = Y = 2^f$. よって $2(2Y - 1) = 3Y + 2$. これより $a = Y = 4$.

ii) $w \geq 2$ のとき.

$$2(q^f - q\bar{q} - 1) \leq w(q^f - q\bar{q} - 1) = q^f - q^{f-1} + \bar{q}.$$

これより

$$q^f - 2q\bar{q} - 2 \leq -q^{f-1} - \bar{q}.$$

$$q^{f-1}(q+1) \leq 2q^2 - 3\bar{q}.$$

$f \geq 3$ のとき.

$$q^2(q+1) \leq 2q^2 - 3\bar{q}.$$

変形して

$$q^3 - q^2 \leq -3\bar{q}.$$

これは矛盾.

$f = 2$ のとき

$$w(q^2 - q(q-1) - 1) = q^2 - q - (q-1) = \bar{q}^2.$$

$q^2 - q(q-1) - 1 = q-1, w\bar{q} = \bar{q}^2$ によって $w = \bar{q}$.

$P-1 = wq = q(q-1)$ により $P = 1 + q(q-1)$.

$q = 2$ なら, $P-1 = wq = q(q-1) = 2, P = 3$. これから $a = 2^2$.

定理 1. P, q が素数で $P = 1 + q(q-1)$ を満たすとき $a = q^2$ が解で, これは微小解.

P, q が素数で $P = 1 + q(q-1)$ を満たすとき $a = q^2$ が微小解.

微小解が存在するための素数 P の条件が素数 q があって $P = 1 + q(q-1)$ を満たすことである.

このような素数として $P = 7(q = 3), 43(q = 13)$ がある.

実際, $P = 3$ のとき微小解 $a = 2^2; P = 7$ のとき微小解 $a = 3^2; P = 157$ のとき微小解 $a = 13^2$ などが現れる.

1.2 微小解の存在する素数

$P = 1 + q(q - 1)$ を満たす素数 q, P を探してみた.

表 1: P, q が素数

q	P
2	3
3	7
7	43
13	157
67	4423
79	6163
139	19183
151	22651
163	26407
193	37057

a, b が互いに素な自然数のとき 等差数列 $\{an + b\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) には無限に多くの素数がある. これが有名な Dirichlet の定理である.

しかし, 2 次数列たとえば $\{n^2 + 1\}$ には無限に多くの素数があるに違いない. これは有名な数論における期待であるが証明はできるはずがない, と思われているほど難しい.

$\{n^2 - n + 1\}$ は無限に多くの素数があることは确实だが証明はない.

微小解の存在条件では n を素数に限りつつ $\{n^2 - n + 1\}$ には無限に多くの素数があるか問うている.

これは真に難問中の難問である. このような難問が, 微小解の存在問題として登場してきた.

1.3 $m > 0$ での微小解

$m > 0$ のときの微小解は奥が深い問題である.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a) - m\overline{P}$$

を満たす.

もっとも簡単な場合 $a = q$ の場合を計算する.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = \overline{P}(q+1) - Pq = P - q - 1 \text{ により } P - q - 1 = (P - 2)q - m(P - 1).$$

変形して

$$P - 1 = (P - 2)q - m(P - 1) + q = (P - 1)q - m(P - 1)$$

$\bar{P} = P - 1$ で割ると, $1 = q - m$. $m = q - 1$ だけ平行移動すると q が解になる.

次に簡単な場合 $a = q^2$ の場合を計算する. $\bar{P}\sigma(a) - Pa = \bar{P}(q^2 + q + 1) - Pq^2 = (P - 1)(q + 1) - q^2 - q$ により

$$(P - 1)(q + 1) - q^2 - q = (P - 1)q - m(P - 1).$$

$$\bar{P}(q + 1) - q^2 - q = \bar{P}(q - m) \text{ となりこれから}$$

$$\bar{P} - q^2 - q = -\bar{P}(m).$$

かくして次の式を得た.

$$\bar{P}(1 + m) = q(q - 1)$$

$$P = 1 + \frac{q(q - 1)}{m + 1}$$

素数 q に対して $Q = q(q - 1)$ の 2 因子分解 ab でその偶数約数が $a = P - 1$ と素数でかけるなら, $m = b - 1$

$$q = 3, Q = 6, a = 2, b = 3 \text{ なら } P = 3, m = 2$$

$$q = 5, Q = 20, a = 2, b = 10 \text{ なら } P = 3, m = 9$$

$$a = 4, b = 5 \text{ なら } P = 5, m = 4$$

2 5^e の場合

一般に P を素数とし任意の自然数 $E > 0$ について $a = P^E$ とおくと

$$\sigma(a) = \sigma(P^E) = \frac{a^P - 1}{P} \text{ によって}$$

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = -1.$$

これが $a = P^E$ に関する方程式である.

$P = 5$ については $4\sigma(a) - 5a = -1$ となる. とりあえず, $a \leq 20000$ についてパソコンで計算して表を作る.

表 2: $4\sigma(a) - 5a = -1$

a	$\sigma(a)$	素因数分解
5	6	[5]
25	31	[5 ²]
77	96	[7, 11]
125	156	[5 ³]
625	781	[5 ⁴]
3125	3906	[5 ⁵]
15625	19531	[5 ⁶]

驚いたことに 5 のべきでない数 $77 = 7 * 11$ が登場した. 驚かざるを得ない.

2.1 $s(a) = 2$ のときの証明

方程式 $4\sigma(a) - 5a = -1$ の解を $s(a) = 2$ のときに求めよう.

a を素因数分解し $a = p^e q^f$ ($2 < p < q$) とする. $X = p^e, Y = q^f$ とおくと $a = XY$ となる. すると $\overline{p} = p - 1, \overline{q} = q - 1$ を使うと

$$\sigma(a) = \frac{(pX - 1)(qY - 1)}{\overline{p}\overline{q}}$$

であり, $A = pX - 1, B = qY - 1, \rho' = \overline{p}\overline{q}$ とおけば

$$\frac{4AB}{\rho'} = 5XY - 1.$$

書き直して

$$4AB = 5\rho'XY - \rho'.$$

$4AB - 5\rho'XY$ の XY の係数を R とおけば

$$R = 4pq - 5\rho' = 20 - (p - 5)(q - 5).$$

$-\rho' + 4(pX + qY - 1) = RXY$ によって $R > 0$. $0 < R = 20 - (p - 5)(q - 5)$ により 次の場合がある.

1. $p = 5, R = 20. \rho' = 4\bar{q}$,
2. $p = 3, R = 10 + 2q. \rho' = 2\bar{q}$,
3. $p = 7, R = 30 - 2q; q = 11, 13. \rho' = 6\bar{q}$.

次の基本等式

$$RXY - 4(pX + qY - 1) = -\rho'$$

を各場合ごとに調べる.

1. $p = 5, R = 20. \rho' = 4\bar{q}$ の場合.
基本等式を 4 で割って

$$5XY - (5X + qY - 1) = -\bar{q}.$$

$(5X - q)Y - 5X = -\bar{q} - 1 = q$ により

$$(5X - q)(Y - 1) = 0.$$

よって $5X = 5^{f+1} = q$ となり矛盾.

2. $p = 3, R = 10 + 2q. \rho' = 2\bar{q}$.
 $R_1 = R/2 = 5 + q$ とおくと

$$R_1XY - 2(3X + qY - 1) = -\bar{q}.$$

変形して

$$(R_1X - 2q)Y = 6X - q - 1.$$

$Y = q$ のとき,

$(R_1X - 2q)q = 6X - q - 1$ によって $X \geq 3$ により

$$(R_1q - 6)X = 2q^2 - q - 1 \geq 3(5 + q)q - 6q = 3q^2 + 15q - 6q = 3q^2 + 9q.$$

これから矛盾が出る.

$Y \geq q^2$ のとき,

$$(R_1X - 2q)Y = 6X - q - 1 \geq (R_1X - 2q)q^2 = ((5+q)X - 2q)q^2 = (5+q)Xq^2 - 2q^3.$$

$$2q^3 - q - 1 \geq 3((5+q)q^2 - 6) = 3q^3 + 15q^2 - 18.$$

これから矛盾が出る.

3. $p = 7, R = 30 - 2q; q = 11, 13; \rho' = 6\bar{q}.$

$$R_1XY - 2(7X + qY - 1) = -3\bar{q}.$$

$q = 11$ のとき, $R_1 = 4.$

$$4XY - 2(7X + 11Y - 1) = -30.$$

$4XY - 2(7X + 11Y) = -32$ を変形して

$$2(2X - 11)Y = 14X - 32 = 7(2X - 11) - 32 = 7(2X - 11) + 45.$$

$(2X-11)(2Y-7) = 45$ の解として $2X-11 = 3, 2Y-7 = 15$ があり, $X = 7, Y = 11.$
ここで $a = 77.$ かくして 5 のべきでない解が発見された.

$q = 13$ のとき, $R_1 = 2.$

$$XY - (7X + 13Y) = -25.$$

$(X-7)(Y-13) = 91 - 25 = 65.$ しかし, X, Y は奇数なので $X-7, Y-13$ はともに偶数で矛盾. したがって $s(a) = 2$ のとき $a = 77.$

証明は適当に難しい. しかしながら $s(a) = 3$ の解がある可能性が残る.

3 完全数の垂直的展開

$P = 3, 5, 7, a \leq 10^6$ について $m = 0$ の数表を見てみよう.

表 3: $P = 3, 5, 7, 43; m = 0$

$P = 3$	
a	factor
4	2^2
117	$3^2 * 13$
796797	$3^6 * 1093$
1212741	$[3^2, 47^2, 61]$
$P = 5$	
a	factor
775	$5^2 * 31$
305171875	$5^6 * 19531$
$P = 7$	
a	factor
9	3^2
6725201	$7^4 * 2801$
223511436608353935601	$7^{12} * 16148168401$
$P = 11$	
a	factor
A	B
$P = 43$	
a	factor
49	7^2
11966490679001	$43^4 * 3500201$

$A = 2322515441988780809505203793273697$

$B = 11^{16} * 50544702849929377$

$m = 0$ のときは元祖完全数であるが数は多くない.

4 2素数積の解

$$\bar{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\text{Maxp}(a) - m\bar{P}$$

において, $a = rq, (r, q : \text{素数})$ と書ける解があるとする. このような解は探しやすい.

$B = a = rq, \Delta = r + q$ とおくと, $\sigma(a) = B + \Delta + 1$ により $\bar{P}\sigma(a) - Pa = \bar{P}(B + \Delta + 1) - PB = -B + \bar{P}\Delta + \bar{P}$ なので

$$-B + \bar{P}\Delta + \bar{P} = (P - 2)q - m\bar{P}.$$

$r_0 = r - \bar{P}, q_0 = q - \bar{P}, B_0 = r_0q_0$ とおくと

$$B_0 = B - \bar{P}\Delta + \bar{P}^2.$$

移項して

$$-B + \bar{P}\Delta = -B_0 + \bar{P}^2.$$

これを前の式に代入して

$$-B_0 + \bar{P}^2 + \bar{P} = (P - 2)q - m\bar{P}.$$

そこで, $D = \bar{P}^2 + \bar{P} - (P - 2)q + m\bar{P}$ とおけば $B_0 = D$.

$$B_0 + (P - 2)q = r_0q_0 + (P - 2)(q_0 + \bar{P}) = (r_0 + P - 2)q_0 + (P - 2)\bar{P}.$$

$r_0 + P - 2 = r - 1 = \bar{r}, B'_0 = \bar{r}q_0$ とおけば

$$B_0 + (P - 2)q = B'_0 + (P - 2)\bar{P}.$$

$D = B_0 = B'_0 + (P - 2)\bar{P} - (P - 2)q = B'_0 - (P - 2)q_0$ になるので, $D_0 = D + (P - 2)q_0$ とおくと $D_0 = B'_0$.

D_0 を次に計算する.

$$\begin{aligned} D_0 &= D + (P - 2)q_0 \\ &= \bar{P}^2 + \bar{P} + m\bar{P} - (P - 2)\bar{P} \\ &= \bar{P}(\bar{P} + 1 + m - (P - 2)) \\ &= \bar{P}(2 + m) \end{aligned}$$

$$B'_0 = \bar{r}q_0 = D_0.$$

これが基本式になる.

$D_0 = \bar{P}(2 + m)$ について 2 因子分解: $\bar{r}q_0 = D_0$ を行う.

$r = \bar{r} + 1, q = q_0 + P - 1, r < q$ がともに素数なら $a = rq$ が 2 素数積の解である.

2 素数積の解の表

$0 \leq m \leq 30$ の範囲で求めた.

表 4: $[P = 3], a = rq$

m	$a = r * q$
1	$3 * 5$
3	$3 * 7$
7	$3 * 11$
8	$5 * 7$
9	$3 * 13$
13	$3 * 17$
15	$3 * 19$
16	$5 * 11$
19	$3 * 23$
20	$5 * 13$
25	$3 * 29$
25	$7 * 11$
27	$3 * 31$
28	$5 * 17$

表 5: $[P = 5], a = rq$

m	$a = r * q$
5	$5 * 11$
7	$5 * 13$
11	$5 * 17$
13	$5 * 19$
17	$5 * 23$
23	$5 * 29$
25	$5 * 31$

表 6: $[P = 7], a = rq$

m	$a = r * q$
5	7 * 13
9	7 * 17
11	7 * 19
15	7 * 23
21	7 * 29
23	7 * 31
24	13 * 19
29	7 * 37

表 7: $[P = 11], a = rq$

m	$a = r * q$
11	11 * 23
17	11 * 29
19	11 * 31
25	11 * 37
29	11 * 41