究極の完全数

飯高 茂

平成 29 年 7 月 27 日

1　究極の完全数

P を素数とし $\sigma(P^e)$ が素数 q のとき $a = P^e q$ を底が P の狭義の完全数と呼ぼう. このとき $q = \dfrac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}$ となる.

次に底が P の狭義の完全数を整数 m だけ平行移動する.

$q = \dfrac{P^{e+1}-1}{\overline{P}} + m$ は素数として $a = P^e q$ を m だけ平行移動した底が P の狭義の完全数と呼ぶ.

底が P の狭義の完全数の満たす方程式を作る.

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1}-1)(q+1)$$

になり, $N = P^{e+1}-1$ を使うと, $(q-m)\overline{P} = N$.

$\sigma(a) = \sigma(P^e)(q+1), Pa = (N+1)q$ より

$$\overline{P}\sigma(a) = N(q+1) = Nq + N.$$

$Nq = Pa - q, N - q = (P-2)q - m\overline{P}$ を参考にして

$$\overline{P}\sigma(a) = Nq + N = Pa - q + N = Pa + (P-2)q - m\overline{P}.$$

これより q は $a = P^e q$ の最大素因子と考えられるので $q = \mathrm{Maxp}(a)$ を利用すると

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m\overline{P}. \tag{1}$$

これが m だけ平行移動した底が P の狭義の完全数の満たす方程式.

例えば $P = 2$ なら

$$\sigma(a) = 2a - m.$$

$P = 2$ に限って不愉快な $\mathrm{Maxp}(a)$ が消えた.

$P = 3$ なら

$$2\sigma(a) = 3a + \mathrm{Maxp}(a) - 2m.$$

1.1 微小解

平行移動しない場合を扱う. したがって

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a)$$

を満たす.

この解を m だけ平行移動した底が P の広義の完全数と呼ぶ.

さらにこれを究極の完全数 (ultimate perfect numbers) と呼ぶ. 印象深い用語ができると諒解しやすく, また研究したくなるという効果がある.

まず $s(a)=1$ のときの解を求めよう. ($s(a)=1$ のときの解を微小解という.)

$a=q^f$ が上の式を満たすとする.

1. $f=1$ のとき.

$$\overline{P}(q+1) - Pq = (P-2)q.$$

これより,

$$P-q-1 = (P-2)q.$$

$(P-1)(q-1)=0$ がでて矛盾.

2. $f \geq 2$ のとき.

$Y=q^f$ とおけば $a=Y, \overline{q}\sigma(a)=qY-1$ を満たし $\mathrm{Maxp}(a)=q$ によって

$$\frac{\overline{P}(qY-1)}{\overline{q}} = PY + (P-2)q.$$

整理して

$$Y(\overline{P}q - P\overline{q}) = \overline{P} + (P-2)q\overline{q}.$$

$\overline{P}q - P\overline{q} = P-q$ に注意して

$$\overline{P} = Y(P-q) - (P-2)q\overline{q} = q(q^{f-1}(P-q) - (P-2)\overline{q}).$$

よって $\overline{P}=wq$ を満たす自然数 w がある. $P-1=wq$ なので

$$w = q^{f-1}(P-q) - (P-2)\overline{q} = P(q^{f-1}-\overline{q}) - q^f + 2\overline{q}.$$

よって

$$w = (1+wq)(q^{f-1}-\overline{q}) - q^f + 2\overline{q}.$$

$$w(1-q^f+q\overline{q}) = -q^f + q^{f-1} + \overline{q}.$$

i) $w=1$ のとき.

定義の $\overline{P}=wq$ により $P=1+q$ となり P,q はともに素数だから $q=2,P=3,Y=2^f$.

$2\sigma(a)=3a+2$ なので $a=Y=2^f$. よって $2(2Y-1)=3Y+2$. これより $a=Y=4$.

ii) $w\geq 2$ のとき.

$$2(q^f-q\overline{q}-1)\leq w(q^f-q\overline{q}-1)=q^f-q^{f-1}+\overline{q}.$$

これより

$$q^f-2q\overline{q}-2\leq -q^{f-1}-\overline{q}.$$

$$q^{f-1}(q+1)\leq 2q^2-3\overline{q}.$$

$f\geq 3$ のとき.

$$q^2(q+1)\leq 2q^2-3\overline{q}.$$

変形して

$$q^3-q^2\leq -3\overline{q}.$$

これは矛盾.

$f=2$ のとき

$$w(q^2-q(q-1)-1)=q^2-q-(q-1)=\overline{q}^2.$$

$q^2-q(q-1)-1=q-1, w\overline{q}=\overline{q}^2$ によって $w=\overline{q}$.

$P-1=wq=q(q-1)$ により $P=1+q(q-1)$.

$q=2$ なら, $P-1=wq=q(q-1)=2, P=3$. これから $a=2^2$.

定理 1. P,q が素数で $P=1+q(q-1)$ を満たすとき $a=q^2$ が解で, これは微小解.

P,q が素数で $P=1+q(q-1)$ を満たすとき $a=q^2$ が微小解.

微小解が存在するための素数 P の条件が素数 q があって $P=1+q(q-1)$ を満たすことである.

このような素数として $P=7(q=3), 43(q=13)$ がある.

実際, $P=3$ のとき微小解 $a=2^2$;$P=7$ のとき微小解 $a=3^2$; $P=157$ のとき微小解 $a=13^2$ などが現れる.

1.2 微小解の存在する素数

$P = 1 + q(q-1)$ を満たす素数 q, P を探してみた.

表 1: P, q が素数

q	P
2	3
3	7
7	43
13	157
67	4423
79	6163
139	19183
151	22651
163	26407
193	37057

a, b が互いに素な自然数のとき 等差数列 $\{an + b\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ には無限に多くの素数がある. これが有名な Dirichlet の定理である.

しかし, 2 次数列たとえば $\{n^2 + 1\}$ には無限に多くの素数があるに違いない. これは有名な数論における期待であるが証明はできるはずがない, と思われているほど難しい.

$\{n^2 - n + 1\}$ は無限に多くの素数があることは確実だが証明はない.

微小解の存在条件では n を素数に限りつつ $\{n^2 - n + 1\}$ には無限に多くの素数があるか問うている.

これは真に難問中の難問である. このような難問が, 微小解の存在問題として登場したきた.

1.3　$m > 0$ での微小解

$m > 0$ のときの微小解は奥が深い問題である.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m\overline{P}$$

を満たす.

もっとも簡単な場合 $a = q$ の場合を計算する.

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = \overline{P}(q+1) - Pq = P - q - 1$ により $P - q - 1 = (P-2)q - m(P-1)$.

変形して

$$P - 1 = (P-2)q - m(P-1) + q = (P-1)q - m(P-1)$$

$\overline{P} = P - 1$ で割ると, $1 = q - m$. $m = q - 1$ だけ平行移動すると q が解になる.

次に簡単な場合 $a = q^2$ の場合を計算する. $\overline{P}\sigma(a) - Pa = \overline{P}(q^2+q+1) - Pq^2 = (P-1)(q+1) - q^2 - q$ により

$$(P-1)(q+1) - q^2 - q = (P-1)q - m(P-1).$$

$\overline{P}(q+1) - q^2 - q = \overline{P}(q-m)$ となりこれから

$\overline{P} - q^2 - q = -\overline{P}(m)$.

かくして次の式を得た.

$$\overline{P}(1+m) = q(q-1)$$

$$P = 1 + \frac{q(q-1)}{m+1}$$

素数 q に対して $Q = q(q-1)$ の 2 因子分解 ab でその偶数約数が $a = P - 1$ と素数でかけるなら, $m = b - 1$.

1.4 計算例

表 2: $m = 1, P, q$ が素数

q	P
2	2
5	11
13	79
17	137
41	821
61	1831
89	3917
97	4657

表 3: $m = 2, P, q$ が素数

q	P
3	3
13	53
31	311
73	1753

表 4: $m = 3, P, q$ が素数

q	P
241	14461
337	28309
409	41719
577	83089

表 5: $m = 4, P, q$ が素数

q	P
5	5
11	23
61	733
131	3407

表 6: $m = 5, P, q$ が素数

q	P
3	2
37	223
73	877
97	1553
181	5431

表 7: $m = 7, P, q$ が素数

q	P
113	1583
401	20051
673	56533
881	96911

表 8: $m = 9, P, q$ が素数

q	P
5	3
61	367
181	3259
421	17683
601	36061
661	43627

2 5^e の場合

一般に P を素数とし任意の自然数 $E > 0$ について $a = P^E$ とおくと
$\sigma(a) = \sigma(P^E) = \dfrac{aP-1}{\overline{P}}$ によって

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = -1.$$

これが $a = P^E$ に関しての方程式である.

$P = 5$ については $4\sigma(a) - 5a = -1$ となる. とりあえず,$a \leq 20000$ についてパソコンで計算して表を作る.

表 9: $4\sigma(a) - 5a = -1$

a	$\sigma(a)$	素因数分解
5	6	$[5]$
25	31	$[5^2]$
77	96	$[7, 11]$
125	156	$[5^3]$
625	781	$[5^4]$
3125	3906	$[5^5]$
15625	19531	$[5^6]$

驚いたことに 5 のべきでない数 $77 = 7 * 11$ が登場した. 驚かざるを得ない.

2.1 $s(a) = 2$ のときの証明

方程式 $4\sigma(a) - 5a = -1$ の解を $s(a) = 2$ のときに求めよう.

a を素因数分解し $a = p^e q^f (2 < p < q)$ とする. $X = p^e, Y = q^f$ とおくと $a = XY$ となる. すると $\overline{p} = p - 1, \overline{q} = q - 1$ を使うと

$$\sigma(a) = \frac{(pX-1)(qY-1)}{\overline{pq}}$$

であり,$A = pX - 1, B = qY - 1, \rho' = \overline{pq}$ とおけば

$$\frac{4AB}{\rho'} = 5XY - 1.$$

書き直して

$$4AB = 5\rho' XY - \rho'.$$

$4AB-5\rho' XY$ の XY の係数を R とおけば

$$R=4pq-5\rho'=20-(p-5)(q-5).$$

$-\rho'+4(pX+qY-1)=RXY$ によって $R>0$. $0<R=20-(p-5)(q-5)$ により 次の場合がある.

1. $p=5, R=20$. $\rho'=4\overline{q}$,
2. $p=3, R=10+2q$. $\rho'=2\overline{q}$,
3. $p=7, R=30-2q; q=11,13$. $\rho'=6\overline{q}$.

次の基本等式

$$RXY-4(pX+qY-1)=-\rho'$$

を各場合ごとに調べる.

1. $p=5, R=20$. $\rho'=4\overline{q}$ の場合.
基本等式を 4 で割って

$$5XY-(5X+qY-1)=-\overline{q}.$$

$(5X-q)Y-5X=-\overline{q}-1=q$ により

$$(5X-q)(Y-1)=0.$$

よって $5X=5^{f+1}=q$ となり矛盾.

2. $p=3, R=10+2q$. $\rho'=2\overline{q}$.
$R_1=R/2=5+q$ とおくと

$$R_1XY-2(3X+qY-1)=-\overline{q}.$$

変形して

$$(R_1X-2q)Y=6X-q-1.$$

$Y=q$ のとき,
$(R_1X-2q)q=6X-q-1$ によって $X\geq 3$ により

$$(R_1q-6)X=2q^2-q-1\geq 3(5+q)q-6q=3q^2+15q-6q=3q^2+9q.$$

これから矛盾が出る.

$Y \geq q^2$ のとき,

$$(R_1X-2q)Y = 6X-q-1 \geq (R_1X-2q)q^2 = ((5+q)X-2q)q^2 = (5+q)Xq^2-2q^3.$$

$$2q^3 - q - 1 \geq 3((5+q)q^2 - 6) = 3q^3 + 15q^2 - 18.$$

これから矛盾が出る.

3. $p = 7, R = 30 - 2q; q = 11, 13;\ \rho' = 6\overline{q}.$

$$R_1XY - 2(7X + qY - 1) = -3\overline{q}.$$

$q = 11$ のとき, $R_1 = 4$.

$$4XY - 2(7X + 11Y - 1) = -30.$$

$4XY - 2(7X + 11Y) = -32$ を変形して

$$2(2X - 11)Y = 14X - 32 = 7(2X - 11) - 32 = 7(2X - 11) + 45.$$

$(2X-11)(2Y-7) = 45$ の解として $2X-11 = 3, 2Y-7 = 15$ があり, $X = 7, Y = 11$. ここで $a = 77$. かくして 5 のべきでない解が発見された.

$q = 13$ のとき, $R_1 = 2$.

$$XY - (7X + 13Y) = -25.$$

$(X - 7)(Y - 13) = 91 - 25 = 65$. しかし, X, Y は奇数なので $X - 7$,$Y - 13$ はともに偶数で矛盾. したがって $s(a) = 2$ のとき $a = 77$.

証明は適当に難しい. しかしながら $s(a) = 3$ の解がある可能性が残る.

3　完全数の垂直的展開

$P = 3, 5, 7,\ a \leq 10^6$ について $m = 0$ の数表を見てみよう.

表 10: $P = 3, 5, 7, 43; m = 0$

$P = 3$	
a	factor
4	2^2
117	$3^2 * 13$
796797	$3^6 * 1093$
1212741	$[3^2, 47^2, 61]$
$P = 5$	
a	factor
775	$5^2 * 31$
305171875	$5^6 * 19531$
$P = 7$	
a	factor
9	3^2
6725201	$7^4 * 2801$
223511436608353935601	$7^{12} * 16148168401$
$P = 11$	
a	factor
A	B
$P = 43$	
a	factor
49	7^2
11966490679001	$43^4 * 3500201$

$A = 2322515441988780809505203793273697$
$B = 11^{16} * 50544702849929377$
$m = 0$ のときは元祖完全数であるが数は多くない.

4　2素数積の解

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m\overline{P}$$

において, $a = rq, (r, q$: 素数) と書ける解があるとする．このような解は探しやすい.

$B = a = rq, \Delta = r + q$ とおくとき, $\sigma(a) = B + \Delta + 1$ により $\overline{P}\sigma(a) - Pa = \overline{P}(B + \Delta + 1) - PB = -B + \overline{P}\Delta + \overline{P}$ なので

$$-B + \overline{P}\Delta + \overline{P} = (P-2)q - m\overline{P}.$$

$r_0 = r - \overline{P}, q_0 = q - \overline{P}, B_0 = r_0 q_0$ とおくとき

$$B_0 = B - \overline{P}\Delta + \overline{P}^2.$$

移項して

$$-B + \overline{P}\Delta = -B_0 + \overline{P}^2.$$

これを前の式に代入して

$$-B_0 + \overline{P}^2 + \overline{P} = (P-2)q - m\overline{P}.$$

そこで, $D = \overline{P}^2 + \overline{P} - (P-2)q + m\overline{P}$ とおけば $B_0 = D$.

$$B_0 + (P-2)q = r_0 q_0 + (P-2)(q_0 + \overline{P}) = (r_0 + P - 2)q_0 + (P-2)\overline{P}.$$

$r_0 + P - 2 = r - 1 = \overline{r}$, $B_0' = \overline{r} q_0$ とおけば

$$B_0 + (P-2)q = B_0' + (P-2)\overline{P}.$$

$D = B_0 = B_0' + (P-2)\overline{P} - (P-2)q = B_0' - (P-2)q_0$ になるので, $D_0 = D + (P-2)q_0$ とおくと $D_0 = B_0'$.

D_0 を次に計算する.

$$\begin{aligned} D_0 &= D + (P-2)q_0 \\ &= \overline{P}^2 + \overline{P} + m\overline{P} - (P-2)\overline{P} \\ &= \overline{P}(\overline{P} + 1 + m - (P-2)) \\ &= \overline{P}(2 + m) \end{aligned}$$

$$B_0' = \overline{r} q_0 = D_0.$$

これが基本式になる.

$D_0 = \overline{P}(2+m)$ について 2 因子分解: $\overline{r} q_0 = D_0$ を行う.

$r = \overline{r} + 1, q = q_0 + P - 1, r < q$ がともに素数なら $a = rq$ が 2 素数積の解である.

$m = 0$ のとき　2 素数積の解はない.

Proof

$D_0 = 2\overline{P} = \overline{r} q_0$ となる.

$\overline{P} = 2^e L, (L:$ 奇数$)$, とおくと

$D_0 = 2^{e+1} L = \overline{r} q_0$. q_0 は奇数なので, $q_0 = K, (K|L)$.

$K > 1$ なら $q = q_0 + 2^e L = K + +2^e L$ は合成数.

$K = 1$ なら $q = 1 + \overline{P} = P, \overline{r} = 2\overline{P} > P$.

$r < q$ に矛盾.

5　２素数積の解の表

$0 \leq m \leq 30$ の範囲で求めた.

表 11: $[P = 3]$, $a = rq$

m	a	$a = r * q$
1	15	$3 * 5$
3	21	$3 * 7$
7	33	$3 * 11$
8	35	$5 * 7$
9	39	$3 * 13$
13	51	$3 * 17$
15	57	$3 * 19$
16	55	$5 * 11$
19	69	$3 * 23$
20	65	$5 * 13$
25	87	$3 * 29$
25	77	$7 * 11$
27	93	$3 * 31$
28	85	$5 * 17$

表 12: $[P = 5]$, $a = rq$

m	$a = r * q$
5	$5 * 11$
7	$5 * 13$
11	$5 * 17$
13	$5 * 19$
17	$5 * 23$
23	$5 * 29$
25	$5 * 31$
31	$5 * 37$
35	$5 * 41$
37	$5 * 43$
37	$13 * 17$
41	$5 * 47$
43	$13 * 19$
47	$5 * 53$

表 13: $[P = 7]$, $a = rq$

m	$a = r * q$
5	$7 * 13$
9	$7 * 17$
11	$7 * 19$
15	$7 * 23$
21	$7 * 29$
23	$7 * 31$
24	$13 * 19$
29	$7 * 37$
32	$13 * 23$
33	$7 * 41$
35	$7 * 43$
39	$7 * 47$
44	$13 * 29$
45	$7 * 53$
48	$13 * 31$