書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第2期　予稿2; 完全数の水平展開5

飯高 茂

2017 年 2 月 24 日

1　2 月 10 日の復習

$q = \sigma(P^n)$ が素数の時 $P^n q$ は究極の完全数 (後で説明数する) である.

$(P-1)\sigma(a) - Pa = (P-2)\sigma(P^n)$ の解 a を ($P^n q$ をシード (seed) とする) 桐山の完全数という.

$P = 3, n = 2$ のとき $\sigma(3^2) = 1 + 3 + 3^2 = 13$ は素数なので $3^2 * 13$ は究極の完全数. これをシードにする方程式

$$2\sigma(a) - 3a = 13$$

ができる. その解は (桐山君も上から 3 つまでの解を得ている)

表 1: $[P = 3, n = 2]$ 桐山完全数

e	a	素因数分解
2	117	$3^2 * 13$
3	1809	$3^3 * 67$
4	18549	$3^4 * 229$
14318289	$3^7 * 6547$	

問題

$2\sigma(a) - 3a = 13$ の解は

1. 3 の倍数か

2. 3 の倍数を仮定したとき, a は正規解か ($a = 3^e q$ と書けるか)

3. $s(a)=2$ を仮定したとき, a は正規解か
4. 第二正規解はあるか

1 は解決困難. 2 は反例があるか 3 ができればうれしい.

1.1 桐山の完全数, 正規形の解

$a=P^eQ$ を桐山の完全数の方程式に代入すると,

$(P-2)\sigma(P^n)=(P-1)\sigma(a)-Pa=(P^{e+1}-1)(Q+1)-P^{e+1}Q=P^{e+1}-1-Q,$

なので正規形の解の方程式は

$$P^{e+1}-1-Q=(P-2)\sigma(P^n)$$

になる. 整理して

$$Q=P^{e+1}-1-(P-2)\sigma(P^n).$$

与えられた P,n に対し $e<50$ 程度で e を動かして $P^{e+1}-1-(P-2)\sigma(P^n)$ が素数なるものを探しこれを Q として $a=P^eQ$ を求めれば正規形の解ができる.

表 2: $[P=3,n=2]$ 桐山の完全数, 正規形

e	a	素因数分解
2	117	3^2*13
3	1809	3^3*67
4	18549	3^4*229
7	14318289	3^7*6547
16	5559059963901429	$3^{16}*129140149$
18	450283900467110517	$3^{18}*1162261453$
28	A	B

$A=157004289908176133654616510 9$

$B=3^{28}*68630377364869$

ユークリッドの完全数の末尾 1 桁は 6 または 8 でであったが桐山の完全数は末尾の数が 1 だけ増えた 7 または 9 になっている. これはかわいい結果と言ってよいだろう.

2 $P = 3, n = 4$ のときの正規形の解

$P = 3, n = 4$ のとき正規形の解である完全数 a を求めた計算結果は次のとおり.

表 3: $[P = 3, n = 4]$ 完全数, 正規形

e	a	素因数分解
5	147501	$3^5 * 607$
15	617671645717293	$3^{15} * 43046599$
31	1144561273430762138731603054893	$3^{31} * 1853020188851719$
40	44342648824303776846501444614204579081	$3^{40} * 36472996377170786281$
41	3990838394187339925084541117557513094061	$3^{41} * 109418989131512359087$
47	A	B

$A = 2120895147045314119488365752161051928228962093$
$B = 3^{47} * 79766443076872509863239$

$P = 3, n = 4$ のときの解を計算機による全数調査で調べたが解は $a = 147501 = 3^5 * 607$ しかでなかった. 今回は解を正規形に限って探索したので能率よく多くの解がでてきた. その結果 a, Q についてその末尾 1 桁を求める研究が可能になった.

2.1 $P = 3, n = 6$ のときの桐山の完全数, 正規形

$P = 3, n = 6$ のとき正規形の解である完全数 a を求めた.

表 4: $[P = 3, n = 6]$ 桐山の完全数, 正規形

e	a	素因数分解
6	796797	$3^6 * 1093$
10	0395753597	$3^{10} * 176053$
16	5559013473442749	$3^{16} * 129139069$
24	239299328921639616679869	$3^{24} * 847288608349$

前編の 3.2 では $a = 3^6 * 1093$ までしか出ていない. 巨大な完全数が 3 つも見つけられた.

3　m だけ平行移動した桐山の完全数

そこで桐山の完全数の場合も平行移動を考えてみたら,思いのほかうまくいった.
$q = \sigma(P^e) + m$,q は素数と仮定する.
$a = P^e q$ とおくとき $\overline{P}(q-m) = P^{e+1} - 1$ および $q - m = \sigma(P^e)$ なので

$$
\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(a) &= (P^{e+1} - 1)(q+1) \\
&= Pa + P^{e+1} - q - 1 \\
&= Pa - q + (q-m)\overline{P} \\
&= Pa - q + (q-m)(P - 2 + 1) \\
&= Pa + (q-m)(P-2) - m \\
&= Pa - m + (P-2)\sigma(P^e)
\end{aligned}
$$

ゆえに次の式ができるがこれを a についての方程式とみる.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\sigma(P^n) - m.$$

この解を与えられた P, n, m に対し m だけ平行移動した桐山の完全数という.

3.1　平行移動した桐山の完全数の計算

表 5: $[P = 3, n = 2, m = -2](a < 2 \times 10^6)$; m だけ平行移動した桐山の完全数

e	a	素因数分解
2	99	$3^2 * 11$
	147	$3 * 7^2$
4	18387	$3^4 * 227$
	100347	$3 * 13 * 31 * 83$
	145915	$5 * 7 * 11 * 379$

$a = 99 = 3^2 * 11$ と $a = 18387 = 3^4 * 227$ は正規形の解.
さらに非正規形の解がいくつかでてきた.
$a = 147 = 3 * 7^2$ は尾の部分が持ち上がって 2 つに割れた twin tail (ウルトラマンの怪獣) を連想させる.
$a = 100347 = 3 * 13 * 31 * 83$ と $a = 145915 = 5 * 7 * 11 * 379$ はオビの拡張形.
$m = 0$ の場合は非正規形の解は未発見.

表 6: $[P=3,n=2,m=4](a<2\times 10^6)$; m だけ平行移動した桐山の完全数

e	a	素因数分解
2	153	3^2*17
	957	$3*11*29$
3	1917	3^3*71
4	18873	3^4*233
	24957	$3^2*47*59$
	29637	$3^2*37*89$
	67077	$3^2*29*257$
	138237	$3*11*59*71$
5	174717	3^5*719
	201597	$3*11*41*149$

ここで出てきた解はいろいろあってまことに興味深い.

$a=153=3^2*17$,

$a=1917=3^3*71$,

$a=18873=3^4*233$,

$a=174717=3^5*719$. これらは正規形の解

$a=957=3*11*29$,

$a=24957=3^2*47*59$,

$a=29637=3^2*37*89$,

$a=67077=3^2*29*257$. これらは 3^eqr 型の解

$a=138237=3*11*59*71, a=201597=3*11*41*149$. これらはオビの拡張形.

$[P=3,n=2,m=10]$ のときの解も次のように興味深い.

表 7: $[P=3, n=2, m=10](a < 2 \times 10^6)$; m だけ平行移動した桐山の完全数

e	a	素因数分解
2	207	$3^2 * 23$
	1023	$3 * 11 * 31$
	2975	$5^2 * 7 * 17$
4	19359	$3^4 * 239$
	147455	$5 * 7 * 11 * 383$
	1207359	$3^3 * 97 * 461$
	5017599	$3^3 * 83 * 2239$

完全数の水平展開に話を戻す.

4 言葉の整理

a を未知数として方程式 $\sigma(a) = 2a - m$ の解を (広義の)m だけ平行移動した完全数という. これらをまとめて研究することを完全数の水平展開という.

$a = 2^e q, (q$:素数) を正規形の解という.

$a = 2^e q$ が正規形の解であれば $q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数になる.

そこで, 正規形の解は $A(m)_e$ 型ともいう.

$a = 2^e rq, r < q$(:素数) を第 2 正規形の解という.

$N = 2^{e+1} - 1, D = N(N+1) + m$ とおくときこれを 2 因数に分解して $r_0 q_0$ とし, $r = r_0 + N, q = q_0 + N$, がともに素数なら a は第 2 正規形の解になる.

そこで, 第 2 正規形を $D(m)_e$ 型ともいう.

正規形の解と 第 2 正規形の解を併せて主系列の解という. 主系列からはずれた解を例外型またはモンスターという.

5 完全数と第 2 正規形の解

$\sigma(a) = 2a - m$ の解 $a = 2^e rq, r < q$(:素数) があるとする.

6 第 1 完全数 6 について

6.1 $m = -12$ のとき

$\sigma(a) = 2a + 12$ を満たす.

表 8: $[P=2, m=-12]$ 完全数

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
30	$2*3*5$
42	$2*3*7$
54	$2*3^3$
66	$2*3*11$
78	$2*3*13$
102	$2*3*17$
114	$2*3*19$
138	$2*3*23$
174	$2*3*29$
186	$2*3*31$
222	$2*3*37$

$a=6p, (p \neq 2, 3:$ 素数$)$ が続くので途中略す.
$a=6p$ を通常解という.
$a=24=2^3*3$ と $a=54=2*3^3$ はいわゆる擬素数解である.

表 9: $[P=2, m=-12]$ 完全数 続き

a	素因数分解
282	$2*3*47$
304	2^4*19
318	$2*3*53$
354	$2*3*59$
366	$2*3*61$
402	$2*3*67$

ここで通常の解 $6p$ と異なる異常な解 $a=304=2^4*19$ が出てきた. これをエイリアンという. これは正規形 $2^e q$ なので正規形としての一般の解を探す.

逆に正規形 $2^e q$ が解なら $q=2^{e+1}-13$ を満たす.

正規形も求めるプログラムを用いて次の解の表がえられた.

24 を除くと,

$$e \equiv 0 \mod 4, q \equiv 9 \mod 10, a \equiv 4 \mod 10$$

表 10: $[P = 2, m = -12; a = 2^e q]$ 正規解

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
304	$2^4 * 19$
127744	$2^8 * 499$
33501184	$2^{12} * 8179$
8589082624	$2^{16} * 131059$
10384593717069654320312270165377024	$2^{56} * 144115188075855859$

を満たす.

$q = 2^{4K+j+1} - 13$ がいつ素数になるか調べる. 結果として e が 4 の倍数になることがわかるがプログラムで実証してみよう.

e=4k に対して

```
21 ?- q139(13,0,2=<8).
e=8  q= 499=[499]
e=12  q= 8179=[8179]
e=16  q= 131059=[131059]
e=20  q= 2097139=[11,190649]
e=24  q= 33554419=[197,170327]
e=28  q= 536870899=[23,23342213]
e=32  q= 8589934579=[1237,1549,4483]
```

このとき素数が出る.

e=1+4k に対して

```
22 ?- q139(13,1,2=<8).
e=9  q= 1011=[3,337]
e=13  q= 16371=[3^2,17,107]
e=17  q= 262131=[3,23,29,131]
e=21  q= 4194291=[3,17,82241]
e=25  q= 67108851=[3^3,2485513]
e=29  q= 1073741811=[3,17,467,45083]
e=33  q= 17179869171=[3,5726623057]
```

3 で割れる

e=2+4k に対して

```
23 ?- q139(13,2,2=<8).
e=10  q= 2035=[5,11,37]
e=14  q= 32755=[5,6551]
e=18  q= 524275=[5^2,67,313]
e=22  q= 8388595=[5,19,88301]
e=26  q= 134217715=[5,26843543]
e=30  q= 2147483635=[5,11,337,115861]
e=34  q= 34359738355=[5,461,14906611]
```

5 で割れる

e=3+4k に対して

```
24 ?- q139(13,3,2=<8).
e=11  q= 4083=[3,1361]
e=15  q= 65523=[3,21841]
e=19  q= 1048563=[3^2,116507]
e=23  q= 16777203=[3,53,105517]
e=27  q= 268435443=[3,79,1132639]
e=31  q= 4294967283=[3^2,389,1226783]
e=35  q= 68719476723=[3,15473,1480417]
```

3 で割れる

以上見たように, 方程式 $\sigma(a) = 2a + 12$ には解として
通常解 $a = 6p, (2 < 3 < p :$ 素数$)$,
擬素数解 $a = 24 = 2^3 * 3$, $a = 54 = 2 * 3^3$ の他に全く異質のエイリアン解の 3 種類の解がある.

この他の形もあるかもしれない.

6.2 $6r$ の特徴づけ

3 素数の積 $a = pqr, (p < q < r$: 素数$)$ が $\sigma(a) = 2a + 12$ の解となるとき $a = 6r$ を示す.

$a = pqr$ のとき

$$\sigma(a) = (p+1)\widetilde{qr}, 2a + 12 = 2pqr + 12.$$

$A = \widetilde{qr}, B = qr$ とおくと

$$(p+1)A = 2pB + 12.$$

すると

$$p(A - 2B) = 12 - A.$$

$\Delta = q + r$ とおくとき

$$A - 2B = \widetilde{qr} - 2qr = \Delta + 1 - qr.$$

$12 - A = 12 - (qr + \Delta + 1)$ によって,

$$p(\Delta + 1 - qr) = 12 - (qr + \Delta + 1)$$

これより式を整理して

$$12 = (1-p)qr + \Delta(p+1) + p + 1.$$

ここで $p = 2$ と仮定する.

$$12 = -qr + 3\Delta + 3.$$

よって,

$$qr = 3\Delta - 9.$$

$q_0 = q - 3, r_0 = r - 3$ とおくと $q_0r_0 = 0$.

$0 \le q_0 < r_0$ により $q_0 = 0; q = 3, p = 2$. r は単なる素数で 3 より大きいという条件以外の制約がない. $a = 6r$ が解.

次に $p > 2$ と仮定して矛盾を導く.

$12 = (1-p)qr + \Delta(p+1) + p + 1$ を p で整理すると,

$$12 = -p(qr - \Delta - 1) + qr + \Delta + 1.$$

$$p(qr - \Delta - 1) = qr + \Delta - 11.$$

$p \geq 3$ により

$$p(qr - \Delta - 1) = qr + \Delta - 11 \geq 3(qr - \Delta - 1).$$

$$0 \geq 2qr - 4\Delta + 8.$$

$q_2 = q - 2, r_2 = r - 2$ とおくとき $q_2 r_2 = qr - 2\Delta + 4$ によって

$$0 \geq qr - 2\Delta + 4 = q_2 r_2$$

なので $q_2 \leq 0$. ゆえに $q \leq 2$ となり矛盾.

6.3 解 $a = 2^e q^f$

$\sigma(a) = 2a + 12$ の解で $a = 2^e q^f, f \geq 1$ となるものを調べよう.
$X = 2^e, Y = q^f$ とおくとき
$\sigma(a) = (2X - 1)\dfrac{qY - 1}{\overline{q}} = 2XY + 12$ なので

$$(2X - 1)(qY - 1) = \overline{q} = 2\overline{q}XY + 12\overline{q},$$

$$2X + qY - 1 = 2XY - 12\overline{q}.$$

$12\overline{q} + 2X - 1 = Y(2X - q)$ より $2X - q > 0$.
$12\overline{q} + 2X - 1 = 12\overline{q} + 2X - q + \overline{q} = Y(2X - q)$ から

$$12\overline{q} + \overline{q} = (Y - 1)(2X - q).$$

そこで $Z = 1 + q + \cdots + q^{f-1}$ とおくとき $\dfrac{Y - 1}{\overline{q}} = Z$ なので

$$13 = Z(2X - q).$$

$Z = 1$ または $Z = 13$.

i) $Z = 1$. $2X - q = 13$ より $q = 2^{e+1} - 13$.
$e = 3$ のとき $q = 2^{e+1} - 13 = 3$. ここで $a = 2^3 * 3$. 擬素数解.
$q = 2^{e+1} - 13$ が素数になる例はいろいろある.
$e = 4$ のとき $q = 2^{e+1} - 13 = 32 - 13 = 19$ によって, $a = 2^4 * 19 = 304$ はエイリアン解.
$e = 8, 12, 16, 56$ のときの解は次の通り:

表 11: $m = -12$

a	factor
304	$2^4 * 19$
127744	$2^8 * 499$
33501184	$2^{12} * 8179$
8589082624	$2^{16} * 131059$
10384593717069654320312270165377024	$2^{56} * 144115188075855859$

ii) $Z = 13$. $Z = 1 + q + \cdots + q^{f-1} = 13$ によって, $f = 3, q = 3$. $2X - q = 1$ より $q = 2^{e+1} - 1$. したがって $e = 1$. $a = 2 * 3^3$ は擬素数解

7　完全数 の場合

m_0 を完全数として $a = m_0 p$ とおき (　ただし $m_0 \not\equiv 0 \mod p$), $\sigma(a) - 2a$ を計算する.

$$\sigma(a) - 2a = \sigma(m_0 p) - 2m_0 p = 2m_0(p+1) - 2m_0 p = 2m_0.$$

これらは完全数がらみで得られた一般解なので $B(-2m_0)_q$,($m_0 = 2^e q$) と記号を定義して主系列に入れる.

$\sigma(a) > 2a$ を満たす場合 a を古代ギリシャの数学者は過剰数 (豊数とも) と呼んだ.

$a = m_0 p$ は過剰数の解.

8　第 2 完全数 28

8.1　$m = -56$ の場合

表 12: $m = -56$ しかし $a = 2^2 * 7p$ 以外

a	factor
84	$2^2 * 3 * 7$
140	$2^2 * 5 * 7$
224	$2^5 * 7$
308	$2^2 * 7 * 11$
364	$2^2 * 7 * 13$
476	$2^2 * 7 * 17$
532	$2^2 * 7 * 19$
644	$2^2 * 7 * 23$
812	$2^2 * 7 * 29$
868	$2^2 * 7 * 31$
1036	$2^2 * 7 * 37$
1148	$2^2 * 7 * 41$
1204	$2^2 * 7 * 43$
1316	$2^2 * 7 * 47$
1372	$2^2 * 7^3$
1484	$2^2 * 7 * 53$
1652	$2^2 * 7 * 59$
1708	$2^2 * 7 * 61$

$28p$: (p は 2,7 以外の素数) はみな解でありこれらを通常解という.

この表で $28p$ 以外の解を探すと

$a = 224 = 2^5 * 7$, $a = 1372 = 2^2 * 7^3$

がある.

この 2 つの解は予期できる解といってよい.

通常解である $2^2 * 7p$ において p が擬素数 2^3 に変身してできた $2^5 * 7$ と p が擬素数 7^2 に変身してできた $2^2 * 7^3$ があり, これらは擬素数解とみなすことができる.

擬素数解は素性の確かな変わり者である.

通常解は無限にあるのでこれらを排除した解の表を求めてみた.

表 13: $m = -56, a : 28$ で割れない解

a	factor
4544	$2^6 * 71$
9272	$2^3 * 19 * 61$
14552	$2^3 * 17 * 107$
25472	$2^7 * 199$
74992	$2^4 * 43 * 109$
495104	$2^9 * 967$
6019264	$2^6 * 163 * 577$

これらの解は正規形 $2^e q$ および 第二正規形 $2^e rq$ である.

$\sigma(a) = 2a + 56$ が正規形の解 $2^e q$ を持つなら, $q = 2^{e+1} - 1 - 56$ を満たす. 通常型の解が非常に多いので, 28 で割れない解に制限して正規形の解だけを求めた. 得た表は次の通り:

$e \equiv 1 \mod 4, q \equiv 7 \mod 10, a \equiv 4 \mod 10,$

$e \equiv 2 \mod 4, q \equiv 1 \mod 10, a \equiv 4 \mod 10,$

$e \equiv 3 \mod 4, q \equiv 9 \mod 10, a \equiv 2 \mod 10.$

表 14: $m = -56$ 正規形

a	factor
224	$2^5 * 7$
4544	$2^6 * 71$
25472	$2^7 * 199$
495104	$2^9 * 967$
2145615872	$2^{15} * 65479$
137424011264	$2^{18} * 524231$
8795973484544	$2^{21} * 4194247$
36028789368553472	$2^{27} * 268435399$
38685626227417444939464704	$2^{42} * 8796093022151$
2475880078568755040589185024	$2^{45} * 70368744177607$

e=4k に対して

```
25 ?- q139(57,0,2=<8).
e=8  q= 455=[5,7,13]
e=12  q= 8135=[5,1627]
e=16  q= 131015=[5,26203]
e=20  q= 2097095=[5,7,11,13,419]
e=24  q= 33554375=[5^4,37,1451]
e=28  q= 536870855=[5,307,349753]
e=32  q= 8589934535=[5,7,13^2,1452229]
```

5 の倍数

Proof.

$q = 2^{4k+1} - 57 \equiv 2 - 20 \mod 5$

e=4k+1 に対して

```
26 ?- q139(57,1,2=<8).
e=9  q= 967=[967]
e=13  q= 16327=[29,563]
e=17  q= 262087=[7,37441]
e=21  q= 4194247=[4194247]
e=25  q= 67108807=[757,88651]
e=29  q= 1073741767=[7,59,2599859]
```

```
e=33   q= 17179869127=[631,27226417]
```

素数あり
$q = 2^{4k+1+1} - 57 \equiv 4 - 2 = 2 \mod 5$
q は奇数なので
$q \equiv 7 \mod 10$
q の末尾 1 桁は 7.

`e=4k+2` に対して

```
27 ?- q139(57,2,2=<8).
e=10   q= 1991=[11,181]
e=14   q= 32711=[7,4673]
e=18   q= 524231=[524231]
e=22   q= 8388551=[149,56299]
e=26   q= 134217671=[7,113,169681]
e=30   q= 2147483591=[11,195225781]
e=34   q= 34359738311=[457,863,87121]
```

素数あり
$q = 2^{4k+2+1} - 57 \equiv 8 - 2 = 6 \mod 5$
q は奇数なので
$q \equiv 1 \mod 10$
q の末尾 1 桁は 1.

`e=4k+3` に対して

```
28 ?- q139(57,3,2=<8).
e=11   q= 4039=[7,577]
e=15   q= 65479=[65479]
e=19   q= 1048519=[367,2857]
e=23   q= 16777159=[7^3,41,1193]
e=27   q= 268435399=[268435399]
e=31   q= 4294967239=[61,70409299]
e=35   q= 68719476679=[7,229,5501,7793]
```

素数あり
$q = 2^{4k+3+1} - 57 \equiv 1 - 2 = -1 \mod 5$
q は奇数なので
$q \equiv 9 \mod 10$

q の末尾 1 桁は 9.
結論
$e \equiv 3 \mod 4$ なら q の末尾 1 桁は 9.
$e \equiv 2 \mod 4$ なら q の末尾 1 桁は 1.
$e \equiv 1 \mod 4$ なら q の末尾 1 桁は 7.
このように鮮やかな結果は正規解に特有のものである.

第二正規解 $2^e rq$ ($r < q$: 素数) をアルゴリズムでさがしてみたら次のようになった.

表 15: $m = -56$, 第二正規形

a	factor
14552	$2^3 * 17 * 107$
9272	$2^3 * 19 * 61$
74992	$2^4 * 43 * 109$
35019968	$2^6 * 131 * 4177$
15317696	$2^6 * 137 * 1747$
6019264	$2^6 * 163 * 577$
53032832	$2^7 * 317 * 1307$
3365232128	$2^9 * 1277 * 5147$
26882784256	$2^{10} * 2557 * 10267$
17374747648	$2^{10} * 3691 * 4597$
125619603976192	$2^{12} * 8209 * 3736003$
12659380301824	$2^{12} * 8377 * 368947$
2306054088064335872	$2^{15} * 65539 * 1073790961$
629790585358898692096	$2^{18} * 524347 * 4581813997$
377932005921713291264	$2^{18} * 524387 * 2749298113$
24836343187798491136	$2^{18} * 525817 * 180182707$
20788512594675367936	$2^{18} * 526117 * 150730507$
5639357032256241664	$2^{18} * 531163 * 40500637$
4101321319457226752	$2^{18} * 533837 * 29307259$
450362539696193536	$2^{18} * 655357 * 2621467$
433541693141942272	$2^{18} * 664099 * 2490337$
290631842389557248	$2^{18} * 961187 * 1153441$

これらの解の数論的性質は皆目わからない.

9　第3完全数 496

表 16: $m = -992, 1 = a < 10000$

a	factor
1488	$2^4 * 3 * 31$
2480	$2^4 * 5 * 31$
2892	$2^2 * 3 * 241$
3472	$2^4 * 7 * 31$
5456	$2^4 * 11 * 31$
6104	$2^3 * 7 * 109$
6448	$2^4 * 13 * 31$
8432	$2^4 * 17 * 31$
9424	$2^4 * 19 * 31$

解 $2^4 * 13p = 496p$ は通常解.
$2^2 * 3 * 241$,$2^3 * 7 * 109$ は不思議な解. 第二正規形.

9.1　$[P = 2, m = -992]$ 496 で割れない場合

表 17: $m = -992, a = 2^e rq$

a	factor
2892	$2^2 * 3 * 241$
6104	$2^3 * 7 * 109$
170612	$2^2 * 13 * 17 * 193$
458144	$2^5 * 103 * 139$
857312	$2^5 * 73 * 367$
1006496	$2^5 * 71 * 443$
1764512	$2^5 * 67 * 823$
4041152	$2^6 * 233 * 271$
9865304	$2^3 * 17^3 * 251$

最後の解 $a = 9865304 = 2^3 * 17^3 * 251$ はすさまじいばかりの異形

表 18: $m = -992, a = 2^e q$ 正規形

a	factor
15872	$2^9 * 31$
126083072	$2^{13} * 15391$
8524857344	$2^{16} * 130079$
2251766494134272	$2^{25} * 67107871$
144114921519448064	$2^{28} * 536869919$
162259276829204419242718052483072	$2^{53} * 18014398509480991$
A	B
C	D

$A = 10633823966279324693528348333044662272$
$B = 2^{61} * 4611686018427386911$
$C = 114179815416476790483912587969161281679067709444$
$D = 2^{76} * 151115727451828646837279$

$a = 15872 = 2^9 * 31$ は擬素数解
もう 1 つの擬素数解
$a = 476656 = 2^4 * 31^3$

e=4k に対して

```
11 ?- A is 496*2+1,q139(A,0,3=<6).
e=12  q= 7199=[23,313]
e=16  q= 130079=[130079]
e=20  q= 2096159=[13,383,421]
e=24  q= 33553439=[31,1082369]
```

素数あり
$q = 2^{4k+1} - 2 * 496 - 1 \equiv 2 - 2 - 1 = -1 \bmod 5$. によって, $q \equiv 9 \bmod 10$.
q の末尾は 9.

e=4k+1 に対して

```
13 ?- A is 496*2+1,q139(A,1,3=<7).
e=13  q= 15391=[15391]
e=17  q= 261151=[11,23741]
e=21  q= 4193311=[193,21727]
e=25  q= 67107871=[67107871]
e=29  q= 1073740831=[31,43,805507]
```

$q = 2^{4k+1+1} - 2 * 496 - 1 \equiv 4 - 2 - 1 = 1 \bmod 5$.
$q \equiv 1 \bmod 10$.
q の末尾は 1.

e=4k+2 に対して

```
14 ?- A is 496*2+1,q139(A,2,3=<7).
e=14  q= 31775=[5^2,31,41]
e=18  q= 523295=[5,104659]
e=22  q= 8387615=[5,1677523]
e=26  q= 134216735=[5,26843347]
e=30  q= 2147482655=[5,83,5174657]
```

5 の倍数
Proof.
$q = 2^{4k+3} - 2 * 496 - 1 \equiv 8 - 2 - 1 \equiv 0 \mod 5$

e=4k+3 に対して

```
15 ?- A is 496*2+1,q139(A,3,3=<7).
e=15  q= 64543=[19,43,79]
e=19  q= 1047583=[31,47,719]
e=23  q= 16776223=[23,653,1117]
e=27  q= 268434463=[11,24403133]
e=31  q= 4294966303=[137,877,35747]
```

q :素数はないけれど,q の 1 桁の数は 3
$q = 2^{4k+3+1} - 2 * 496 - 1 \equiv 1 - 2 - 1 = -2 \bmod 5$. によって, $q \equiv 3 \bmod 10$.
q の末尾は 3.
結論
$e \equiv 3 \mod 4$ なら q の末尾 1 桁は 3.
$e \equiv 0 \mod 4$ なら q の末尾 1 桁は 9.
$e \equiv 1 \mod 4$ なら q の末尾 1 桁は 7.
このような鮮やかな結果は正規解に特有のものである.

10　第4完全数 8128

ついでに第 4 完全数 8128 に関連して $m = -16256$ についても調べる.

表 19: $m = -16256, 1 = a < 2000000$

a	factor
24384	$2^6 * 3 * 127$
40640	$2^6 * 5 * 127$
48684	$2^2 * 3 * 4057$
56896	$2^6 * 7 * 127$
89408	$2^6 * 11 * 127$
105664	$2^6 * 13 * 127$
112952	$2^3 * 7 * 2017$
138176	$2^6 * 17 * 127$
154432	$2^6 * 19 * 127$
186944	$2^6 * 23 * 127$

たとえば 解 $a = 24384 = 2^6 * 3 * 127$ は $8128 = 2^6 127$ なので $a = 8128 * 3$ であり通常解 $8128p$ が無数に得られる. これらを $B(-8128)_p$ 型という.

$a = 48684 = 2^2 * 3 * 4057$, $a = 112952 = 2^3 * 7 * 2017$

は第 2 正規形

表 20: $m = -16256$;not divisible by 8128

a	factor
48684	$2^2 * 3 * 4057$
112952	$2^3 * 7 * 2017$
353672	$2^3 * 11 * 4019$
396112	$2^4 * 19 * 1303$
1243808	$2^5 * 47 * 827$
4860050	$2 * 5^2 * 13 * 7477$

表 21: $m = -16256$ 正規形

a	factor
1040384	$2^{13} * 127$
1614774272	$2^{15} * 49279$
541232463872	$2^{19} * 1032319$
8761999622144	$2^{21} * 4178047$
2251254319284224	$2^{25} * 67092607$
576452024393007104	$2^{29} * 1073725567$
147573812943109750784	$2^{33} * 17179852927$
2361182682848555958272	$2^{35} * 68719460479$
37778929628612095115264	$2^{37} * 274877890687$
38685626156169091459579904	$2^{42} * 8796093005951$
154742504767674450100355072	$2^{43} * 17592186028159$
633825300104962823355581333504	$2^{49} * 1125899906826367$
41538374868276278147631421444849664	$2^{57} * 288230376151695487$
A	X
B	Y
C	Z

$A = 170141183460469081787328100567793795072$
$X = 2^{63} * 18446744073709535359$
$B = 43556142965880120924202202500896886095872$
$Y = 2^{67} * 295147905179352809599$
$C = 730750818665451459092015662833403996581367119872$
$Z = 2^{79} * 1208925819614629174689919$