

書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第3期 予稿1; 多重完全数とサブ完全数

飯高 茂

2017 年5月12日

目次

1	多重完全数	2
1.1	120 の特徴付け (伏字問題)	2
1.2	多重完全数のクラス	4
2	底 P, 平行移動 m の多重完全数	6
3	底 P, 平行移動 m のサブ完全数	8
3.1	正規形のサブ完全数	8
3.2	第2種正規形のサブ完全数	9
3.3	$P = 3$, 平行移動 $m = 3$ のサブ完全数	10
3.4	底 $P = 3$, 平行移動 $m = 5$ のサブ完全数	12
3.5	底 $P = 3$, 平行移動 $m = 9$ のサブ完全数	13
3.6	底 $P = 3$, 平行移動 $m = 11$ のサブ完全数	14
4	乗数付きのサブ完全数	15
4.1	$P = 2$ のとき	16
4.2	$[P = 2, m = 10]$ 乗数付きサブ完全数	17
5	乗数 k を持つ, 底 P, 平行移動 m のサブ完全数の第二形	17

1 多重完全数

ユークリッドの完全数は $\sigma(a) = 2a$ を満たす数として定義される. $2a$ の代わりに $3a$ にしたらどうなるか? という疑問は昔から提起されてきた.

1.1 120 の特徴付け (伏字問題)

たとえば $a = 120$ は $\sigma(a) = 3a$ を満たす. 実際,

$$a = 120 = 2^3 * 3 * 5, \sigma(a) = (2^4 - 1) * 4 * 6 = 3 * 5 * 4 * 6 = 3a.$$

120 の特徴付けをしてみよう.

120 の素因数分解の型にならって $a = P^e r q$ ($P < r < q$: 素数, とし $\sigma(a) = 3a$ を満たすとき a を求める. このような問いを伏字問題という.

補題 1 $a = P^e r q$ ($P < r < q$: 素数) が $\sigma(a) = 3a$ を満たすとき $P = 2, a = 120$.

Proof. $P = 2$ のとき,

$$N = 2^{e+1} - 1, \tilde{q} = q + 1, \tilde{r} = r + 1 \text{ を使うと}$$

$$\sigma(a) = N\tilde{q}\tilde{r}, 3a = 3 \times 2^e q r$$

$$\sigma(a) = 3a \text{ によれば, } N\tilde{q}\tilde{r} = 3 \times 2^e q r. \text{ 2倍して}$$

$$2N\tilde{q}\tilde{r} = 3 \times 2^{e+1} q r = 3(N + 1)q r.$$

$$A = \tilde{q}\tilde{r}, B = q r, \Delta = q + r \text{ を用いて } A = B + \Delta + 1 \text{ に留意すると,}$$

$$2NA = 3(N + 1)B, 2NA = 2N(B + \Delta + 1).$$

これより,

$$2N(\Delta + 1) = (N + 3)B.$$

$$2 > \frac{2N}{N+3} = \frac{B}{1+\Delta} \text{ によって}$$

$$2(1 + \Delta) > B.$$

$$q_0 = q - 2, r_0 = r - 2 \text{ とおけば } q_0 r_0 = B - 2\Delta + 4.$$

$$2(1 + \Delta) > B = q_0 r_0 + 2\Delta - 4.$$

これより, $6 > q_0 r_0$.

$r_0 \geq 2$ なら, $r_0 \geq 3$. したがって, $6 > q_0 r_0 \geq 3q_0$. これは矛盾.

$r_0 = 1$ になる. そこで $r = 3, q_0 = q - 2 \leq 5$.

$q_0 = 5$ のとき, $q = 7, B = 21, \Delta = 10$.

$$\frac{2N}{N+3} = \frac{B}{1+\Delta} = \frac{21}{11} \text{ によれば } 22N = 21N + 63.$$

これより $N = 63 \cdot 2^{e+1} - 1 = N = 63$. したがって, $2^{e+1} = 64 = 2^6$. よって, $e = 5, r = 3, q = 7$. ゆえに $a = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$.

$q_0 = 3$ のとき, $q = 5, B = 15, \Delta = 8$.

$$\frac{2N}{N+3} = \frac{B}{1+\Delta} = \frac{5}{3} \text{ によれば } 6N = 5N + 15.$$

よって $2^{e+1} - 1 = N = 15$ によれば $2^{e+1} = 16 = 2^4$. $e = 3, r = 3, q = 5$. したがって, $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

$P \geq 3$. このとき矛盾を導く.

$a = P^e r q$ において $N = P^{e+1} - 1, \tilde{q} = q + 1, \tilde{r} = r + 1$ を使うと

$$\overline{P}\sigma(a) = N\tilde{q}\tilde{r} = 3\overline{P} \times P^e q r$$

P 倍して

$$PN\tilde{q}\tilde{r} = 3\overline{P}P^{e+1}qr = 3\overline{P}(N+1)qr$$

$A = \tilde{q}\tilde{r}, B = qr, \Delta = q + r$ を用いて $A = B + \Delta + 1$ に留意すると,

$$PNA = 3\overline{P}(N+1)B.$$

$$1 + \frac{1+\Delta}{B} = \frac{A}{B} = \frac{3\overline{P}(N+1)}{PN}.$$

よって,

$$1 > \frac{1+\Delta}{B} = \frac{3\overline{P}(N+1)}{PN} - 1 = \frac{3\overline{P}(N+1) - PN}{PN}.$$

式を変形して

$$PN > 3\overline{P}(N+1) - PN.$$

ゆえに

$$2PN > 3(PN + P - N - 1) = 3PN + 3P - 3N - 3.$$

P でまとめると $P \geq 3$ なので

$$3N + 3 > P(N+3) \geq 3N + 3.$$

めでたく矛盾した.

これは小品. しかし絶品.

1.2 多重完全数のクラス

一般に $\sigma(a) = ka$ を満たす数を k -完全数 (k を abundancy または class と呼ぶ) といい, これらを総称して多重完全数 (multiply perfect numbers), または倍積完全数という. 興味ある例が次第に知られるようになったが完全数の場合のオイラーの定理のような美しい結果はない. 完全数と比べると多重完全数の研究にはさらなる困難があるようだ.

表 1: $[P = 2, k = 3]$ 多重完全数 (Wolfram MathWorld より)

a	素因数分解
120	$2^3 * 3 * 5$
672	$2^5 * 3 * 7$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$
459818240	$2^8 * 5 * 7 * 19 * 37 * 73$
1476304896	$2^{13} * 3 * 11 * 43 * 127$
51001180160	$2^{14} * 5 * 7 * 19 * 31 * 151$

この場合は 6 個しかないという予想がある.

奇数完全数 n が仮にあったとして $a = 2n$ とおく.

$$\sigma(a) = \sigma(2)\sigma(n) = 3 \times 2n = 6n = 3a$$

したがって, a はクラス 3 の多重完全数なのである. 奇数完全数 n の非存在は確定していないがあれば $n > 10^{1500}$ という結果があるそうだ.

表 2: $[P = 2, k = 4]$ 多重完全数, 36 個発見された

a	素因数分解
30240	$2^5 * 3^3 * 5 * 7$ (デカルト 1638)
32760	$2^3 * 3^2 * 5 * 7 * 13$
2178540	$2^2 * 3^2 * 5 * 7^2 * 13 * 19$
23569920	$2^9 * 3^3 * 5 * 11 * 31$

ここでデカルトが出てきた.

表 3: $[P = 2, k = 5]$ 多重完全数, 65 個発見された

a	素因数分解
14182439040	$2^7 * 3^4 * 5 * 7 * 11^2 * 17 * 19$ (デカルト 1638)
31998395520	$2^7 * 3^5 * 5 * 7^2 * 13 * 17 * 19$

表 4: $[P = 2, k = 6]$ 多重完全数 ,(カーマイケル 1907)

a	素因数分解
154345556085770649600	$2^{15} * 3^5 * 5^2 * 7^2 * 11 * 13 * 17 * 19 * 31 * 43 * 257$

完全数の一般化と同じ考えで, きわめて安易であるが底の素数 P を固定して $(P - 1)\sigma(a) = ka$ を満たす数を 底 P の場合の k -完全数という.

表 5: $[P = 3, k = 5]$ 多重完全数 ($2\sigma(a) = 5a$)

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$

これだけかどうかわからないが少しでもわかればいい.

$2\sigma(a) = 5a$ を満たす a を決めたい. これは偶数なので, $a = 2^e L, L : \text{奇数}$, と表す. $N = 2^{e+1} - 1$ を用いると $\sigma(a) = N\sigma(L)$. $5a = 5(N + 1)L/2$ によって,

$$4N\sigma(L) = 5(N + 1)L.$$

$N(4\sigma(L) - 5L) = 5L$ をえるがここで手詰まり.

L : 素数を仮定する.

$$N(4(L + 1) - 5L) = 5L \text{ になり } L = \frac{4N}{5+N} < 4.$$

L : 奇素数なので, $L = 3, N = 15, e = 3$ となって, $a = 24 = 2^3 * 3$.

やはり多重完全数の素因子は小さい.

$[P = 3, k = 11, 13, 17]$ のとき $a < 3 \times 10^6$ の範囲で解がない.

P は素数でやりたい. 4 を P に使うのは違反行為だが解が多くでてきたので止められない.

表 6: $[P = 3, k = 7]$ 多重完全数 $2\sigma(a) = 7a$

a	素因数分解
30240	$2^5 * 3^3 * 5 * 7$
32760	$2^3 * 3^2 * 5 * 7 * 13$
2178540	$2^2 * 3^2 * 5 * 7^2 * 13 * 19$

表 7: $[P = 4, k = 7]$ 多重完全数 $3\sigma(a) = 7a$

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
234	$2 * 3^2 * 13$

表 8: $[P = 4, k = 10]$ 多重完全数 $3\sigma(a) = 10a$

a	素因数分解
1080	$2^3 * 3^3 * 5$
6048	$2^5 * 3^3 * 7$
6552	$2^3 * 3^2 * 7 * 13$
435708	$2^2 * 3^2 * 7^2 * 13 * 19$

表 9: $[P = 4, k = 11]$ 多重完全数 $3\sigma(a) = 11a$

a	素因数分解
35640	$2^3 * 3^4 * 5 * 11$
199584	$2^5 * 3^4 * 7 * 11$
2142720	$2^9 * 3^3 * 5 * 31$

表 10: $[P = 5, k = 7]$ 多重完全数 $4\sigma(a) = 7a$

a	素因数分解
28	$2^2 * 7$

2 底 P , 平行移動 m の多重完全数

底 P で多重完全数を定義すると解がないことが多い。これでは問題設定に問題あり, とわれかねない。

パラメータ k を取り替えて解を探したところ,

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = -m$$

の場合は解が多い.

その上 $P = 2$ とすると方程式は $2\sigma(a) - 2a = -m$ になりユークリッドの完全数の平行移動の場合になっている.

そこで新たに別種の完全数を導入しよう.

3 底 P , 平行移動 m のサブ完全数

$q = P^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を底 P , 平行移動 m の狭義のサブ完全数 (subperfect number) といい, このときの q をサブ素数 (subprime number) という.

サブ素数は素数である. かつて全米を震撼させたサブプライムローンとは何の関係もない.

ここでサブ完全数の方程式の導入を行う. サブ完全数 $a = P^e q$ について

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1} - 1)(q + 1) = Pa - (q + 1 - P^e)$$

$q = P^{e+1} - 1 + m$ によれば $q + 1 - P^e = m$ なので

$$\overline{P}\sigma(a) = Pa - m.$$

究極の完全数の場合と比べて簡明な式になった. この方程式の解を底 P , 平行移動 m の広義のサブ完全数 (subperfect number) というのである.

広義のサブ完全数を簡単にサブ完全数という.

$P > 2$ なら, $m = 0$ のとき $P^{e+1} - 1 + m$ は素数にならない. これを克服するために $\sigma(P^e)$ を使うことになり $q = \sigma(P^e) - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を究極の完全数が定義された.

しかし, m によっては $P^{e+1} - 1 + m$ は素数なのでこのようにしても一向構わない.

3.1 正規形のサブ完全数

$a = P^f Q$ (Q : 素数) と書ける解を正規形のサブ完全数という.

このとき $\overline{P}\sigma(a) = (P^{f+1} - 1)(Q + 1) = Pa + P^{f+1} - (Q + 1)$ になり

$$-m = \overline{P}\sigma(a) - Pa = P^{f+1} - (Q + 1).$$

これより $Q = P^{f+1} + m - 1$.

これは底 P , 平行移動 m の狭義のサブ完全数のときのサブ素数である.

3.2 第2種正規形のサブ完全数

$a = P^f r q$ ($r < q$: 素数) と書ける解を第2種正規形のサブ完全数という.

このとき $\bar{P}\sigma(a) = (P^{f+1} - 1)(r + 1)(q + 1)$, $Pa - m = P^{f+1} r q - m$ になる.

$N = P^{f+1} - 1$, $A = (r + 1)(q + 1)$, $B = r q$, $\Delta = r + q$ とおくと

$$NA = (P^{f+1} - 1)(r + 1)(q + 1), Pa - m = P^{f+1} r q - m = (N + 1)B - m.$$

$A = B + \Delta + 1$ を代入して

$$NB + N(\Delta + 1) = P^{f+1} r q - m = (N + 1)B - m.$$

これより

$$N(\Delta + 1) = B - m.$$

$q_0 = q - N$, $r_0 = r - N$, $B_0 = q_0 r_0$ とおくと

$B_0 = B - N\Delta + N^2$. これを代入し

$$N(\Delta + 1) = B - m = B_0 + N\Delta - N^2.$$

$D = N(N + 1) + m$ とおけば, $B_0 = D$.

ここで話を逆転する. 与えられた f と m に対して $N = P^{f+1} - 1$, $D = N(N + 1) + m$ として D を求めそれを因数分解して, $B_0 = D$ から $q = q_0 + N$, $r = r_0 + N$ がともに素数となるものを探す. すると, $a = P^f r q$ が解になる.

3.3 $P = 3$, 平行移動 $m = 3$ のサブ完全数

$P = 3$ のとき $Q = 3^{e+1} - 1 + m$ が素数とする.
 m は奇数になる. $m = 1, 7, 10$ の場合 Q は素数にならない.
 $m = 3, 5, 9, 11$ について調べる.

表 11: $[P = 3, m = 3]$ サブ完全数

a	素因数分解
5	5
33	$3 * 11$
261	$3^2 * 29$
385	$5 * 7 * 11$
897	$3 * 13 * 23$
2241	$3^3 * 83$
26937	$3^2 * 41 * 73$
46593	$3^2 * 31 * 167$

5 を除くと, $5 * 7 * 11$ の他は, 正規形と第 2 正規形 の解ばかりである. おとなしい解があるだけだ.

表 12: $[P = 3, m = 3]$ サブ完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	33	$3 * 11$
2	261	$3^2 * 29$
3	2241	$3^3 * 83$
7	14353281	$3^7 * 6563$
9	1162300833	$3^9 * 59051$
13	7625600673633	$3^{13} * 4782971$
14	68630386930821	$3^{14} * 14348909$
23	26588814359145789645441	$3^{23} * 282429536483$
25	2153693963077252343529633	$3^{25} * 2541865828331$
35	A	B

$$A = 7509466514979724904009806156256961$$

$$B = 3^{35} * 150094635296999123$$

正規形の場合は下 1 桁の決定ができる.

$$e \equiv 1 \pmod{4} \implies Q \equiv 1, a \equiv 3 \pmod{10}$$

$$e \equiv 3 \pmod{4} \implies Q \equiv 3, a \equiv 3 \pmod{10}$$

$$e \equiv 2 \pmod{4} \implies Q \equiv 9, a \equiv 3 \pmod{10}$$

表 13: $[P = 3, m = 3]$ サブ完全数, 第二種正規形

e	a	素因数分解
1	897	$3 * 13 * 23$
2	46593	$3^2 * 31 * 167$
2	26937	$3^2 * 41 * 73$
5	19035755649	$3^5 * 733 * 106871$
5	6519443841	$3^5 * 743 * 36109$
7	43076441601	$3^6 * 2399 * 24631$

3.4 底 $P = 3$, 平行移動 $m = 5$ のサブ完全数

表 14: $[P = 3, m = 5]$ サブ完全数

a	素因数分解
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

7 を除くと, 正規形の解ばかりである.

表 15: $[P = 3, m = 5]$ サブ完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	39	$3 * 13$
2	279	$3^2 * 31$
5	178119	$3^5 * 733$
8	129166407	$3^8 * 19687$
9	1162340199	$3^9 * 59053$
21	328256967436378490439	$3^{21} * 31381059613$
29	A	B

$$A = 14130386091739009026274270599$$

$$B = 3^{29} * 205891132094653$$

3.5 底 $P = 3$, 平行移動 $m = 9$ のサブ完全数

表 16: $[P = 3, m = 9]$ サブ完全数

a	素因数分解
11	11
35	$5 * 7$
51	$3 * 17$
2403	$3^3 * 89$
20331	$3^4 * 251$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
68643	$3^2 * 29 * 263$
103683	$3 * 17 * 19 * 107$
1060803	$3^3 * 101 * 389$

11 と正規形と第 2 正規形 の解のほかに $a = 54723 * 17 * 29 * 37$, $a = 10368 = 3 * 17 * 19 * 107$ が出てきた. これらはオビの形である.

表 17: $[P = 3, k = 3, m = 9]$ サブ完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	51	$3 * 17$
3	2403	$3^3 * 89$
4	20331	$3^4 * 251$
7	14366403	$3^7 * 6569$
12	847292860971	$3^{12} * 1594331$
13	7625610239571	$3^{13} * 4782977$
19	4052555162317068003	$3^{19} * 3486784409$
37	A	B

$$A = 608266787713357712721955239746840211$$

$$B = 3^{37} * 1350851717672992097$$

表 18: $[P = 3, m = 9]$ 平行移動 $m = 9$ のサブ完全数, 第二種正規形

e	a	素因数分解
1	867	$3 * 17 * 17$
2	68643	$3^2 * 29 * 263$
3	5026563	$3^3 * 83 * 2243$
3	1060803	$3^3 * 101 * 389$
9	193109562812680803	$3^9 * 59069 * 166093589$

3.6 底 $P = 3$, 平行移動 $m = 11$ のサブ完全数

表 19: $[P = 3, m = 11]$ サブ完全数

a	素因数分解
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$
179577	$3^5 * 739$

13 と正規形の解ばかりなり.

表 20: $[P = 3, m = 11]$ サブ完全数, 正規形

e	a	素因数分解
1	57	$3 * 19$
2	333	$3^2 * 37$
5	179577	$3^5 * 739$
7	14370777	$3^7 * 6571$
17	50031546390401337	$3^{17} * 387420499$
35	A	B

$$A = 7509466514979725304262166948254617$$

$$B = 3^{35} * 150094635296999131$$

4 乗数つきのサブ完全数

$q = P^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を底 P , 平行移動 m の狭義のサブ完全数 (subperfect number) といったが, このときさらに, P や q の倍数ではない素数 $\rho < q$ をとり $\alpha = \rho P^e q$ を乗数 ρ を持つ狭義のサブ完全数という.

ここで方程式の導入を行う. 素数 ρ に対しサブ完全数 $a = P^e q$ について ($\rho < q, \neq P$ を仮定)

$$\bar{P}\sigma(\alpha) = \bar{P}(\rho + 1)\sigma(P^e q) = (\rho + 1)(P^{e+1} - 1)(q + 1)$$

さらに $-m = P^{e+1} - 1 - q$ に留意して式を変形する.

$$\begin{aligned} \bar{P}\sigma(\alpha) &= (\rho + 1)(P^{e+1} - 1)(q + 1) \\ &= (\rho + 1)(qP^{e+1} + P^{e+1} - 1 - q) \\ &= \rho(qP^{e+1} + P^{e+1} - 1 - q) + P^{e+1} + P^{e+1} - 1 - q \\ &= P\alpha - m\rho + qP^{e+1} + P^{e+1} - 1 - q \\ &= P\alpha - m\rho + P\alpha/\rho - m. \\ &= P\alpha - P\alpha/\rho - m(1 + \rho). \end{aligned}$$

よって

$$\rho\bar{P}\sigma(\alpha) - P(\rho + 1)\alpha = -m\rho(\rho + 1). \quad (1)$$

これを乗数 ρ を持つサブ完全数の方程式という. この解 α を乗数 ρ を持つ, 底 P , 平行移動 m の広義の (I 型) サブ完全数 (subperfect number with multiplier ρ) という. 広義のサブ完全数を簡単にサブ完全数という.

これを求める wxmaxima での program は次の通り.

```
subperfect_k(P,m,k,aa,bb):= for a:aa thru bb
do(Y: k*(P-1)*divsum(a)-(k*P+P)*a+m*k*(k+1),
if Y=0 then display(factor(a)) else 1=1);
```

4.1 $P = 2$ のとき

乗数 ρ を持つサブ完全数の方程式は少し簡単になって,

$$\rho\sigma(\alpha) - 2(\rho + 1)\alpha = -m\rho(1 + \rho).$$

$m = 0$ のときは乗数がないければ完全数であるが, $\rho = 3, 5$ の場合の結果をみて見よう.

$m = 0$ のとき

$$\rho\sigma(\alpha) - 2\alpha(\rho + 1) = 0.$$

さらに $\rho = 3$ のとき

$$3\sigma(\alpha) - 8\alpha = 0$$

表 21: [$P = 2, m = 0, \rho = 3$] 乗数 つきサブ完全数

a	素因数分解	元の完全数
84	$2^2 * 3 * 7$	$2^2 * 7$
270	$2 * 3^3 * 5$	
1488	$2^4 * 3 * 31$	$2^4 * 31$
1638	$2 * 3^2 * 7 * 13$	
24384	$2^6 * 3 * 127$	$2^6 * 127$

この解は 完全数 n の 3 倍が出てくる. $n = 6$ は $\rho = 3$ と干渉してどこかに消えた.

完全数の 3 倍という調和の世界に闖入者 $2 * 3^3 * 5, 2 * 3^2 * 7 * 13$ があった.

さらに $\rho = 5$ のとき

$$5\sigma(\alpha) - 12\alpha = 0.$$

表 22: $[P = 2, m = 0, \rho = 5]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
30	$2 * 3 * 5$
140	$2^2 * 5 * 7$
2480	$2^4 * 5 * 31$
6200	$2^3 * 5^2 * 31$
40640	$2^6 * 5 * 127$

表 23: $[P = 2, m = 4, \rho = 3]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
15	$3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
132	$2^2 * 3 * 11$
330	$2 * 3 * 5 * 11$
456	$2^3 * 3 * 19$
2652	$2^2 * 3 * 13 * 17$
3996	$2^2 * 3^3 * 37$
6432	$2^5 * 3 * 67$
25152	$2^6 * 3 * 131$
55896	$2^3 * 3 * 17 * 137$

比較するための完全数数の表

4.2 $[P = 2, m = 10]$ 乗数つきサブ完全数

5 乗数 k を持つ, 底 P , 平行移動 m のサブ完全数の第二形

$q = P^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = P^e q$ を底 P , 平行移動 m の狭義のサブ完全数 (subperfect number) といったが, このときさらに, P や q の倍数ではない素数 k をとり $a = \rho P^e q$ を乗数 ρ を持つ狭義のサブ完全数というのだがそれから導かれる方程式が実はいろいろある..

ここで方程式の導入を行う. 素数 k に対しサブ完全数 $a = P^e q$ について

表 24: $[P = 2, m = 4]$ 完全数

a	素因数分解	生き延びるもの
5	5	*
14	$2 * 7$	*
44	$2^2 * 11$	*
110	$2 * 5 * 11$	
152	$2^3 * 19$	*
884	$2^2 * 13 * 17$	
2144	$2^5 * 67$	*
8384	$2^6 * 131$	*
18632	$2^3 * 17 * 137$	
116624	$2^4 * 37 * 197$	

表 25: $[P = 2, m = 6, \rho = 3]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
21	$3 * 7$
54	$2 * 3^3$
126	$2 * 3^2 * 7$
156	$2^2 * 3 * 13$
828	$2^2 * 3^2 * 23$
1776	$2^4 * 3 * 37$
3870	$2 * 3^2 * 5 * 43$

表 26: $[P = 2, m = 6]$ 完全数

a	素因数分解	生き延びるモノ
7	7	*
15	$3 * 5$	*
52	$2^2 * 13$	*
315	$3^2 * 5 * 7$	
592	$2^4 * 37$	*
1155	$3 * 5 * 7 * 11$	
2102272	$2^{10} * 2053$	*

表 27: $[P = 2, m = 8, \rho = 3]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
27	3^3
66	$2 * 3 * 11$
390	$2 * 3 * 5 * 13$
552	$2^3 * 3 * 23$
3036	$2^2 * 3 * 11 * 23$
6816	$2^5 * 3 * 71$
56712	$2^3 * 3 * 17 * 139$
100992	$2^7 * 3 * 263$
211692	$2^2 * 3 * 13 * 23 * 59$
257808	$2^4 * 3 * 41 * 131$
302412	$2^2 * 3 * 11 * 29 * 79$
316692	$2^2 * 3^2 * 19 * 463$
896292	$2^2 * 3^3 * 43 * 193$
1174836	$2^2 * 3 * 13 * 17 * 443$
1583616	$2^9 * 3 * 1031$
3272736	$2^5 * 3 * 73 * 467$

表 28: $[P = 2, m = 10, \rho = 3]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
33	$3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
204	$2^2 * 3 * 17$
1968	$2^4 * 3 * 41$
7008	$2^5 * 3 * 73$
26304	$2^6 * 3 * 137$

$$\bar{P}\sigma(a) = \bar{P}(k+1)\sigma(P^e q) = (k+1)(P^{e+1} - 1)(q+1)$$

表 29: $[P = 2, m = 10]$ 完全数

a	素因数分解
11	11
21	$3 * 7$
26	$2 * 13$
68	$2^2 * 17$
656	$2^4 * 41$
2336	$2^5 * 73$
8768	$2^6 * 137$
133376	$2^8 * 521$
528896	$2^9 * 1033$

表 30: $[P = 2, m = 12, \rho = 3]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
39	$3 * 13$
228	$2^2 * 3 * 19$
378	$2 * 3^3 * 7$
2064	$2^4 * 3 * 43$
4230	$2 * 3^2 * 5 * 47$
4428	$2^2 * 3^3 * 41$
26688	$2^6 * 3 * 139$
57348	$2^2 * 3^5 * 59$
126378	$2 * 3^2 * 7 * 17 * 59$
319428	$2^2 * 3^2 * 19 * 467$
401664	$2^8 * 3 * 523$

さらに $q - m = P^{e+1} - 1$ に留意して式を変形する.

$$\begin{aligned}
 \overline{P}\sigma(a) &= (k+1)(P^{e+1} - 1)(q+1) \\
 &= (k+1)(P^{e+1}q + P^{e+1} - q - 1) \\
 &= (k+1)(P^{e+1}q - m) \\
 &= (k+1)P^{e+1}q - m(k+1) \\
 &= Pa + P^{e+1}q - m(k+1) \\
 &= Pa + q(q - m + 1) - m(k+1)
 \end{aligned}$$

表 31: $[P = 2, m = 12]$ 完全数

a	素因数分解
13	13
45	$3^2 * 5$
76	$2^2 * 19$
688	$2^4 * 43$
8896	$2^6 * 139$
133888	$2^8 * 523$

表 32: $[P = 2, m = -2, \rho = 3]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
60	$2^2 * 3 * 5$
312	$2^3 * 3 * 13$
1392	$2^4 * 3 * 29$
1950	$2 * 3 * 5^2 * 13$
5856	$2^5 * 3 * 61$
390912	$2^8 * 3 * 509$

表 33: $[P = 2, m = -4, \rho = 3]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
210	$2 * 3 * 5 * 7$
264	$2^3 * 3 * 11$
5664	$2^5 * 3 * 59$
12090	$2 * 3 * 5 * 13 * 31$
17490	$2 * 3 * 5 * 11 * 53$
96384	$2^7 * 3 * 251$

よって

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = q(q - m + 1) - m(k + 1). \quad (2)$$

これを乗数 k を持つサブ完全数の方程式第二形という. この解 a を乗数 k を持つ, 底 P , 平行移動 m の第二形のサブ完全数. 簡単に, 乗数 k を持つ第二形のサブ完全数という.

これを求める wxmaxima での program は次の通り.

表 34: $[P = 2, m = -6, \rho = 3]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
216	$2^3 * 3^3$
307116	$2^2 * 3^2 * 19 * 449$

表 35: $[P = 2, m = -8, \rho = 3]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
168	$2^3 * 3 * 7$
1104	$2^4 * 3 * 23$
2508	$2^2 * 3 * 11 * 19$
3348	$2^2 * 3^3 * 31$
33288	$2^3 * 3 * 19 * 73$
53448	$2^3 * 3 * 17 * 131$
136068	$2^2 * 3 * 17 * 23 * 29$
233232	$2^4 * 3 * 43 * 113$
274164	$2^2 * 3 * 11 * 31 * 67$
386304	$2^8 * 3 * 503$

表 36: $[P = 2, m = -12, \rho = 3]$ 乗数つきサブ完全数

a	素因数分解
912	$2^4 * 3 * 19$
1386	$2 * 3^2 * 7 * 11$
2790	$2 * 3^2 * 5 * 31$
3132	$2^2 * 3^3 * 29$
7182	$2 * 3^3 * 7 * 19$
15228	$2^2 * 3^4 * 47$
73692	$2^2 * 3^2 * 23 * 89$
89838	$2 * 3^2 * 7 * 23 * 31$
102942	$2 * 3^2 * 7 * 19 * 43$
303012	$2^2 * 3^2 * 19 * 443$
383232	$2^8 * 3 * 499$

```
subperfect_k_2(P,m,k,aa,bb):= for a:aa thru bb
do(q:maxpp(a),Y:(P-1)*divsum(a)-P*a-q*(q-m+1)+m*(k+1),
if Y=0 then display(factor(a)) else 1=1);
```

$P = 3, m = 3, k = 7$ のとき

$$2\sigma(a) - 3a = q(q - 2) - 24.$$

この解は次のとおり.

```
factor(231)=3*7*11
```

```
factor(1827)=3^2*7*29
```

```
factor(2275)=5^2*7*13
```

```
factor(15687)=3^3*7*83
```