書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第3期　予稿2; 乗数つき完全数

飯高 茂

2017 年 6 月 23 日

目 次

1　乗数付き完全数

そこで発想を変えて, 狭義の究極の完全数に戻ってあるべきサブ完全数を考えてみた.

狭義の究極の完全数とは, 与えられた素数 P と整数 m に対し $q = \sigma(P^e) + m$ が素数となる e をとり, $a = P^e q$ を (狭義の) 究極の完全数という.

これは方程式

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m\overline{P}$$

を満たす. これを満たす整数 a を (広義の) 究極の完全数という.

ここで, サブ完全数の場合を考慮して, 素数 k(P と異なる) を決めて, $a = kP^e q$ を (狭義の) 乗数付き究極の完全数という. 究極の完全数の k 倍は乗数付き究極の完全数なので, 定義はしたが例が無い, ということはない.

1.1　乗数付き完全数の方程式

最初に乗数付き究極の完全数の方程式を構成する.

$a = kP^e q$ $(k \neq P, q)$ に対して

$$\sigma(a) = \sigma(k)\sigma(P^e)\sigma(q) = (k+1)(q+1)\sigma(P^e)$$

になりさらに $\overline{P}\sigma(P^e) = P^{e+1} - 1$ なので上の式を $\overline{P}$ 倍する.

$\overline{P}(q-m) = P^{e+1} - 1$ は以下の式の変形で使われる.

$$\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(a) &= (k+1)(q+1)(P^{e+1}-1) \\
&= (k+1)(qP^{e+1} - q + P^{e+1} - 1) \\
&= (k+1)(qP^{e+1} - q - (q-m)\overline{P}) \\
&= (k+1)(qP^{e+1} + ((P-2)q - m\overline{P}) \\
&= (k+1)qP^{e+1} + (k+1)((P-2)q - m\overline{P}) \\
&= Pa + qP^{e+1} + (k+1)((P-2)q - m\overline{P}) \\
&= Pa + q(\overline{P}(q-m)+1) + (k+1)((P-2)q - m\overline{P})
\end{aligned}$$

かくして得られた方程式はいささか複雑であるが

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = q(\overline{P}(q-m)+1) + (k+1)((P-2)q - m\overline{P}). \tag{1}$$

ここで $q = \mathrm{Maxp}(a)$.

したがって簡単な場合を考える.

$P=2$ のとき

$$\sigma(a)-2a=q(q-m+1)-m(k+1). \tag{2}$$

2　例の計算

2.1　$[P=2,k=3,m=2]$ のとき

$[P=2,k=3,m=2]$ のとき方程式は

$$\sigma(a)-2a=q(q-1)-8.$$

$q=\mathrm{Maxp}(a)$.

乗数つき完全数の方程式の解の $(a\leq 10^6)$ 計算結果.

表 1: $[P=2,k=3,m=2]$ 乗数つき完全数

a	素因数分解
30	$2*3*5$
408	2^3*3*17
98688	$2^7*3*257$

$[P=2,m=2]$ 完全数の場合の数表とくらべる.

表 2: $[P=2,m=2]$ 完全数

a	素因数分解
10	$2*5$
136	2^3*17
32896	2^7*257

これらの解はみな正規形 2^eq でその因子 2^e と q の間に 3 が割り込んでいる.

そのために 正規形の数 2^eq,$(q=2^{e+1}+1)$ に 3 倍した $a=2^eq*3$ が方程式 $\sigma(a)-2a=q(q-1)-8$ の解になることを確認しよう.

$a=2^eq*3$ なので, $N=2^{e+1}-1$ とおくと $q-2=2^{e+1}-1=N$.

$\sigma(a)=4N(q+1), 2a=(N+1)3q, N-1=q-3$ により

$$\sigma(a)-2a=4N(q+1)-(N+1)3q=q(N-3)+4N=N(q+4)-3q.$$

$N(q+4)-3q=(q-2)(q+4)-3q=q^2-q-8$. ゆえに

$$\sigma(a)-2a=q^2-q-8$$

が確認できた.

これを次の形に一般化する. (小品であるが美しい結果)

命題 1 $a=2^e rq(2<r<q:$ 素数*)* が $\sigma(a)-2a=q(q-1)-8$ の解なら $q=N+2=2^{e+1}+1$ は素数. さらに $r=3$.

$N=2^{e+1}-1$ とおくと $2a=(N+1)rq$ なので

$$\sigma(a)-2a=N\widetilde{r}\widetilde{q}-(N+1)rq$$

$\sigma(a)-2a=q(q-1)-8$ により

$$N\widetilde{r}\widetilde{q}-(N+1)rq=q(q-1)-8.$$

$B=rq,\Delta=r+q$ とおくとき $\widetilde{r}\widetilde{q}=B+\Delta+1$ なので

$$N(\Delta+1)-B=q(q-1)-8.$$

$r_0=r-N,q_0=q-N,B_0=r_0q_0$ とおくとき

$$B_0=r_0q_0=rq-\Delta N+N^2=B-\Delta N+N^2.$$

そろえて

$$B=B_0+\Delta N-N^2.$$

$$N(\Delta+1)-B=q(q-1)-8,$$

に $B=r_0q_0+\Delta N-N^2$ を代入して

$$N\Delta+N-r_0q_0-\Delta N+N^2=q(q-1)-8.$$

$$N+N^2-q(q-1)+8=B_0.$$

$q=q_0+N$ により

$$q(q-1)=(q_0+N)(q_0+N-1)=q_0^2+q_0(2N-1)+N(N-1).$$

$$N + N^2 - q(q-1) + 8 = N + N^2 + 8 - (q_0^2 + q_0(2N-1) + N(N-1))$$

を整理して

$$2N - q_0^2 - 2q_0 N + q_0 + 8 = B_0 = r_0 q_0.$$

かくして次の式をえる.

$$2N + 8 = q_0(r_0 + q_0 + 2N - 1) = q_0(r + q_0 + N - 1) = q_0(r + q - 1).$$

$q_0 = q - N > 1$ かつ偶数.

i). $q_0 = 2$ のとき
このとき $q = N + 2 = 2^{e+1} + 1$ は素数. これはフェルマ素数.
$2N + 8 = 2(r + N + 1)$ によって $4 = r + 1; r = 3$.
$a = 2^e 3q$ となって求める解.

ii). $q_0 \geq 4$ のとき $q = q_0 + N > N + 1$
$2N + 8 \geq 4(r + 3 + N)$. これより $N + 4 \geq 2(r + 3 + N) > 2N$.　矛盾.

2.2 $[P=2,k=3,m=4]$ のとき

$$\sigma(a)-2a=q(q-m+1)-m(k+1)).$$

$[P=2,k=3,m=4]$ のとき方程式は

$$\sigma(a)-2a=q(q-3)-16.$$

$q=\mathrm{Maxp}(a)$ となっている.

表 3: $[P=2,k=3,m=4]$ 乗数つき完全数

a	素因数分解
15	$3*5$
42	$2*3*7$
132	2^2*3*11
198	$2*3^2*11$
456	2^3*3*19
832	2^6*13
1794	$2*3*13*23$
6432	2^5*3*67
25152	$2^6*3*131$

$[P=2,m=4]$ 完全数の場合の数表と比べる. 乗数つき完全数の場合にこの解の 3 倍になって生き延びるものを $*$ で表示

完全数 2^2*11 の間に 3 が割り込んで乗数つきの完全数 2^2*3*11 ができた.

しかし 乗数つきの完全数 $2*3^2*11$ がでてきた. これは不思議である. 不思議とまでは言わなくても説明がつかない.

$[P=2,m=4]$ 完全数の解である $2*5*11$ は正規形ではないからここから乗数つきの完全数がでて来なくても文句は言えない. $2^2*13*17$ などの非正規形の解も同じ事情であろう.

乗数つき完全数には正規形の解 2^6*13 と異なる 4 素数の積とかけている解 $1794=2*3*13*23$ もある. これはモンスターである.

表 4: $[P=2,m=4]$ 完全数

a	素因数分解	生き延びるもの
5	5	$*$
14	$2*7$	$*$
44	2^2*11	$*$
110	$2*5*11$	
152	2^3*19	$*$
884	$2^2*13*17$	
2144	2^5*67	$*$
8384	2^6*131	$*$
18632	$2^3*17*137$	
116624	$2^4*37*197$	

2.3 $[P=2,k=3,m=6]$ のとき

$$\sigma(a)-2a=q(q-m+1)-m(k+1)).$$

$[P=2,k=3,m=4]$ のとき方程式は

$$\sigma(a)-2a=q(q-5)-24.$$

$q=$Maxp(a) となっている.

表 5: $[P=2,k=3,m=6]$ 乗数つき完全数

a	素因数分解
21	$3*7$
156	2^2*3*13
1776	2^4*3*37
45885	$3*5*7*19*23$
315324	$2^2*3^2*19*461$

$[P=2,m=6]$ 完全数の正規形の解 2^2*13,2^4*37 に 3 の割り込みによって乗数つき完全数ができる.

2.4 $[P=2,m=6]$ 完全数

表 6: $[P=2, m=6]$ 完全数

a	素因数分解	生き延びるモノ
7	7	$*$
15	$3*5$	$*$
52	2^2*13	$*$
315	3^2*5*7	
592	2^4*37	$*$
1155	$3*5*7*11$	
2102272	$2^{10}*2053$	$*$

2.5 $[P=2, k=3, m=8]$ のとき

$$\sigma(a)-2a = q(q-m+1)-m(k+1)).$$

$[P=2, k=3, m=8]$ のとき方程式は

$$\sigma(a)-2a = q(q-7)-32.$$

表 7: $[P=2, k=3, m=8]$ 乗数つき完全数

a	素因数分解
66	$2*3*11$
552	2^3*3*23
6816	2^5*3*71
100992	$2^7*3*263$
316692	$2^2*3^2*19*463$
412390	$2*5*11*23*163$

2.6 $[P=2, m=8]$ 完全数

表 8: $[P=2, m=8]$ 完全数

a	素因数分解
22	$2*11$
130	$2*5*13$
184	2^3*23
1012	$2^2*11*23$
2272	2^5*71
18904	$2^3*17*139$
33664	2^7*263
70564	$2^2*13*23*59$
85936	$2^4*41*131$
100804	$2^2*11*29*79$

表 9: $[P=2, k=3, m=10]$ 乗数つき完全数

a	素因数分解
33	$3*11$
78	$2*3*13$
204	2^2*3*17
1968	2^4*3*41
7008	2^5*3*73
26304	$2^6*3*137$
400128	$2^8*3*521$

$a=21=3*7$ は因数 3 が乗数の 3 と干渉して消えた.

表 10: $[P=2, m=10]$ 完全数

a	素因数分解
11	11
21	$3*7$
26	$2*13$
68	2^2*17
656	2^4*41
2336	2^5*73
8768	2^6*137
133376	2^8*521
528896	2^9*1033

表 11: $[P=2, k=3, m=12]$ 乗数つき完全数

a	素因数分解
39	$3*13$
228	2^2*3*19
2064	2^4*3*43
26688	$2^6*3*139$
319428	$2^2*3^2*19*467$
379730	$2*5*13*23*127$
401664	$2^8*3*523$

$a=319428=2^2*3^2*19*467$, $a=379730=2*5*13*23*127$ はモンスターとしかいいようがない.

表 12: $[P=2, m=12]$ 完全数

a	素因数分解
13	13
45	3^2*5
76	2^2*19
688	2^4*43
8896	2^6*139
133888	2^8*523

表 13: $[P=2,k=3,m=14]$ 乗数つき完全数

a	素因数分解
102	$2*3*17$
231	$3*7*11$
696	2^3*3*29
103296	$2^7*3*269$
263704	$2^3*7*17*277$
1472835	$3*5*7*13^2*83$

$a=263704=2^3*7*17*277$,$a=1472835=3*5*7*13^2*83$ はモンスター

表 14: $[P=2,m=14]$ 完全数

a	素因数分解
27	3^3
34	$2*17$
232	2^3*29
34432	2^7*269

3　$m = 0$ の場合

この場合方程式は

$$\sigma(a) - 2a = q(q+1).$$

この式では k が出ていない. 実に不思議なことである.

3.1　$[P = 2, k = 3, m = 0]$ 乗数つき完全数の解

$P = 2, m = 0$ の場合は解が多い. 実際に $[P = 2, k = 3, m = 0]$ 乗数つき完全数の場合の計算結果は次の通り:

表 15: $[P = 2, k = 3, m = 0]$ 乗数つき完全数

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
54	$2 * 3^3$
84	$2^2 * 3 * 7$
140	$2^2 * 5 * 7$
224	$2^5 * 7$
1372	$2^2 * 7^3$
1488	$2^4 * 3 * 31$
2480	$2^4 * 5 * 31$
3472	$2^4 * 7 * 31$
5456	$2^4 * 11 * 31$
6448	$2^4 * 13 * 31$
8432	$2^4 * 17 * 31$
9424	$2^4 * 19 * 31$
11408	$2^4 * 23 * 31$
14384	$2^4 * 29 * 31$
15872	$2^9 * 31$
24384	$2^6 * 3 * 127$
40640	$2^6 * 5 * 127$
56896	$2^6 * 7 * 127$
89408	$2^6 * 11 * 127$

表 16: $[P = 2, k = 3, m = 0]$ 乗数つき完全数,2

a	素因数分解
105664	$2^6 * 13 * 127$
138176	$2^6 * 17 * 127$
154432	$2^6 * 19 * 127$
186944	$2^6 * 23 * 127$
235712	$2^6 * 29 * 127$
251968	$2^6 * 31 * 127$
300736	$2^6 * 37 * 127$
333248	$2^6 * 41 * 127$
349504	$2^6 * 43 * 127$
382016	$2^6 * 47 * 127$
430784	$2^6 * 53 * 127$
476656	$2^4 * 31^3$
479552	$2^6 * 59 * 127$
495808	$2^6 * 61 * 127$
544576	$2^6 * 67 * 127$

さらに $k=5$ の場合も多くの解がでるが意外にも $k=3$ の場合と全く同じであった.

本来は, 正規形の解 $2^e q$ (q:は最大素因子) の間に 3 をいれた解 $2^e 3q$ ができることを狙ったものであり, 確かに 2^2*3*7, 2^4*3*31 等の解が出ている.

最初の 2 個の解 2^3*3 , $2*3^3$ を伏字化してみると

2^e*q, 2^e*q^3 となりそうである.

3.2 A 型の解

$P=2, k=m=0$ のときの乗数つき完全数の方程式は

$$\sigma(a)=2a+q(q+1)$$

1. $a=2^e*q$ が解になるとする.

$\sigma(a)=(2^{e+1}-1)(q+1)=2^{e+1}q-(q+1)+2^{e+1}$ なので

$$\sigma(a)-2a=-(q+1)+2^{e+1}=q(q+1).$$

$$2^{e+1}=q(q+1)+q+1=(q+1)^2.$$

これより. $e+1=2\varepsilon$ とおくと ε は整数で,

$$2^{e+1}=q(q+1)+q+1=(q+1)^2.$$

$q=2^\varepsilon-1$ は素数なので, これはメルセンヌ素数である. $\alpha=2^{\varepsilon-2}q$ は完全数になり $a=2^e*q=2^\varepsilon\alpha$. これを A 型の解という.

例

$\varepsilon=2, e=3, q=3, a=4\alpha=24=4*6,$

$\varepsilon=3, e=5, q=7, a=8\alpha=224=8*28.$

表 17: A 型の解

a	素因数分解
24	2^3*3
224	2^5*7
15872	2^9*31

3.3 B 型の解

2. $a = 2^e * q^3$ が解になるとする.

$$q(q+1) = \sigma(a) - 2a = (2^{e+1} - 1)\frac{(q^4 - 1)}{q - 1} - 2^{e+1}q^3$$

によって,

$$(2^{e+1} - 1)(q^4 - 1) - 2^{e+1}q^3(q - 1) = q(q^2 - 1).$$

$$-q^4 + 1 - 2^{e+1} + 2^{e+1}q^3 = q(q^2 - 1).$$

これより

$$2^{e+1}(q^3 - 1) = q^4 - 1 + q(q^3 - 1) = (q + 1)(q^2 - 1).$$

したがって,

$$2^{e+1} = q + 1.$$

$q = 2^{e+1} - 1$ はメルセンヌ素数, $\alpha = 2^e q$:完全数.

$a = 2^e * q^3 = \alpha q^2$.

これを B 型の解という.

表 18: B 型の解

a	素因数分解
54	$2 * 3^3$
1372	$2^2 * 7^3$
476656	$2^4 * 31^3$

3.4 D 型の解

3. $a = 2^e rq, r < q$ が解になるとする.

$\sigma(a) = (2^{e+1} - 1)(r + 1)(q + 1)$ になり

$$\sigma(a) - 2a = (2^{e+1} - 1)(r + 1)(q + 1) - 2^{e+1}rq = q(q + 1).$$

$N = 2^{e+1} - 1$ とおくと

$$N(r + 1)(q + 1) - (N + 1)rq = q(q + 1).$$

これを整理して

$$N(r+1)(q+1)-(N+1)rq = N(r+q+1)-rq = q(q+1).$$

$N(r+q+1)=q(r+q+1)$ となるので $2^{e+1}-1=N=q$. q は素数 なので q はやはりメルセンヌ素数. $\alpha=2^e q$ は完全数で, $a=r\alpha$.

これを D 型の解という.

$\sigma(a)-2a=q(q+1)$ の解は,A,B,D 型の 3 種があり, きわめて統一的な解からなることがわかった. これ以外の解はたぶん無いだろうと思われるが証明ができていない.

表 19: D 型の解

a	素因数分解
84	$2^2 * 3 * 7$
140	$2^2 * 5 * 7$
1488	$2^4 * 3 * 31$
2480	$2^4 * 5 * 31$
3472	$2^4 * 7 * 31$
5456	$2^4 * 11 * 31$
6448	$2^4 * 13 * 31$
8432	$2^4 * 17 * 31$
9424	$2^4 * 19 * 31$
11408	$2^4 * 23 * 31$
14384	$2^4 * 29 * 31$
24384	$2^6 * 3 * 127$
40640	$2^6 * 5 * 127$
56896	$2^6 * 7 * 127$
89408	$2^6 * 11 * 127$
105664	$2^6 * 13 * 127$
138176	$2^6 * 17 * 127$
154432	$2^6 * 19 * 127$
186944	$2^6 * 23 * 127$
235712	$2^6 * 29 * 127$
251968	$2^6 * 31 * 127$
300736	$2^6 * 37 * 127$
333248	$2^6 * 41 * 127$
349504	$2^6 * 43 * 127$
382016	$2^6 * 47 * 127$
430784	$2^6 * 53 * 127$
479552	$2^6 * 59 * 127$
495808	$2^6 * 61 * 127$
544576	$2^6 * 67 * 127$

4　$P = 3$ 乗数つき完全数

4.1　$[P = 3, m = 0]$ 乗数つき完全数

表 20: $[P = 3, m = 0, k = 5]$ 乗数つき完全数

a	素因数分解
585	$3^2 * 5 * 13$
23275	$5^2 * 7^2 * 19$

表 21: $[P = 3, m = 0]$ 完全数

a	素因数分解
4	2^2
117	$3^2 * 13$

4.2 $[P = 3, m = 0]$ 乗数つき完全数, 諸例

表 22: $[P = 3, m = 0, k = 5]$ 乗数つき完全数

a	素因数分解
5	5
765	$3^2 * 5 * 17$

表 23: $[P = 3, m = 4]$ 完全数

a	素因数分解
5	5
153	$3^2 * 17$
27639	$3^2 * 37 * 83$
51417	$3^2 * 29 * 197$

5　乗数つき完全数, 第二形

乗数付き究極の完全数の方程式を構成するときもっと簡単なやり方がある.

$a = kP^e q$ $(k \neq P, q)$ に対して

$$\sigma(a) = \sigma(k)\sigma(P^e)\sigma(q) = (k+1)(q+1)\sigma(P^e)$$

になりさらに $\overline{P}\sigma(P^e) = P^{e+1} - 1$ なので上の式を $\overline{P}$ 倍する.

$\overline{P}(q-m) = P^{e+1} - 1$ によって,

$$\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(a) &= (k+1)(q+1)(P^{e+1}-1) \\
&= (k+1)(qP^{e+1} - q + \overline{P}(q-m)) \\
&= (k+1)(qP^{e+1} - q + \overline{P}q - \overline{P}m) \\
&= (k+1)(qP^{e+1} + (P-2)q - \overline{P}m) \\
&= kqP^{e+1} + qP^{e+1} + (k+1)((P-2)q - \overline{P}m) \\
&= Pa + \frac{Pa}{k} + (k+1)((P-2)q - \overline{P}m).
\end{aligned}$$

かくして得られた

$$\overline{P}\sigma(a) = Pa + \frac{Pa}{k} + (k+1)((P-2)q - \overline{P}m)$$

を k 倍して

$$k\overline{P}\sigma(a) = (k+1)Pa + k(k+1)((P-2)q - \overline{P}m)$$

をえる. この方程式はいささか複雑であるが $q = \mathrm{Maxp}(a)$　を用いて

$$k\overline{P}\sigma(a) = (k+1)Pa + k(k+1)((P-2)\mathrm{Maxp}(a) - \overline{P}m) \tag{3}$$

を乗数付き究極の完全数の第二形または alternate という.

$P=2$ のときは

$$k\sigma(a)=2(k+1)a-mk(k+1). \tag{4}$$

$m=0$ のとき

$$k\sigma(a)=2(k+1)a. \tag{5}$$

$k=2$ は使えないので $k=3$ とすると

$$3\sigma(a)=8a.$$

表 24: $[P=2,m=0,k=3]$ 乗数つき完全数、第二形

a	素因数分解
84	2^2*3*7
270	$2*3^3*5$
1488	2^4*3*31
1638	$2*3^2*7*13$
24384	$2^6*3*127$

$k=5$ とすると

$$5\sigma(a)=12a.$$

表 25: $[P=2,m=0,k=5]$ 乗数つき完全数、第二形

a	素因数分解
30	$2*3*5$
140	2^2*5*7
2480	2^4*5*31
6200	2^3*5^2*31
40640	$2^6*5*127$

$m = 2, k = 3$ のとき

表 26: $[P = 2, m = 2, k = 3]$ 乗数つき完全数、第二形

a	素因数分解
30	$2 * 3 * 5$
108	$2^2 * 3^3$
408	$2^3 * 3 * 17$
98688	$2^7 * 3 * 257$
312588	$2^2 * 3^2 * 19 * 457$

$m = 2, k = 5$ のとき

表 27: $[P = 2, m = 2, k = 5]$ 乗数つき完全数、第二形

a	素因数分解
15	$3 * 5$
680	$2^3 * 5 * 17$
164480	$2^7 * 5 * 257$

$P = 2, m = 1$ のとき

$$k\sigma(a) = 2(k+1)a - k(k+1).$$

$k = 3$ ならば

$$3\sigma(a) = 8a - 12.$$

表 28: $[P = 2, m = 1, k = 3]$ 乗数つき完全数、第二形

a	素因数分解
3	3
6	$2 * 3$
12	$2^2 * 3$
24	$2^3 * 3$
48	$2^4 * 3$
96	$2^5 * 3$
192	$2^6 * 3$
384	$2^7 * 3$
684	$2^2 * 3^2 * 19$
768	$2^8 * 3$
1536	$2^9 * 3$
3072	$2^{10} * 3$
6144	$2^{11} * 3$
12288	$2^{12} * 3$
24576	$2^{13} * 3$
49152	$2^{14} * 3$
98304	$2^{15} * 3$
196608	$2^{16} * 3$
393216	$2^{17} * 3$
786432	$2^{18} * 3$

一般形は $2^e p$ なのだが, $a = 3$ は許すとして掟て破りの $a = 684 = 2^2 * 3^2 * 19$ が出てきた.