書泉グランデ
高校生もわかる新しい数論研究
第3期　予稿2 ; 多重完全数と劣完全数

飯高 茂

2017 年 5 月 26 日

1　多重完全数

ユークリッドの完全数は $\sigma(a) = 2a$ を満たす数として定義される. $2a$ の代わりに $3a$ にしたらどうなるか? という疑問は昔から提起されてきた.

1.1　120 の特徴付け (伏字問題)

たとえば $a = 120$ は $\sigma(a) = 3a$ を満たす. 実際,

$$a = 120 = 2^3 * 3 * 5, \sigma(a) = (2^4 - 1) * 4 * 6 = 3 * 5 * 4 * 6 = 3a.$$

120 の特徴付けをしてみよう.

120 の の素因数分解の型にならって $a = P^e rq(P < r < q$:素数, とし $\sigma(a) = 3a$ を満たすとき a を求める. このような問いを伏字問題という.

定理 1 $a = P^e rq(P < r < q$:素数$)$ が $\sigma(a) = 3a$ を満たすとき $P = 2, a = 120$ と $a = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$ になる.

Proof.

(1) $P = 2$ のとき.

$N = 2^{e+1} - 1, \widetilde{q} = q + 1, \widetilde{r} = r + 1$ を使うと

$$\sigma(a) = N\widetilde{qr}, 3a = 3 \times 2^e qr$$

$\sigma(a) = 3a$ によれば, $N\widetilde{qr} = 3 \times 2^e qr$. 2 倍して

$$2N\widetilde{q}\widetilde{r} = 3 \times 2^{e+1}qr = 3(N+1)qr.$$

$A = \widetilde{q}\widetilde{r}, B = qr, \Delta = q + r$ を用いて $A = B + \Delta + 1$ に留意すると,

$$2NA = 3(N+1)B, 2NA = 2N(B + \Delta + 1).$$

これより,

$$2N(\Delta + 1) = (N+3)B.$$

$2 > \frac{2N}{N+3} = \frac{B}{1+\Delta}$ によって

$$2(1+\Delta) > B.$$

$q_0 = q - 2, r_0 = r - 2$ とおけば $q_0r_0 = B - 2\Delta + 4$.

$$2(1+\Delta) > B = q_0r_0 + 2\Delta - 4.$$

これより, $6 > q_0r_0$.

$r_0 \geq 2$ なら,$r_0 \geq 3$. したがって, $6 > q_0r_0 \geq 3q_0$. これは矛盾.

$r_0 = 1$ になる. そこで $r = 3, q_0 = q - 2 \leq 5$.

$q_0 = 5$ のとき, $q = 7, B = 21, \Delta = 10$.

$\dfrac{2N}{N+3} = \dfrac{B}{1+\Delta} = \dfrac{21}{11}$ によれば $22N = 21N + 63$.

これより $N = 63.2^{e+1} - 1 = N = 63$. したがって, $2^{e+1} = 64 = 2^6$. よって, $e = 5, r = 3, q = 7$. ゆえに $a = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$.

$q_0 = 3$ のとき, $q = 5, B = 15, \Delta = 8$.

$\dfrac{2N}{N+3} = \dfrac{B}{1+\Delta} = \dfrac{5}{3}$ によれば $6N = 5N + 15$.

よって $2^{e+1} - 1 = N = 15$ によれば $2^{e+1} = 16 = 2^4$. $e = 3, r = 3, q = 5$. したがって, $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

(2) $P \geq 3$. このとき矛盾を導く.

$a = P^erq$ とおいて $N = P^{e+1} - 1, \widetilde{q} = q + 1, \widetilde{r} = r + 1$ を使うと

$$\overline{P}\sigma(a) = N\widetilde{q}\widetilde{r} = 3\overline{P} \times P^eqr$$

P 倍して

$$PN\widetilde{q}\widetilde{r} = 3\overline{P}P^{e+1}qr = 3\overline{P}(N+1)qr$$

$A=\widetilde{qr}, B=qr, \Delta=q+r$ を用いて $A=B+\Delta+1$ に留意すると,

$$PNA=3\overline{P}(N+1)B.$$

$$1+\frac{1+\Delta}{B}=\frac{A}{B}=\frac{3\overline{P}(N+1)}{PN}.$$

よって,

$$1>\frac{1+\Delta}{B}=\frac{3\overline{P}(N+1)}{PN}-1=\frac{3\overline{P}(N+1)-PN}{PN}.$$

式を変形して

$$PN>3\overline{P}(N+1)-PN.$$

ゆえに

$$2PN>3(PN+P-N-1)=3PN+3P-3N-3.$$

P でまとめると $P\geq 3$　なので

$$3N+3>P(N+3)\geq 3N+3.$$

めでたく矛盾した.

これは小品. しかし絶品.

1.2　多重完全数のクラス

一般に $\sigma(a)=ka$ を満たす数を $k-$ 完全数 (k を abundancy または class と呼ぶ) といい, これらを総称して多重完全数 (multiply perfect numbers), または倍積完全数という. 興味ある例が次第に知られるようになったが完全数の場合のオイラーの定理のような美しい結果はない. 完全数と比べると多重完全数の研究にはさらなる困難があるようだ.

この場合は 6 個しかないという予想がある.

奇数完全数 n が仮にあったとして $a=2n$ とおく.

$$\sigma(a)=\sigma(2)\sigma(n)=3\times 2n=6n=3a$$

したがって, a はクラス 3 の多重完全数なのである. 奇数完全数 n の非存在は確定していないがあれば $n>10^{1500}$ という結果があるそうだ.

ここでデカルトが出てきた.

表 1: $[P=2,k=3]$ 多重完全数 (Wolfram MathWorld より)

a	素因数分解
120	2^3*3*5
672	2^5*3*7
523776	$2^9*3*11*31$
459818240	$2^8*5*7*19*37*73$
1476304896	$2^{13}*3*11*43*127$
51001180160	$2^{14}*5*7*19*31*151$

表 2: $[P=2,k=4]$ 多重完全数 ,36 個発見された

a	素因数分解
30240	2^5*3^3*5*7 (デカルト 1638)
32760	$2^3*3^2*5*7*13$
2178540	$2^2*3^2*5*7^2*13*19$
23569920	$2^9*3^3*5*11*31$

表 3: $[P=2,k=5]$ 多重完全数, 65 個発見された

a	素因数分解
14182439040	$2^7*3^4*5*7*11^2*17*19$ (デカルト 1638)
31998395520	$2^7*3^5*5*7^2*13*17*19$

表 4: $[P=2,k=6]$ 多重完全数 ,(カーマイケル 1907)

a	素因数分解
154345556085770649600	$2^{15}*3^5*5^2*7^2*11*13*17*19*31*43*257$

完全数の一般化と同じ考えで, きわめて安易であるが底の素数 P を固定して $(P-1)\sigma(a)=ka$ を満たす数を 底 P の場合の $k-$ 完全数という.

これだけかどうかわからないが少しでもわかればいい.

$2\sigma(a)=5a$ を満たす a を決めたい. これは偶数なので, $a=2^eL, L:$ 奇数, と表す.$N=2^{e+1}-1$ を用いると $\sigma(a)=N\sigma(L)$. $5a=5(N+1)L/2$ によって,

表 5: $[P=3, k=5]$ 多重完全数 $(2\sigma(a)=5a)$

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$

$$4N\sigma(L)=5(N+1)L.$$

$N(4\sigma(L)-5L)=5L$ をえるがここで手詰まり.
L : 素数を仮定する.
$N(4(L+1)-5L)=5L$ になり $L=\frac{4N}{5+N}<4$.
L : 奇素数なので, $L=3, N=15. e=3$ となって, $a=24=2^3*3$.

表 6: $[P=3, k=7]$ 多重完全数 $2\sigma(a)=7a$

a	素因数分解
30240	$2^5 * 3^3 * 5 * 7$
32760	$2^3 * 3^2 * 5 * 7 * 13$
2178540	$2^2 * 3^2 * 5 * 7^2 * 13 * 19$

やはり多重完全数の素因子は小さい.
$[P=3, k=11,13,17]$ のとき $a<3\times 10^6$ の範囲で解がない.

2 劣完全数

ユークリッドの完全数の定義は次のとおり.
$p=2^{e+1}-1$ が偶数のとき $a=2^e p$ をユークリッドの完全数という.

m だけ平行移動した場合も考える.
$p=2^{e+1}-1+m$ が素数のとき $a=2^e p$ を m だけ平行移動したユークリッドの完全数という.
$\sigma(a)$ で自然数 a の約数の和を示す.
a が m だけ平行移動したユークリッドの完全数のとき $\sigma(a)=2a-m$ を満たす. 与えられた m　について $\sigma(a)=2a-m$ を満たす a がどのくらいあるかを調べることは非常に困難な課題である. $m=0$ の場合が完全数の決定問題で現代数学では解決できないと思われる.

ここで $p=2^{e+1}-1+m$ の 2 を奇素数 P に変更し $q=P^{e+1}-1+m$ が素数のとき $a=P^eq$ を底 P, 平行移動 m の狭義の劣完全数 (subperfect number) といい, このときの q をサブ素数 (subprime number) という.

ここで劣完全数の満たす方程式の導入を行う. $\overline{P}=P-1$ という記号は今後もよく使う.

劣完全数 $a=P^eq$ について

$$\overline{P}\sigma(a)=\overline{P}\sigma(P^eq)=(P^{e+1}-1)(q+1)$$

$N=P^{e+1}-1$ とおくと, $\overline{P}\sigma(a)=N(q+1)=Nq+N$ になるが $Nq+N=P^{e+1}q-q+N=Pa-q+N$, $q+N=m$ なので

$$\overline{P}\sigma(a)=Pa-m.$$

究極の完全数の場合の方程式に比べて簡明な式になった. この方程式の解を底 P, 平行移動 m の広義の劣完全数 (subperfect number with translation parameter m) というのである.

広義の劣完全数を簡単に劣完全数という.

$P>2$ なら, $m=0$ のとき $q=P^{e+1}-1+m$ は素数にならない. しかし, 例外が 1 つだけある. $e=0, P=3$ のとき,$q=2$ は素数で $a=2$ となる.

m によっては $P^{e+1}-1+m$ は素数になりうるのでこのように劣完全数を定義しても一向構わないである.

たいてい $q=P^{e+1}-1+m$ は素数にならないという難点を克服するために $P^{e+1}-1$ の代わりに $\sigma(P^e)$ を使うこともできる. $q=\sigma(P^e)-1+m$ が素数のとき $a=P^eq$ を考えればよく, これを究極の完全数という.

劣完全数の研究は現在進行中であり, 興味ある結果が多数得られている.

次の結果は小学校算数のようなものだが私は知らなかった. オイラーが使ったらしい.

補題 1 *a,b,c,d が自然数で, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ が成り立つ. $\dfrac{a}{b}$ が既約分数なら, 自然数 k があり $c=ka.d=kb$ となる.*

Proof.

$da=bc$, $\mathrm{GCD}(a,b)=1$ かつ $a|bc$ より $a|c$. ゆえに $c=ka$. これから $d=kb$.

3 $P\geq 3$, 平行移動 $m=0$ の劣完全数

狭義の劣完全数の場合は, $q=P^{e+1}-1+m$ が素数なので, $P\geq 3$ であれば, m : 奇数になる.

広義の劣完全数ではあえて, m : 偶数でも考える. とくに $m=0$ の場合は興味があり, 次の結果が得られている.

命題 1 $P \geq 3$, 平行移動 $m=0$ の広義の劣完全数は $P=3$ の場合の $a=2$.

Proof.
$m=0$ なので $\overline{P}\sigma(a)=Pa$ により

$$\frac{\overline{P}}{P}=\frac{a}{\sigma(a)}.$$

$\dfrac{\overline{P}}{P}$ は既約分数なので, 自然数 k があり $a=k\overline{P}, \sigma(a)=kP$ となる.

$$\sigma(a)=kP=k(\overline{P}+1)=k\overline{P}+k=a+k.$$

$\mathrm{co}\sigma(a)=\sigma(a)-a$ を使うと $\mathrm{co}\sigma(a)=k$ かつ k は a の約数なので, $k=1, a$ は素数.

なぜなら, $k>1$ とすると, これらは a と異なる約数なので $\mathrm{co}\sigma(a) \geq 1+k$. これは $\mathrm{co}\sigma(a)=k$ に矛盾する.

$\mathrm{co}\sigma(a)=1$ になり, a は素数 $a=k\overline{P}$ は素数なので, $k=1, \overline{P}=2$. よって $P=3, a=2$.

水谷一氏の指摘により, 元の証明よりはるかに簡易化できた.
(この証明は オイラーが行った, 偶数完全数はユークリッドの完全数の証明と類似している)

4 $P \geq 3$, 平行移動 $m=P-1$ の劣完全数

命題 2 $P \geq 3$, 平行移動 $m=\overline{P}$ の劣完全数は存在しない.

Proof.
$\overline{P}\sigma(a)-Pa=-\overline{P}$ によって, $\overline{P}(\sigma(a)+1)=Pa$ になるので,

$$\frac{\overline{P}}{P}=\frac{a}{\sigma(a)+1}.$$

$\dfrac{\overline{P}}{P}$ は既約分数なので, 自然数 k があり $a=k\overline{P}, \sigma(a)+1=kP$ となる.

$$\sigma(a)+1=kP=k(\overline{P}+1)=k\overline{P}+k=a+k.$$

よって,

$$\sigma(a) - a = co\sigma(a) = k - 1.$$

k は a の約数なので $k - 1 = \sigma(a) - a \geq k$. これは矛盾.

この論法によれば,$m = \nu\overline{P}, \nu > 0$ の場合は劣完全数が存在しないことがわかる.

注意 $P = 2$ のとき,$m = -1$ だけ平行移動した場合の方程式は $\sigma(a) = 2a + 1$ になる.　この場合は解が存在しないと思われているが今でも証明できない. しかし劣完全数の場合は $\overline{P}(\sigma(a) + 1) = Pa$　の解の不存在が簡単に証明できたのである.

5 $P \geq 3$, 平行移動 $m = -\overline{P}$ の劣完全数

$\sigma(a) - a$ を $\mathrm{co}\sigma(a)$ と書きユークリッド余関数という.

定理 2 $P \geq 3$, 平行移動 $m = -\overline{P}$ の劣完全数は $P = 3, a = 2^2$.

Proof.
$\overline{P}\sigma(a) - Pa = \overline{P}$ によって, $\overline{P}(\sigma(a) - 1) = Pa$ になるので,

$$\frac{\overline{P}}{P} = \frac{a}{\sigma(a) - 1}.$$

$\dfrac{\overline{P}}{P}$ は既約分数なので, 自然数 k があり $a = k\overline{P}, \sigma(a) - 1 = kP$ となる.

$$\sigma(a) - 1 = kP = k(\overline{P} + 1) = k\overline{P} + k = a + k.$$

よって,

$$co\sigma(a) = \sigma(a) - a = k + 1.$$

$a = k\overline{P}$ に注目し場合を分ける.

1) $k = 1$. $\sigma(a) - a = 2$.
ユークリッド余関数 $co\sigma(a) = \sigma(a) - a$ の値は 2 にならないことが知られているから矛盾.

2) $k > 1$. $k \neq \overline{P}$.
$k, \overline{P}, 1$ は a の真の約数なので

$$\sigma(a) - a = k + 1 \geq k + \overline{P} + 1$$

. これは矛盾.

3) $k > 1$. $k = \overline{P}$.
$a = k^2$ なので $\sigma(a) = k^2 + k + 1$. このとき k は素数. $k = \overline{P}$ も素数なので, $P = 3, a = k^2 = 4$.

6 $P = 3$,m は 偶数の場合

$P = 3$ とする.
$2\sigma(a) - 3a = -m$ になる. m : 偶数の場合 $m \leq -40$ の範囲についてコンピュータで出力してできた結果は次の通り.

```
"m="-40
factor(52)=2^2*13
```

これを $m=-40$ のときは解が 52 でその素因数分解は 2^2*13 と読む. 以下も同じ.

```
"m="-38
"m="-36
factor(44)=2^2*11
factor(50)=2*5^2
"m="-34
"m="-32
"m="-30
factor(32)=2^5
"m="-28
factor(28)=2^2*7
"m="-26
"m="-24
factor(18)=2*3^2
factor(20)=2^2*5
"m="-22
"m="-20
factor(12)=2^2*3
"m="-18
"m="-16
"m="-14
factor(16)=2^4
"m="-12
"m="-10
```

```
"m="-6
factor(6)=2*3
factor(8)=2^3
factor(10)=2*5
factor(14)=2*7
factor(22)=2*11
factor(26)=2*13
factor(34)=2*17
```

$m=-6$ のとき $a=2p$. $p>$: 素数,$a=2^3$ の解が出てくる.
$\sigma(2p)=3p+3$ なので $2\sigma(a)-3a=6p+6-6p=6$.
これはいわゆる通常解で,B 型の解ともいう.

7　$P=3$, B 型の解

$a=2p$ のとき

$\sigma(2p)=3p+3$ なので $2\sigma(a)-3a=6p+6-6p=6$.

そこで $2\sigma(a)-3a=6$ を満たす解 a を求める.

$a=2p.$ $p>$: 素数, の解が出てくる.

$a=2p$ は通常解で,B 型の解である.

しかし, $2\sigma(a)-3a=6$ の解として $a=2^3=8$ もある. (擬素数解という)

Proof.

$2\sigma(a)-3a=6$

$2(\sigma(a)-3)=3a$ を変形して

$$\frac{2}{3}=\frac{a}{(\sigma(a)-3}$$

$\frac{2}{3}$ は既約なので, k があり $a=2k, \sigma(a)-3=3k=a+k$ 　を満たす. ゆえに $\sigma(a)-a=3+k$.

1) k : 奇数なら,$k>1$. $a=2k$ の約数は 少なくとも $1,2,k,2k$. $\sigma(a)-a\geq 1+2+k$. ここで等号が成り立つので, $a=2k$ の約数は $1,2,k,2k$ に限る. よって k :素数

2) k : 偶数なら,$k=2^\varepsilon L, L$: 奇数.

$L\neq 1$ なら, L は $1,2,k,2k$ 以外の k の約数. 矛盾.

$L=1$ なら, $a=2k=2^{\varepsilon+1}$. この約数の個数は $2+\varepsilon$.

$2+\varepsilon=4$ より $\varepsilon=2$, $k=4, a=8$

したがって, $a=2p, a=8$.

8　一般の B 型の解

$2\sigma(a)-3a=6$ の 2 は素数なのでこれを一般にして Q を素数とし

パラメータ m をとり $Q\sigma(a)-(Q+1)a=m$ の解として $a=Qp(Q\neq q)$ があると仮定する.

$\sigma(a)=(Q+1)p+Q+1$ 　なので

$$Q\sigma(a)=(Q+1)Qp+Q(Q+1)=(Q+1)a+Q(Q+1).$$

そこで, $m=Q(Q+1)$ とおけば

$$Q\sigma(\alpha)=(Q+1)\alpha+m$$

の解として, $a = Qp(Q \neq q)$ がでてくる.

$Q = 3, Q = 5$ の計算結果は簡単なものであった.

$Q = 3$ のとき

```
factor(6)=2*3
factor(15)=3*5
factor(21)=3*7
factor(27)=3^3
factor(33)=3*11
factor(39)=3*13
factor(51)=3*17
```

$Q = 5$ のとき

```
factor(10)=2*5
factor(15)=3*5
factor(35)=5*7
factor(55)=5*11
factor(65)=5*13
factor(85)=5*17
factor(95)=5*19
factor(115)=5*23
factor(125)=5^3
factor(145)=5*29
```

$Q\sigma(\alpha) = (Q+1)\alpha + m$ は劣完全数の方程式ではない. 変形劣完全数とでもいうしかない. 次の結果が成り立つ.

定理 3 Q が素数のとき

$$Q\sigma(\alpha) = (Q+1)\alpha + Q(Q+1)$$

の解は $a = Qp(Q \neq p)$ または $a = Q^3$.

9　$P \geq 3$, 平行移動 $m = -\mu\overline{P}$ の劣完全数

$P \geq 3$, 平行移動 $m = -\mu\overline{P}$ の劣完全数を調べる.
$\overline{P}\sigma(a) - Pa = \mu\overline{P}$ によって, $\overline{P}(\sigma(a) - \mu) = Pa$ になるので,

$$\frac{\overline{P}}{P} = \frac{a}{\sigma(a) - \mu}.$$

$\dfrac{\overline{P}}{P}$ は既約分数なので, 自然数 k があり $a = k\overline{P}, \sigma(a) - \mu = kP$ となる.

$$\sigma(a) - \mu = kP = k(\overline{P} + 1) = k\overline{P} + k = a + k.$$

よって, $\sigma(a) - a = k + \mu$.
次に $a = k\overline{P}$ であり $\mu = \sigma(a) - a - k$ によって, $\mu < 50$ に限って, a を数え上げる.

10　ユークリッドの余関数の評価

$\mathrm{co}\sigma(a) = \sigma(a) - a$ はユークリッドの余関数の定義式である. これの評価式を作らないと劣完全数の決定問題が解けない.
q は素数 とする.
$a = q^j$ のとき $\mathrm{co}\sigma(q^j) = \sigma(q^j) - q^j = \frac{q^{j+1}-1}{\overline{q}} - q^j = \frac{q^j - 1}{\overline{q}} = \sigma(q^{j-1})$.
よって, $\mathrm{co}\sigma(q^j) = \sigma(q^{j-1})$.
次に q は素数で $a = q^j\alpha, \alpha$ は q で割れないとする.

定理 4 $a = q^j\alpha, (j \geq 1, \alpha > 1, q \not| \alpha)$ のとき
$co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \alpha\sigma(q^{j-1})$.
$co\sigma(q^j\alpha) \geq \sigma(q^j) + \alpha\sigma(q^{j-1})$.
$co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j) + \alpha\sigma(q^{j-1})$ なら α は素数.

Proof.
$\sigma(q^j\alpha) = \dfrac{(q^{j+1} - 1)\sigma(\alpha)}{\overline{q}}$ なので

$$
\begin{aligned}
co\sigma(q^j\alpha) &= \sigma(q^j\alpha) - q^j\alpha \\
&= \frac{(q^{j+1}-1)\sigma(\alpha) - q^j\alpha(q-1)}{\overline{q}} \\
&= \frac{(q^{j+1}-1)(co\sigma(\alpha)+\alpha) - q^j\alpha(q-1)}{\overline{q}} \\
&= \frac{(q^{j+1}-1)co\sigma(\alpha) + (q^j-1)\alpha)}{\overline{q}} \\
&= \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(q^{j-1})\alpha
\end{aligned}
$$

以上によって,

$$co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(q^{j-1})\alpha.$$

$A = \sigma(q^j) + \sigma(q^{j-1})\alpha$ とおくとき

$$
\begin{aligned}
co\sigma(q^j\alpha) - A &= \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(q^{j-1})\alpha - A \\
&= \sigma(q^j)(co\sigma(\alpha) - 1) \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

$co\sigma(q^j\alpha) = A$ が成り立つなら,$co\sigma(\alpha) - 1 = 0$. このとき α が素数となる.

これは次の結果の類似である.(今は使わない)
(小室慶太が研究したオイラー余関数の基本公式).

定理 5 $a = q^j\alpha, (\alpha > 1, q \nmid \alpha)$ のとき

$$co\varphi(q^j\alpha) = q^{j-1}(\alpha + \overline{q}co\varphi(\alpha))$$

$$co\varphi(q^j\alpha) \geq q^{j-1}(\alpha + \overline{q}).$$

$co\varphi(q^j\alpha) = q^{j-1}(\alpha + \overline{q})$ なら α は素数.

Proof.
$co\varphi(\alpha) = \alpha - \varphi(\alpha)$ により $-\varphi(\alpha)$ を $co\varphi(\alpha) - \alpha$　で置き換える.

$$
\begin{aligned}
co\varphi(q^j\alpha) &= q^j\alpha - \varphi(q^j\alpha) \\
&= q^j\alpha - \overline{q}q^{j-1}\varphi(\alpha) \\
&= q^{j-1}(q\alpha + \overline{q}(co\varphi(\alpha) - \alpha))) \\
&= q^{j-1}(\alpha + \overline{q}co\varphi(\alpha))
\end{aligned}
$$

よって,

$$co\varphi(q^j\alpha) = q^{j-1}(\alpha + \overline{q}co\varphi(\alpha)) \geq q^{j-1}(\alpha + \overline{q}).$$

$B = q^{j-1}(\alpha + \overline{q})$ とおき

$$co\varphi(q^j\alpha) - B = q^{j-1}(q-1)(co\varphi(\alpha) - 1) \geq 0.$$

$$co\varphi(q^j\alpha) \geq B = q^{j-1}(\alpha + \overline{q}).$$

$co\varphi(q^j\alpha) = q^{j-1}(\alpha + \overline{q})$ なら $co\varphi(\alpha) - 1 = 0$. よって, α は素数.

$\mathrm{co}\sigma(q^j) = \sigma(q^{j-1})$ が成り立つ. co $\varphi(q^j) = q^{j-1}$ も便利な公式である.

次の公式を見比べてみよう.

$$co\varphi(q^j\alpha) = q^{j-1}\overline{q}co\varphi(\alpha)) + \alpha q^{j-1},$$

$$co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j)\mathrm{co}\sigma(\alpha) + \alpha\sigma(q^{j-1}),$$

かなり類似性の高い公式とみてもよい.

11　$m = \mu\overline{P}$ の場合

$a = k\overline{P}$ であり $\mu = \sigma(a) - a - k$ によって, $\mu < 50$ に限って, a を数え上げる.
P は奇素数なので, a は偶数.
形が簡単な場合から考える.

1) $a = p^j, j > 0$ のとき. a は偶数なので, $a = 2^j$.
$\mathrm{co}\sigma(2^j) = \sigma(2^{j-1}) = 2^j - 1$ なので,

$$\mu = co\sigma(a) - k = 2^j - 1 - k$$

$\overline{P} = 2K$ と書くとき, $a = 2kK$.

ここで議論を簡単にするため, $K = 1, 2$ と限定する. とりあえず, $P = 3$. すなわち $K = 1$ とする.

$k = 2^{j-1}$ なので

$$\mu = co\sigma(a) - k = 2^j - 1 - k = 2^j - 2^{j-1} = 2^{j-1} - 1.$$

次の数表ができた.

表 7: $k = 2^j, a = 2k$; μ の決定

a	j	2^j	μ	m
4	1	2	3	-6
8	2	4	7	-14
16	3	8	15	-30
32	4	16	31	-62
64	5	32	63	-126
128	6	64	127	-254

1) $a = 2^j\alpha, j > 0$ のとき.
$a = 2kK$ だが $K = 1$ (すなわち $P = 3$) を仮定する.$k = 2^{j-1}\alpha$ となる.
公式を

$$co\sigma(q^j\alpha) = \sigma(q^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(q^{j-1})\alpha$$

$q = 2$ として使う.

$$co\sigma(2^j\alpha) = \sigma(2^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(2^{j-1})\alpha.$$

$$\mu = co\sigma(a) - k = \sigma(2^j)co\sigma(\alpha) + \sigma(2^{j-1})\alpha - 2^{j-1}\alpha$$

$\sigma(2^{j-1})\alpha - 2^{j-1}\alpha = (2^j - 1)\alpha - 2^{j-1}\alpha = (2^{j-1} - 1)\alpha$ なので次の計算式ができた.

$$\mu = (2^{j+1} - 1)co\sigma(\alpha) + (2^{j-1} - 1)\alpha.$$

これが μ を与える公式である.
α が素数なら

$$\mu = (2^{j+1} - 1) + (2^{j-1} - 1)\alpha.$$

$j = 0$ のとき $a = 2\alpha$ であり, 公式は

$$\mu = 3co\sigma(\alpha).$$

表 8: $a = 2\alpha, \mu = 3co\sigma(\alpha)$, μ の決定

a	α	k	$co\sigma(\alpha)$	μ	m
6	3	3	1	3	-6
18	9	9	4	12	-24
10	5	5	1	3	-6
30	15	15	9	27	-54
50	25	25	6	18	-36
14	7	7	1	3	-6
42	21	21	11	33	-66
22	11	11	1	3	-6
26	13	13	1	3	-6
34	17	17	1	3	-6
54	27	27	13	39	-78
66	33	33	15	45	-90

$j = 1$ のとき公式は

$$\mu = 7co\sigma(\alpha) + \alpha.$$

表 9: $a = 4\alpha, 7co\sigma(\alpha) + \alpha$, μ の決定

a	α	k	$co\sigma(\alpha)$	μ	m
6	3	8	1	10	-20
18	9	9	4	37	-74
10	5	5	1	12	-24
30	15	15	9	78	-156
50	25	25	6	67	-134
14	7	7	1	14	-28
42	21	21	11	98	-196
22	11	11	1	18	-36
26	13	13	1	20	-40
34	17	17	1	24	-48
54	27	27	13	118	-236
66	33	33	15	138	-276

$j=2$ のとき公式は

$$\mu = 15co\sigma(\alpha) + 3\alpha.$$

表 10: $a = 8\alpha, \mu = 15co\sigma(\alpha) + 3\alpha$, μ の決定

a	α	k	$co\sigma(\alpha)$	μ	m
6	3	8	1	24	-48
18	9	9	4	87	-174
10	5	5	1	30	-60
30	15	15	9	180	-360
50	25	25	6	165	-330
14	7	7	1	36	-72
42	21	21	11	228	-456
22	11	11	1	48	-96
26	13	13	1	54	-108

12　$P = 3$, 平行移動 $m = 3$ の劣完全数

$P = 3$ のとき $Q = 3^{e+1} - 1 + m$ が素数とする.
m は奇数になる. $m = 1, 7, 10$ の場合 Q は素数にならない.
$m = 3, 5, 9, 11$ について調べる.

表 11: $[P = 3, m = 3]$ 劣完全数

a	素因数分解
5	5
33	$3 * 11$
261	$3^2 * 29$
385	$5 * 7 * 11$
897	$3 * 13 * 23$
2241	$3^3 * 83$
26937	$3^2 * 41 * 73$
46593	$3^2 * 31 * 167$

5 を除くと, $5 * 7 * 11$ の他は, 正規形と第 2 正規形 の解ばかりである. おとなしい解があるだけだ.

次の表はmaxima の結果をそのまま載せる.

```
"m="-5
factor(25929)=3^2*43*67
"m="-4
"m="-3
factor(15)=3*5
factor(207)=3^2*23
factor(1023)=3*11*31
factor(2975)=5^2*7*17
factor(19359)=3^4*239
"m="-2
factor(4)=2^2
"m="-1
factor(21)=3*7
factor(2133)=3^3*79
factor(19521)=3^4*241
"m="0
factor(2)=2
"m="1
factor(3)=3
factor(9)=3^2
factor(27)=3^3
factor(81)=3^4
factor(243)=3^5
factor(729)=3^6
factor(2187)=3^7
factor(6561)=3^8
factor(19683)=3^9
factor(59049)=3^10
```

$m=1$ のとき素数累乗の解がでている. これはC型の解

$m=1$ すなわち

$$\overline{P}\sigma(a) = Pa - 1$$

の解には底の素数のべき P^e がある.

このような解はC型の解である.

この方程式の解を一般に 概完全数 (almost perfect number) と呼ぶ.

$P=5$ のときには例外の解 $a = 7*11$ が見つかった.

13　一般な概完全数

$\overline{P}\sigma(a) = Pa - 1$ の解に $rq(r < q:$素数$)$, があるとする.

$a = rq, \sigma(a) = (r+1)(q+1)$, $A = (r+1)(q+1), B = rq, \Delta = r + q$ とおくとき $A = B + \Delta + 1$.

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}A = \overline{P}(B + \Delta + 1)$$

一方, $Pa - 1 = Prq - 1 = PB - 1$ によって,

$$\overline{P}(B + \Delta + 1) = PB - 1 = \overline{P}B + B - 1.$$

$$\overline{P}B + \overline{P}(\Delta + 1) = \overline{P}B + B - 1.$$

$$B - \overline{P}(\Delta + 1) = 1.$$

$r_0 = r - \overline{P}, q_0 = q - \overline{P}, B_0 = r_0q_0$ とおくとき

$$B_0 = r_0q_0 = B - \overline{P}\Delta + \overline{P}^2.$$

$B - \overline{P}\Delta = B_0^2 - \overline{P}^2$

ゆえに

$$B_0^2 = P^2 - P + 1.$$

ここで, 奇素数 P に対して $D = P^2 - P + 1$ とおき因数分解を行い, $B_0^2 = D$ を満たす, r_0, q_0 に対して $r = r_0 + \overline{P}, q = q_0 + \overline{P}$ がともに素数となる, r, q があれば $a = Prq$ が解になる.

表 12: 概完全数

a 素因数分解

P	D	$\overline{P}$	r_0	q_0	r		q		a	備考
3	7	2	1	7	3	Yes	9	No	27	
5	21	4	3	7	7	Yes	11	Yes	77=7*11	
5	21	4	1	21	5	Yes	25	No	125	
7	43	6	1	43	7	Yes	49	No	343	
11	111	10	1	111	11	Yes	121	No	1331	
11	111	10	3	37	13	Yes	47	Yes	611=13*47	
13	157	12	1	157	13	Yes	169	No	2197	
17	273	16	1	273	17	Yes	289	No	4913	$273 = 3 \times 13$
17	273	16	3	91	19	Yes	107	Yes	2033=19*107	
19	343	18	1	343	19	Yes	361	No	6859	$343 = 7^3$
19	343	18	7	49	25	No	67	Yes	1675	
23	507	22	1	507	23	Yes	529	No	12167	$507 = 3 * 13^2$
23	507	22	3	169	25	No	191	Yes	4775	
29	813	28	1	813	29	Yes	841	No	24389	$813 = 3 * 271$
29	813	28	3	271	31	Yes	299	No	9269	
31	931	30	1	931	31	Yes	961	No	29791	$931 = 7^2 * 19$
31	931	30	7	133	37	Yes	163	Yes	6031=37*163	
31	931	30	49	19	79	Yes	49	No	3871	
37	1333	36	1	1333	37	Yes	1369	No	50653	$1333 = 31 * 43$
37	1333	36	31	43	67	Yes	79	Yes	5293	
41	1641	40	1	1641	41	Yes	1681	No	68921	$1641 = 3 * 547$
41	1641	40	3	547	43	Yes	587	Yes	25241=43*587	
43	1807	42	1	1807	43	Yes	1849	No	79507	$1807 = 13 * 139$
43	1807	42	13	139	55	No	181	Yes	9955	$1807 = 13 * 139$