書泉グランデでの講義　June 28th /2018

スーパー完全数の素数の定数倍解

飯高 茂

2018 年 6 月 16 日

1　高校生のための完全数入門

$\sigma(a)$ のダタのあるエクセルのファイルを元に次の結果を得た.

```
a 素因数分解 素因子数  オイラ関数  \sigma(a) 1  \sigma(a)-2a
5 $[5]$ 1 4 6 1 -4
14 $[2,7]$ 2 6 24 8 -4
44 $[2^2,11]$ 2 20 84 24 -4
110 $[2,5,11]$ 3 40 216 70 -4
152 $[2^3,19]$ 2 72 300 80 -4
884 $[2^2,13,17]$ 3 384 1764 500 -4
2144 $[2^5,67]$ 2 1056 4284 1088 -4
3 $[3]$ 1 2 4 1 -2
10 $[2,5]$ 2 4 18 6 -2
136 $[2^3,17]$ 2 64 270 72 -2
2 $[2]$ 1 1 3 1 -1
4 $[2^2]$ 1 2 7 2 -1
8 $[2^3]$ 1 4 15 4 -1
16 $[2^4]$ 1 8 31 8 -1
32 $[2^5]$ 1 16 63 16 -1
64 $[2^6]$ 1 32 127 32 -1
128 $[2^7]$ 1 64 255 64 -1
256 $[2^8]$ 1 128 511 128 -1
512 $[2^9]$ 1 256 1023 256 -1
1024 $[2^10]$ 1 512 2047 512 -1
2048 $[2^11]$ 1 1024 4095 1024 -1
4096 $[2^12]$ 1 2048 8191 2048 -1
6 $[2,3]$ 2 2 12 4 0
28 $[2^2,7]$ 2 12 56 16 0
496 $[2^4,31]$ 2 240 992 256 0
20 $[2^2,5]$ 2 8 42 12 2
104 $[2^3,13]$ 2 48 210 56 2
464 $[2^4,29]$ 2 224 930 240 2
650 $[2,5^2,13]$ 3 240 1302 410 2
1952 $[2^5,61]$ 2 960 3906 992 2
```

1.1 スーパー完全数

$a = P^e$ とおくとき, $q = \sigma(P^e) + m = \sigma(a) + m$ は素数とする.
$a = P^e$ 満たす方程式を次のようにして求める.
$\sigma(q) = q + 1$ が成り立つので, 左辺は $\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m)$.
右辺は $q + 1 = \dfrac{W}{\overline{P}} + m + 1$. よって, $\overline{P}$ を掛けて

$$\overline{P}(q + 1) = W + (m + 1)\overline{P}.$$

$$\overline{P}\sigma(\sigma(a) + m) = \overline{P}\sigma(q + 1) = \overline{P}q + \overline{P}.$$

そして

$$\overline{P}q + \overline{P} = W + \overline{P}(m + 1) = Pa - 1 + \overline{P}m + \overline{P} = Pa + \overline{P}m + P - 2.$$

よって,

$$\overline{P}\sigma(\sigma(a) + m) = Pa + \overline{P}m + P - 2.$$

この式を a を未知数と見て 平行移動 m のスーパー完全数の方程式といい, この解 a を 平行移動 m のスーパー完全数 (Super perfect numbers) という.

命題 1 $a = P^e$ が 平行移動 m のスーパー完全数とする. $A = \sigma(a) + m$ は素数になる.

Proof.
$\sigma(A) = A + 1$ を導けばよい.
$N = P^{e+1} - 1$ とおくとき,

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(A) &= Pa + \overline{P}m + P - 2\\ &= N + 1 + \overline{P}m + P - 2\\ &= N + \overline{P}m + \overline{P}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\overline{P}\sigma(A) = N + \overline{P}m + \overline{P}.$$

よって,

$$\overline{P}\sigma(A) \geq \overline{P}(A + 1) = \overline{P}A + \overline{P}.$$

$\overline{P}A = \overline{P}\sigma(a) + \overline{P}m = N + \overline{P}m$. ゆえに $\overline{P}A = N + \overline{P}m$. 一方 $\sigma(A) \geq A + 1$ に注意し, これに $\overline{P}$ を掛けると

$$\overline{P}\sigma(A) \geq \overline{P}A + \overline{P}.$$

左辺 は $\overline{P}\sigma(A) = N + \overline{P}m + \overline{P}$. 右辺は $\overline{P}A + \overline{P} = N + \overline{P}m + \overline{P}$. 両辺は等しい. それゆえ $\sigma(A) \geq A + 1$. $A = \sigma(a) + m$ は素数.

End

1.2 $P=2$ の場合

$P-2=0$ なので簡単になり

$$\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m.$$

命題 2 $a=2^e$ が 平行移動 m のスーパー完全数とする. $A=\sigma(a)+m$ は素数になる.

逆に $A=\sigma(a)+m$ が素数になるなら $a=2^e$ が 平行移動 m のスーパー完全数となる.

1.3 平行移動 m の完全数の例

表 1: 平行移動 $m=-28$ 完全数

a	$factor$
48	2^4*3
2002	$2*7*11*13$
5170	$2*5*11*47$
29056	2^7*227
133042	$2*7*13*17*43$

A 型解 $48=2^4*3$, 29056$=2^7*227$.

表 2: 平行移動 $m=-18$ 完全数

a	$factor$
208	2^4*13
6976	2^6*109
8415	$3^2*5*11*17$
31815	$3^2*5*7*101$
351351	$3^3*7*11*13^2$

表 3: 平行移動 $m=-14$ 完全数

a	$factor$
272	2^4*17
7232	2^6*113
30848	2^7*241

2 $m = -28$ の スーパー完全数

表 4: $m = -28$ スーパー完全数

a	$factor$	q, quasiMersenne	$factor$	a/7
16	2^4	3	3	2.285714286
26	$2*13$	23	23	3.714285714
35	$5*7$	41	41	5
77	$7*11$	125	5^3	11
98	$2*7^2$	167	167	14
107	107	185	$5*37$	15.28571429
119	$7*17$	209	$11*19$	17
128	2^7	227	227	18.28571429
161	$7*23$	293	293	23
203	$7*29$	377	$13*29$	29
329	$7*47$	629	$17*37$	47
371	$7*53$	713	$23*31$	53
413	$7*59$	797	797	59
497	$7*71$	965	$5*193$	71
623	$7*89$	1217	1217	89
707	$7*101$	1385	$5*277$	101
917	$7*131$	1805	$5*19^2$	131
959	$7*137$	1889	1889	137
1043	$7*149$	2057	11^2*17	149
1253	$7*179$	2477	2477	179
1379	$7*197$	2729	2729	197
1589	$7*227$	3149	$47*67$	227
1631	$7*233$	3233	$53*61$	233
1799	$7*257$	3569	$43*83$	257
6491	6491	12953	12953	927.2857143
29339	29339	58649	$223*263$	4191.285714

解を分類すると,
i. 2^e 正規解 $2^4(q=3), 2^7(q=227)$
ii. $7p$(p: 素数) 解
iii. 素数解は 107(lonly wolf) 以外にあるか
iv. $2*13, 2*7^2$ 偶数解

2.1 2^e 正規解

表 5: $m=-28$ 完全数

a	$factor$
48	2^4*3
2002	$2*7*11*13$
5170	$2*5*11*47$
29056	2^7*227
133042	$2*7*13*17*43$

2.2 素数解

一般に スーパー完全数 $A=\sigma(a)+m, \sigma(A)-m=2a$ について $a=p$: 素数の解があるとする.

$A=\sigma(a)+m=p+1+m$ なので, $p=A-m-1$.

$$\sigma(A)=m+2a=m+2(A-m-1)=2A-m-2.$$

$m=-28$ のとき $\sigma(A)=2A+26$.

そこで 平行移動 -26 の解 A について, $A-m-1=A+27$ が素数 p なら これが解.

表 6: $m=-26$ 完全数

A	factor	$A+27$	factor
80	2^4*5	107	107
1184	2^5*37	1211	$7*173$
6464	2^6*101	6491	6491
29312	2^7*229	29339	29339
78975	3^5*5^2*13	79002	$2*3^3*7*11*19$
510464	2^9*997	510491	$41*12451$
557192	2^3*17^2*241	557219	$13*42863$

107,6491,29939 はスーパー完全数の素数解

表 7: $m=-18$ スーパー完全数

a	$factor$	q, quasiMersenne	$factor$
16	2^4	13	13
21	$3*7$	23	23
27	3^3	35	$5*7$
39	$3*13$	59	59
57	$3*19$	95	$5*19$
64	2^6	109	109
111	$3*37$	203	$7*29$
129	$3*43$	239	239
201	$3*67$	383	383
219	$3*73$	419	419
237	$3*79$	455	$5*7*13$
309	$3*103$	599	599
327	$3*109$	635	$5*127$
417	$3*139$	815	$5*163$
471	$3*157$	923	$13*71$
579	$3*193$	1139	$17*67$
669	$3*223$	1319	1319
831	$3*277$	1643	$31*53$
921	$3*307$	1823	1823
939	$3*313$	1859	$11*13^2$

素数解はないだろう.

表 8: $m=-18$ 完全数

a	$factor$
208	2^4*13
6976	2^6*109
8415	$3^2*5*11*17$
31815	$3^2*5*7*101$
351351	$3^3*7*11*13^2$

A 型解
$208=2^4*13$,$6976=2^6*109$.

表 9: $m = -14$ スーパー完全数

a	$factor$	q, quasiMersenne	$factor$
16	2^4	17	17
37	37	59	59
43	43	71	71
64	2^6	113	113
67	67	119	$7 * 17$
79	79	143	$11 * 13$
127	127	239	239
128	2^7	241	241
151	151	287	$7 * 41$
199	199	383	383
247	$13 * 19$	479	479
271	271	527	$17 * 31$
317	317	619	619
331	331	647	647
367	367	719	719
379	379	743	743
439	439	863	863
487	487	959	$7 * 137$
512	2^9	1009	1009
547	547	1079	$13 * 83$
619	619	1223	1223
631	631	1247	$29 * 43$
691	691	1367	1367
907	907	1799	$7 * 257$

表 10: $m = -14$ 完全数

a	$factor$
272	$2^4 * 17$
7232	$2^6 * 113$
30848	$2^7 * 241$

3　$m = -(2\mu + 2)$ の スーパー完全数の解

$A = \sigma(a) + m, \sigma(A) - m = 2a$ について $m = -(2\mu + 2)$(μ: 完全数) のとき,
$a = p$: 素数の解があるとする.
$A = \sigma(a) + m = p - 2\mu - 1$ なので, $p = A + 2\mu + 1$.

$$\sigma(A) = m + 2a = -2\mu - 2 + 2p.$$

一方, $p = A + 2\mu + 1$ により $-2\mu - 2 + 2p = -2\mu - 2 + 2(A + 2\mu + 1) = 2A + 2\mu$.
ゆえに

$$\sigma(A) = 2A + 2\mu.$$

μ : 完全数なので A についての方程式とみるとこの解には
i. 通常解 (B 型)　　$A = \mu Q$, ここで Q は μ と互いに素な任意の素数.
$A = p - 2\mu - 1$ により, $\mu Q = p - 2\mu - 1$. よって, $p = 2\mu + 1 + \mu Q$. (p, Q) はスーパー双子素数.
ii. 擬素数 $\mu = 2^{\varepsilon} q$ とおくとき,　　$A = \mu q^2$ または $\mu 2^{\varepsilon+1}$. この場合は $A/\mu = q^2, 2^{\varepsilon+1}$.
iii. エイリアン　A 型解 $A = 2^e \pi$. $A =$ 　$2^e \pi, a = 2^{e+1}$ $p = A + 2\mu + 1$ が素数なら, A はスーパー完全数の解 $A = \sigma(a) + m, \sigma(A) - m = 2a$ $p = a$ からでる. $A = p - (2\mu + 1)$
iv. エイリアン　D 型解 $A = 2^f \pi_1 \pi_2$. このほかの変な解もある.
これについては数表を参照

表 11: μ, コンピュータによる調査, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 6, 28, 496, 8128$, 擬素数解

μ	$1 + 2\mu$	c_1	c_2	$A1 = c_1 * \mu$	$A2 = c_2 \mu$	b_1	b_2
6	13	4	9	24	54	37	67
28	57	8	49	224	1372	281	1429
496	993	32	961	15872	476656	16865	477649
8128	16257	128	16129	1040384	131096512	1056641	131112769

$A1 = c_1 * \mu$,$A2 = c_2 * \mu$ が擬素数解, $b_1 = 1 + 2\mu + A_1$, $b_2 = 1 + 2\mu + A_2$ が素数なら A_1, A_2 は解.
この表で
$\mu = 496$ のとき 477649=17*28097,16865=5*3373, 非素数
$\mu = 6$ のとき　37,67　が素数解
$\mu = 28$ のとき　281,1429 が素数解
$\mu = 8128$ のとき　1056641,131112679 が素数解

表 12: A, A 型解, $b = A + 2\mu + 1$, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 6$

e	A, A 型解	$factor$	$b = A + 2\mu + 1$	$factor$	
3	24	$2^3 * 3$	37	37	prime
4	304	$2^4 * 19$	317	317	prime
8	127744	$2^8 * 499$	127757	$7 * 18251$	
12	33501184	$2^{12} * 8179$	33501197	$577 * 58061$	
16	8589082624	$2^{16} * 131059$	8589082637	$1031 * 8330827$	

表 13: A, A 型解, $b = A + 2\mu + 1$, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 28$

e	A, A 型解	$factor$	$b = A + 2\mu + 1$	$factor$	
5	224	$2^5 * 7$	281	281	prime
6	4544	$2^6 * 71$	4601	$43 * 107$	
7	25472	$2^7 * 199$	25529	$7^2 * 521$	
9	495104	$2^9 * 967$	495161	495161	prime
15	2145615872	$2^{15} * 65479$	2145615929	$3463 * 619583$	
18	137424011264	$2^{18} * 524231$	137424011321	$7019 * 19578859$	
21	8795973484544	$2^{21} * 4194247$	8795973484601	$2612257 * 3367193$	

表 14: A, A 型解, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 496$

e	A, A 型解	$factor$		$b = A + 2\mu + 1$	factor
9	15872	$2^9 * 31$	16865	$5 * 3373$	
13	126083072	$2^{13} * 15391$	126084065	$5 * 311 * 81083$	
16	8524857344	$2^{16} * 130079$	8524858337	$5 * 4567 * 98610312859$	prime
25	2251766494134272	$2^{25} * 67107871$	2251766494135265	$5 * 4567 * 98610312859$	
28	144114921519448064	$2^{28} * 536869919$	144114921519449057	$811 * 18917 * 939368151$	

D 型解の例

$\sigma(a) - 2a = 992$ の解,496:完全数

表 15: A, A 型解, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 8128$

e	A, A 型解	$factor$	$b = A + 2\mu + 1$	$factor$	
13	1040384	$2^{13} * 127$	1056641	1056641	prime
15	1614774272	$2^{15} * 49279$	1614790529	$11 * 59 * 2488121$	
19	541232463872	$2^{19} * 1032319$	541232480129	$11 * 49202952739$	
21	8761999622144	$2^{21} * 4178047$	8761999638401	$167 * 193 * 271850071$	

表 16: $\sigma(a) - 2a = 56$ の解,28:完全数

a	factor
14552	$2^3 * 17 * 107$
9272	$2^3 * 19 * 61$
74992	$2^4 * 43 * 109$
35019968	$2^6 * 131 * 4177$
15317696	$2^6 * 137 * 1747$
6019264	$2^6 * 163 * 577$
53032832	$2^7 * 317 * 1307$
3365232128	$2^9 * 1277 * 5147$

a	factor
1764512	$2^5 * 67 * 823$
1006496	$2^5 * 71 * 443$
857312	$2^5 * 73 * 367$
458144	$2^5 * 103 * 139$
33058112	$2^6 * 131 * 3943$
12445504	$2^6 * 139 * 1399$
4041152	$2^6 * 233 * 271$
279108224	$2^7 * 263 * 8291$
148221824	$2^7 * 271 * 4273$
92407424	$2^7 * 283 * 2551$
44818304	$2^7 * 337 * 1039$
41162624	$2^7 * 353 * 911$
38943104	$2^7 * 367 * 829$
34699904	$2^7 * 419 * 647$
1274024704	$2^8 * 541 * 9199$
524187392	$2^8 * 601 * 3407$
433401088	$2^8 * 631 * 2683$
307032832	$2^8 * 751 * 1597$

表 17: $\sigma(a) - 2a = 2 * 8128$ の解,8128:完全数

a	factor
814735232	$2^7 * 257 * 24767$
115129472	$2^7 * 271 * 3319$

4　平行移動 m の スーパー完全数

$A=\sigma(a)$ とおくとき $\sigma(A)=2a+m$ を満たす.

解 a に素数解 p があるとする.

$A=\sigma(p)+m=p+1+m$ なので $\sigma(A)=\sigma(p+1+m)=2p+m$. $p=A-1-m$ を代入し,

$$\sigma(A)=2p+m=2A-2-m.$$

これは平行移動 $2+m$ の完全数の方程式とみる. さて一般に μ を完全数とするとき $\sigma(A)=2A+2\mu$ の解はよく分かっている.

i. 通常解 (B 型解)　ii. 擬素数解, iii. A 型解, iv. D 型解 v. 未知の解

そこで $-2-m=2\mu$ とおくとき, $m=-2\mu-2$ になり,5 つの型に応じて解がある.

i. 通常解 (B 型解). $A=\mu Q(Q:\mu$ と互いに素な素数). $A=p+1+m=\mu Q$ になり, $p=\mu Q+2\mu+1$:素数, Q :素数. すなわち, $Q,p=\mu Q+2\mu+1$ はスーパー双子素数.

ii. 擬素数解, $\mu=2^{\varepsilon}q,(q=2^{\varepsilon+1},q:$ 素数) のとき, $A_1=\mu q^2$, $A_2=\mu 2^{\varepsilon+1}$ が 2 つの擬素数解.

$b_1=1+2*\mu+A_1,b_2=1+2*\mu+A_1$ が素数ならよい.

不思議なことにこれらは $\mu=6,28,8128$ のときのみ解になる.

5　解 $3p$ の場合

$A=\sigma(a)+m$ とおくとき $\sigma(A)=2a+m$ を満たす解 a に素数の 3 倍解 $3p$ があるとする.

$A=\sigma(3p)+m=4p+4+m$ なので $\sigma(A)=\sigma(4p+4+m)=2a+m=6p+m$. $4p=A-4-m$ を代入するためにまず 2 倍する.

$$2\sigma(A)=12p+2m=3(A-4-m)+2m=3A-12-m.$$

ところで, 一般に $2\sigma(a)=3a+6$ の解は $a=8,2p(p>2:$ 素数) なので,

$-12-m=6$ とおくとき , $m=-18$.

このとき通常解 i. $A=2Q$. ii. 擬素数解 $A=8$.

i. $A=2Q$ のとき, $A=4p-14=2Q$. これより, $Q=2p-7$. $p,Q=2p-7$ はスーパー双子素数.

ii. $A=8$ のとき, $A=4p-14=8$. これより, 解は無い.

6 $a = \varpi p$

以上の議論をもとに一般化する.

$A = \sigma(a) + m$ とおくとき $\sigma(A) = 2a + m$ を満たす解 a に素数 p の ϖ 倍解 ϖp があるとする. $a = \varpi p$ になる.

$\sigma(a) = \sigma(\varpi p) = \sigma(\varpi)(p+1)$ なので $A = \sigma(a) + m = \sigma(\varpi)(p+1) + m$.

ゆえに, $p + 1 = \dfrac{A-m}{\sigma(\varpi)}$. 整理して

$$p = \frac{A - m - \sigma(\varpi)}{\sigma(\varpi)}.$$

$\sigma(A) = 2a + m = 2\varpi p + m$ によって,

$$\sigma(A) = 2\varpi(\frac{A - m - \sigma(\varpi)}{\sigma(\varpi)}) + m$$

を整理して

$$\sigma(\varpi)\sigma(A) = 2\varpi(A - m - \sigma(\varpi)) + m\sigma(\varpi).$$

$Z = -2\varpi(m + \sigma(\varpi)) + m\sigma(\varpi)$ とおくと,

$$\sigma(\varpi)\sigma(A) = 2\varpi A + Z.$$

さてこれに B 型解 $A = kQ$(Q:素数) があるとする. ここで k は Q の倍数でない定数.

$\sigma(A) = \sigma(k)(Q+1)$ により

$$\sigma(A) = \frac{\sigma(k)}{k}A + \sigma(k).$$

および

$$\sigma(A) = \frac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}A + \frac{Z}{\sigma(\varpi)}$$

によって, A の係数を等値して

$$\frac{\sigma(k)}{k} = \frac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$$

定数項の部分を参照して

$$\sigma(k) = \frac{Z}{\sigma(\varpi)}.$$

よって, $Z = \sigma(k)\sigma(\varpi)$.

$Z = -2\varpi(m + \sigma(\varpi)) + m\sigma(\varpi)$ によって,

$$\sigma(k)\sigma(\varpi) = -2\varpi(m + \sigma(\varpi)) + m\varpi = m(-2\varpi + \sigma(\varpi)) - 2\varpi\sigma(\varpi).$$

スーパー完全数において $m = -28, -18, -14, -58, \cdots$ の場合は B 型解の類似として素数の定数倍解が出てきた. これはなぜかを以下で明らかにする.

6.1 $\dfrac{\sigma(k)}{k} = \dfrac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$ の解

$\dfrac{\sigma(k)}{k} = \dfrac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$ を書き直すと,

$$\sigma(k)\sigma(\varpi) = 2k\varpi.$$

ϖ を素数とすると, $\sigma(k)(\varpi+1) = 2k\varpi$ を満たす　k, ϖ を求めたいが, とりあえず計算機で探索した.

表 18: ϖ 素数

k	$\sigma(k)$	ϖ
3	4	2
2	3	3
4	7	7
16	31	31

これより,$k \neq 3$ なら $k = 2^e, \sigma(k) = 2^{e+1} - 1$:メルセンヌ素数, $\varpi = \sigma(k)$.
$\varpi = \sigma(k) = 2k - 1$, $\sigma(k)(\varpi + 1) = (2k-1) * 2k$. 結局

$$(2k-1)(k) = (1-k)m - 2k(2k-1).$$

$k = 2$ なら, $6 = -m - 12$. よって, $m = -18$.
$k = 4$ なら, $7 * 4 = -3m - 8 * 7$. $m = -28$.
一般には

$$-m = \frac{6k^2 - 3k}{k-1} = 6k + 3 + \frac{3}{k-1}.$$

よって, $k - 1 = 1, 3 . k = 2, 4$. したがって, $m = -28, -18$ が得られた.

事実 1 $\sigma(k)\sigma(\varpi) = 2k\varpi$ を満たす　k, ϖ を求めることは多分難しい.

$\varpi = 2$ なら $3\sigma(k) = 4k$. $k = 3$ が唯一の解だろう.

表 19: ϖ 自然数

k	$\sigma(k)$	ϖ
3	4	2
2	3	3
7	8	4
4	7	7
31	32	16
16	31	31
127	128	64
64	127	127

ϖ が素数でないなら, $\varpi = 2^e, \sigma(k) = 2^{e+1}, k = 2^{e+1} - 1$. k はメルセンヌ素数 .

$\sigma(\varpi) = \sigma(2^e) = k = 2^{e+1} - 1 = k, \varpi = 2^e = (k+1)/2$, によって $A = \sigma(\varpi)(p+1) + m = kp + k + m$.

$\sigma(k) = k + 1 = \sigma(\varpi) = 2^{e+1}, \sigma(\varpi) = k$, を

$$\sigma(k)\sigma(\varpi) = m(-2\varpi + \sigma(\varpi)) - 2\varpi\sigma(\varpi)$$

に代入して, $-2\varpi + \sigma(\varpi) = -2^{e+1} + k = -2^{e+1} + 2^{e+1} - 1 = -1$.

$\sigma(k)\sigma(\varpi) = (k+1)k, -2\varpi\sigma(\varpi) = -2 * 2^e * k = -k(k+1)$ によって,

$$0 = m(-2\varpi + \sigma(\varpi)) - 2\varpi\sigma(\varpi) - \sigma(k)\sigma(\varpi)$$

により

$$m = 2\varpi\sigma(\varpi) - \sigma(k)\sigma(\varpi) = -2k(k+1).$$

$A = \sigma(\varpi)(p+1) + m = kp + k + m = kp + k - 2k(k+1) = k(p + 1 - 2(k+1)) = kQ$ により

$Q = p + 1 - 2(k+1) = p - 2k - 1$ になるが, 2 を法とすると矛盾. この場合は起きない.

6.2　水谷さんの注意

$\sigma(k)\sigma(\varpi) = 2k\varpi$ の解は , (k, ϖ) は互いに素として, $\beta = k\varpi$ とおくと

$\sigma(k)\sigma(\varpi) = \sigma(\beta), 2k\varpi = 2\beta$ より $\sigma(\beta) = 2\beta$.

よって β は完全数. これが偶数なら, オイラーの定理によって $\beta = 2^\varepsilon\eta$. η はメルセンヌ素数.

$k\varpi = \beta = 2^\varepsilon\eta$. (k,$\varpi$) は互いに素としたから

i). $k = 2^\varepsilon, \varpi = \eta$.

ii). $k = \eta, \varpi = 2^\varepsilon$

7　$m = -994$ の スーパー完全数

表 20: $m = -994$ スーパー完全数

a primes		$q = 2a - 1 + m$		$b = a - 994$	$b/496$
6449	6449	11903	11903	5456	11
12401	12401	23807	$7*19*179$	11408	23
15377	15377	29759	29759	14384	29
27281	27281	53567	$17*23*137$	26288	53
31249	31249	61503	$3*13*19*83$	30256	61
36209	36209	71423	$11*43*151$	35216	71
37201	37201	73407	$3*24469$	36208	73
40177	40177	79359	$3*7*3779$	39184	79
45137	45137	89279	$73*1223$	44144	89
52081	52081	103167	3^3*3821	51088	103
55057	55057	109119	$3*36373$	54064	109
57041	57041	113087	$13*8699$	56048	113
74897	74897	148799	$7*29*733$	73904	149
a		$q = 2a - 1 + m$		$b = a - 994$	$b/496$
2097152	2^{21}	4193309	4193309	2096159	4226.127016
512	2^9	29	29	-481	-0.969758065
2093	$7*13*23$	3191	3191	1100	2.217741935
7385	$5*7*211$	13775	$5^2*19*29$	6392	12.88709677
13349	$7*1907$	25703	25703	12356	24.91129032
31913	$7*47*97$	62831	$83*757$	30920	62.33870968
167297	$13*17*757$	333599	$7*47657$	166304	335.2903226
563297	$7*80471$	1125599	1125599	562304	1133.677419
1356977	$23*41*1439$	2712959	$307*8837$	1355984	2733.83871
1486265	$5*11*61*443$	2971535	$5*7*59*1439$	1485272	2994.5

2 べきの解なら A 型 完全数が対応する.
2 べきでもなく素数でも無い解はいろいろあるが, 正体不明ということになる.

表 21: $m = -994$ A 型 完全数

a	factor
14848	2^9*29
8794006355968	$2^{21}*4193309$

解を分類すると,
i. 2^e 正規解
ii. p(p: 素数) 解
iii. 非素数

表 22: $m = -992$ 完全数

a	$factor$	$b = 1 + 2\mu + a$	$factor$
1488	$2^4 * 3 * 31$	2481	$3 * 827$
2480	$2^4 * 5 * 31$	3473	$23 * 151$
2892 D	$2^2 * 3 * 241$	3885	$3 * 5 * 7 * 37$
3472	$2^4 * 7 * 31$	4465	$5 * 19 * 47$
5456	$2^4 * 11 * 31$	6449	$*6449$
6104 D	$2^3 * 7 * 109$	7097	$47 * 151$
6448	$2^4 * 13 * 31$	7441	$7 * 1063$
8432	$2^4 * 17 * 31$	9425	$5^2 * 13 * 29$
9424	$2^4 * 19 * 31$	10417	$11 * 947$
11408	$2^4 * 23 * 31$	12401	$*12401$
14384	$2^4 * 29 * 31$	15377	$*15377$
15872 Q	$2^9 * 31$	16865	$5 * 3373$
18352	$2^4 * 31 * 37$	19345	$5 * 53 * 73$
20336	$2^4 * 31 * 41$	21329	$7 * 11 * 277$
21328	$2^4 * 31 * 43$	22321	$13 * 17 * 101$
23312	$2^4 * 31 * 47$	24305	$5 * 4861$
26288	$2^4 * 31 * 53$	27281	$*27281$
29264	$2^4 * 31 * 59$	30257	$79 * 383$
30256	$2^4 * 31 * 61$	31249	$*31249$
33232	$2^4 * 31 * 67$	34225	$5^2 * 37^2$
35216	$2^4 * 31 * 71$	36209	$*36209$
36208	$2^4 * 31 * 73$	37201	$*37201$
39184	$2^4 * 31 * 79$	40177	$*40177$
41168	$2^4 * 31 * 83$	42161	$7 * 19 * 317$
44144	$2^4 * 31 * 89$	45137	$*45137$
48112	$2^4 * 31 * 97$	49105	$5 * 7 * 23 * 61$
50096	$2^4 * 31 * 101$	51089	$47 * 1087$
51088	$2^4 * 31 * 103$	52081	$*52081$
53072	$2^4 * 31 * 107$	54065	$5 * 11 * 983$
54064	$2^4 * 31 * 109$	55057	$*55057$
56048	$2^4 * 31 * 113$	57041	$*57041$
62992	$2^4 * 31 * 127$	63985	$5 * 67 * 191$
64976	$2^4 * 31 * 131$	65969	$41 * 1609$
67952	$2^4 * 31 * 137$	68945	$5 * 13789$
68944	$2^4 * 31 * 139$	69937	$7 * 97 * 103$
73904	$2^4 * 31 * 149$	74897	$*74897$

第 5 列で素数になる場合 (* 印), スーパー完全数の素数解
A,D 型の解にマーク Q は擬素数 の意味.

8 Firoozbakht と Hasler の共著論文

Variations on Euclid's formula for perfect rumbers 2010 , J. of Integer Sequences
ここには注目すべき結果が与えられていた.

- 与えられた m について, $\sigma(x)=2(x+m)$ の解の研究は前例がないのでここで紹介する.
- $m|x$ の場合の解を admirable number という.(A111592)
- m が完全数の場合の解の研究を行う.
- 第二正規解の探求を行う.

以後, 通例の記号に戻す.
$\sigma(a)=2a-m$ の解, $m=-2\mu, \mu$:完全数の場合に第二正規解の探求.
$a=2^e pq,\ p,q$ は相異なる奇素数. $N=2^{e+1}-1, B=pq, \Delta=p+q$ を使う.
$\sigma(a)=\sigma(2^e pq)=N(B+\Delta+1), 2a=(N+1)B$ なので, $-m=\sigma(a)-2a=N\Delta+N-B$.
ゆえに $-m-N=N\Delta-B$.
$p_0=p-N, q_0=q-N, B_0=p_0q_0$ とおくとき, $B_0=B-N\Delta+N^2$ により,

$$-m-N=N\Delta-B=N^2-B_0.$$

$D=N(N+1)+m$ とおくとき $B_0=D$.
$p_0=2L_1, q_0=2L_2$ と定めて, $B_0=4L_1L_2, D=2*2^e*N+m$ により
完全数 μ によって $m=-2\mu$ とすると, $-\mu=2L_1L_2-2^eN$ となる, $L_1,L_2;p,q$ を求めたい.
簡単な場合から, 考える.
$L_1=-2^{e-1}, p_0=2L_1=-2^e$ とすると, $p=N+2L_1=2^{e+1}-1-2^e=2^e-1$:素数とする. メルセンヌ素数. $q=2L_2+N$ なので, $-\mu=2L_1L_2-2^eN=-2^eL_2-2^eN=-2^e(L_2+N)$.
$L_2=\dfrac{Q-N}{2}$ によって, $L_2+N=\dfrac{Q+N}{2}$.
ゆえに, $N=2p+1$ により

$$\mu=2^{e-1}(N+Q)=2^{e-1}(2p+1+Q)=2^e(p+(1+Q)/2).$$

例 $\mu=496=2^4*31$
$2^4*31=2^e(p+(1+Q)/2)$

参考文献

[1] 高木貞治, 初等整数論講義第 2 版, 共立出版社,1971.

[2] C.F.Gauss(カール・フリードリヒ ガウス), ガウス 整数論 (数学史叢書)(高瀬正仁訳), 共立出版社, 1995.

[3] 飯高茂 , (雑誌の連載) 数学の研究をはじめよう , 現代数学社 ,2013 ～ .

[4] 飯高茂 , 『数学の研究をはじめよう (I),(II)』, 現代数学社 ,2016.

[5] 飯高茂 ,『 数学の研究をはじめよう (III),(IV)』, 現代数学社 ,2017.

[6] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.

[7] Antal Bege and Kinga Fogarasi,Generalized perfect numbers,Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73–82.

9　数学屋としての回顧 2013 年

自分でも驚くことなのだがすでに古希を超えた. また毎朝、計測することを常とするオムロンの体重計が判定する私の体年齢も５５歳となった. そこで, 書泉グランデの７階で「わが数学の人生の回顧」と題して一般向けの講演をした。

そのうちオムロンの体重計が調子が悪くなってタニタの体重計に買い換えた. タニタは体内年齢を計測する. 概してタニタの方が厳しく判定し, 2015 年現在実年齢 73 歳, 体重は 59 キロ, 体内年齢は 61 ± 1

自らの数学を数学を回顧すると４つの大きな波 (big wave) があった.

第一の大波

1969–1971

キーワード: 小平次元, 双有理分類

第二の大波

1972–82

キーワード: 対数的小平次元, 対数的多種数, 固有双有理幾何と分類

第三の大波

1983–2013

キーワード: (m, a) 多種数, 曲面と曲線の対の双有理幾何と分類

第四の大波

2013- 現在

キーワード:　究極の完全数, フェルマの完全数, オイラー の完全数,

10　高校生の頃

通学した千葉市にある高校では大きな職員室というのは無く、先生方は専門別に集まって研究室とよばれる部屋にいた. 数学研究室には先生方の机の周りに大きなガラス付きの書棚がいくつかあり、数学の専門書が並べられていた.

ローラン・シュワルツ著、岩村聯訳『超函数の理論』、岩澤健吉著『代数函数論』、高木貞治著『解析概論』などの堂々たる数学の本が並べられていて、厳かな学問がそこにあった.

なるほど、大学の数学は難しい, と思い強い憧れを持った. その中に「ソビエト科学アカデミー編」:『数学通論』 というシリーズがあった.

数学の本ではあるが読み物風になっていて読みやすかった。リーマン面という曲面の絵があり, 曲面の孔の数を示性数と呼び、これが最も基本的な性質を表している. と書かれていた.

これが、種数との私の最初の出会いであった。

大学に入ってから一番うれしかったことは多くの数学少年に会え彼等と友人になれたことである．なかでも、Ｓ君 （新谷卓郎君） にあえたことが大きい．

彼との出会いは印象的で今でもありありと覚えている．

始業前の教室で，早々に知り合ったＹ君（吉田健介君）と物理や数学の話をよくしていた．

Ｙ君は早熟の人だから何でもよく知っていた．

千葉の高校では大学レベルの数学や、理論物理の話し相手をしてくれる人いなかったのだが、大学では違う．私にとって一番興味のある数学や物理の話を友達とできる．これはうれしいことだ。

そうは言ってもたわいない話ばかりで、複素正則関数の実部や虚部が調和関数になるのはすごいことだ、となどの話をしただけである．

この会話を傍で静かに立ち聞きしている人がいる．少し変な気がしたのだが、会話が切れるやいなや彼は話し始めた．

「大変失礼かと思いますが、お二人の話を聞いていると私の知らないことばかりです．どうしたら、そのようなことを勉強できるのでしょうか．ぜひ教えてください」

こう尋ねられ、内心どきっとし、びっくりもした．新入生だからまだ互いによく知らないとはいえ、同じ組の友達どうしなのに、驚くほど丁寧な言い方である．

「いや、別にたいしたことではありません．どこにでもある本を読んだだけです」

と答えながら、彼の様子を見ると、度の強いめがねを通して黒い瞳が輝いている．学生服の着方も鈍くさい印象である．飾り気のない身なりで，コンパも嫌い．酒も飲まない．してみれば私たちのお仲間に違いない．類が類を呼ぶとはこのことである．たちまちにしてうちとけ合い、何でも話せる仲になった．

10.1　数学の仲間達

それから、３人で神田の古本屋街によく行くようになった．古本屋には中古の洋書がよくでていたからである．シュプリンガー社の黄色い表紙のハードカバーの数学書はとくに立派で、仰ぎ見る存在であった．

３年生になって本郷の教室に通うようになった。当時は、代数の講義は、１０時から１２時までに加えて、１３時から１４時までありその後で、助手の担当する問題演習が夕方の５時近くまであった。

他に幾何や解析関係など専門的な講義と演習が朝から晩まであった。

数学しかかない毎日は至福のときだった。数学教育の講義もあったが、数学に没頭したかったので教育の講義を聴く気になれず、レポートを出せば単位はとれるという噂にすがって後でレポートを出すつもりだった. しかし期限に間に合わず数学教育法の単位が取れなかった。

有名な数学者 秋月康夫先生がお茶の水女子大で学対象の講義をする。誰でも入れる.

という連絡があり, 女子大に入れる滅多に無い機会ということもあり張り切って数学科の友だちと出かけた。古びた教室に都内の数学科の学生が多数集まっていた。

調和積分の本などで有名な秋月康夫先生は意外に小柄な風采のあがらない人であったが, 話は迫力があっておもしろかった。

冒頭に代数曲線についてふれて,

「次数より Geschlecht, すなわち種数が大切だね。知っているかな。」

と, いかにも偉そうな話しぶりだった。

たとえば, n 次曲線の種数は $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 以下で, 特異点がなければ丁度 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ になる.