書泉講義
ウルトラオイラー完全数

飯高 茂

平成 30 年 8 月 30 日

1 ウルトラオイラ完全数

ウルトラ完全数 の定義で出てきた $\sigma(a)$ の代わりに $\varphi(a)$ を用いてウルトラオイラ完全数を考えることができる.

このような一般化にそれほどの意味があるとも言えないが出てきた諸結果は実に目覚しいものである.

$a=2^e, q=a+1+m$:素数, と仮定する.

これからオイラー関数を用いて 2^e を消去する.

最初に $2\varphi(a)=2^e=q-m-1$ により $q=2\varphi(a)+m+1$ となることに注意する.

$\varphi(q)=q-1$ に代入して $\varphi(q)=\varphi(2\varphi(a)+m+1)), q-1=a+m$.

$$\varphi(2\varphi(a)+m+1)=a+m$$

よって $a=\varphi(2\varphi(a)+m+1)-m$ $2\varphi(a)=a$ に留意して

$$2\varphi(\varphi(2\varphi(a)+m+1)-m)=a$$

これをウルトラオイラ完全数の方程式と言い, 解を平行移動 m のウルトラオイラ完全数 (ultra-euler-perfect numbers) という.

ここで, $q=2\varphi(a)+m+1$ を擬メルセンヌ数という

命題 1 $a=2^e$ で $q=2\varphi(a)+m+1$ が素数ならば a はウルトラオイラ完全数になる.

Proof

ウルトラオイラ完全数の方程式を次のように分解する. $A=2\varphi(a)+m+1, B=\varphi(A)-m$ とおくとき $2\varphi(B)=a$ となることを示す.

さて $a=2^e$ で $q=2\varphi(a)+m+1$ は素数と仮定する.

$2\varphi(a)=a$ なので, $A=2\varphi(a)+m+1=a+m+1=q$ は素数.

$B=\varphi(A)-m=A-1-m=2\varphi(a)=a=2^e, 2\varphi(B)=a.$

End

ここで, $a=2^e$ でウルトラオイラ完全数の方程式の解ならば $q=2\varphi(a)+m+1$ は実際に素数かという問題がある.

表 1: $m = -2$, ウルトラオイラー完全数

a	素因数分解	q	素因数分解
4	2^2	3	3
8	2^3	7	7
32	2^5	31	31
128	2^7	127	127
8192	2^{13}	8191	8191

a が 2^e と書けない場合をも含めて, $q = 2\varphi(a) + m + 1$ を擬メルセンヌ数と呼ぶ.
ウルトラオイラ完全数の研究はほとんどできていない. しかし数値解は実に鮮やかな結果が並ぶ.
擬メルセンヌ数 q は本物のメルセンヌ素数.

表 2: $m = -1$, ウルトラオイラー完全数

a	素因数分解	q	素因数分解
2	2	2	2
4	2^2	4	2^2
8	2^3	8	2^3
32	2^5	32	2^5
512	2^9	512	2^9

$m = -1$ なので $q = a$.

表 3: $m = 0$, ウルトラオイラー完全数

a	素因数分解	q	素因数分解
2	2	3	3
4	2^2	5	5
16	2^4	17	17
256	2^8	257	257
65536	2^{16}	65537	65537

擬メルセンヌ数 q はフェルマ素数

表 4: $m = 1$, ウルトラオイラー完全数

a	素因数分解	q	素因数分解
2	2	4	2^2

q は擬メルセンヌ数

表 5: $m = 2$, ウルトラオイラー完全数

a	素因数分解	q	素因数分解
2	2	5	5
4	2^2	7	7
8	2^3	11	11
16	2^4	19	19
64	2^6	67	67
128	2^7	131	131
4096	2^{12}	4099	4099
32768	2^{15}	32771	32771
65536	2^{16}	65539	65539

表 6: $m = 3$, ウルトラオイラー完全数

a	素因数分解	a	素因数分解
2	2	6	$2 * 3$

表 7: $m = 4$, ウルトラオイラー完全数

a	素因数分解	a	素因数分解
2	2	7	7
8	2^3	13	13
32	2^5	37	37
2048	2^{11}	2053	2053

2 $m = -7$ で奇跡が起きる

ウルトラオイラー完全数でもスーパーオイラー完全数のときのように解が明らかに無限に出てくる場合があるだろうか. 私は多分ないだろうと思ったがパソコンで計算したら $m = -7$ で奇跡が起きた. これには本当に驚いた. 発見の日と場所を書いておく.

2017 年 12 月 23 日 天皇誕生日, 西国分寺駅に近い都立多摩図書館において.

$2\varphi(\varphi(2\varphi(a) + m + 1)) - m) = a$ の方程式に $m = -7$ を代入する. $2\varphi(\varphi(2\varphi(a) - 6)) + 7) = a$.

$A = 2\varphi(a) + m + 1 = 2\varphi(a) - 6$,

$B = \varphi(2\varphi(a) + m + 1)) - m = \varphi(A) - m = \varphi(A) + 7$,

$2\varphi(B) = a$ が成り立つ.

パソコンの計算によると $a = 4p$ と素数 p で書ける.

$A = 2\varphi(4p) - 6 = 4p - 10$, $q = 2p - 5$ は素数のようだ. 証明なしで使う.

$B = \varphi(2q) + 7 = q + 6 = r$ も素数のようだ. 証明なしで使う.

$2\varphi(B) = 2r - 2 = 2(q + 6) - 2 = 2q + 10 = 2(2p - 5) + 10 = 4p = a$.

これによって, 次の命題が証明できた.

表 8: , $m = -7$, ウルトラオイラー完全数

$a = 4p$	素因数分解	$4p - 10$	$2p - 5 = q$	$r = 2p - 5 + 6$	$2r - 2$
20	$2^2 * 5$	10	5	11	20
44	$2^2 * 11$	34	17	23	44
92	$2^2 * 23$	82	41	47	92
116	$2^2 * 29$	106	53	59	116
212	$2^2 * 53$	202	101	107	212
356	$2^2 * 89$	346	173	179	356
524	$2^2 * 131$	514	257	263	524
716	$2^2 * 179$	706	353	359	716
932	$2^2 * 233$	922	461	467	932
1124	$2^2 * 281$	1114	557	563	1124
1724	$2^2 * 431$	1714	857	863	1724
1772	$2^2 * 443$	1762	881	887	1772
1964	$2^2 * 491$	1954	977	983	1964
2036	$2^2 * 509$	2026	1013	1019	2036
2372	$2^2 * 593$	2362	1181	1187	2372
2564	$2^2 * 641$	2554	1277	1283	2564
2612	$2^2 * 653$	2602	1301	1307	2612
2732	$2^2 * 683$	2722	1361	1367	2732
2876	$2^2 * 719$	2866	1433	1439	2876
2972	$2^2 * 743$	2962	1481	1487	2972

命題 2 素数 p があり, $q = 2p - 5, r = 2p + 1$ の 3 個がすべて素数の場合, $a = 4p$ は $m = -7$ のときのウルトラオイラー完全数である.

平行移動 $m = -7$ のウルトラオイラー完全数 a はパソコンの計算によると無限にあるらしい. しかしその証明はウルトラ困難であろう.

3　$m=-7$ のときウルトラオイラー完全数の決定

定理 1 $m=-7$ のウルトラオイラー完全数 a は $4p$ と奇数素数でかけて p はウルトラ三つ子素数の長兄となる

Proof.

$m=-7$ のウルトラオイラー完全数の方程式は次のとおり.

$A=2\varphi(a)-6,\ B=\varphi(A)+7,2\varphi(B)=a.$

$B>2$ のとき, $a=2\varphi(B)$ は 4 の倍数になる.

1). $a=4k$ と書ける. k が奇数の場合.

$4,k$ は互いに素なので, $A=2\varphi(a)-6=4\varphi(k)-6,\ t=2\varphi(k)-3$ は奇数であり, $A=2t.$

$B=\varphi(A)+7=\varphi(t)+7, 2\varphi(B)=4k$ により, $\varphi(B)=2k.$

さらに $2k=\varphi(B)\le B-1=\varphi(t)+6\le t+5.$

$t=2\varphi(k)-3$ を使うと,

$$2k\le t+5=t=2\varphi(k)-3+5=2\varphi(k)-2.$$

これより, $\varphi(k)-1=k$ が成り立ち, それにつられて, 不等号が等号になって,

$\varphi(t)=t-1,\varphi(B)=B-1.$ よって, k,t,B は素数で, $B=\varphi(t)+7=t+6,\ t=2\varphi(k)-3=2k-5.$

そこで素数らしい記号として

$k=p,t=q,B=r$ を使うと, $a=4p,q=2p-5,r=B=q+6=2p+1.$

$(p,q=2p-5,r=2p+1)$ はウルトラ三つ子素数.

2). $a=2^{\varepsilon}k$, k が奇数とし, $\varepsilon\ge 3$ の場合に矛盾を導く.

$A=2\varphi(a)-6=2^{\varepsilon}k\varphi(k)-6,\ t=2^{\varepsilon-1}k\varphi(k)-3$ は奇数であり, $A=2t.\ \varphi(B)=2^{\varepsilon-1}k.$

$2^{\varepsilon-1}k=\varphi(B)\le B-1=\varphi(t)+6\le t+5=2^{\varepsilon-1}\varphi(k)+2.$

よって,

$2^{\varepsilon-1}k\le 2^{\varepsilon-1}\varphi(k)+2$ をえるので

$$k\le\varphi(k)+\frac{2}{2^{\varepsilon-1}}=\varphi(k)+\frac{1}{2^{\varepsilon-2}}.$$

$\varepsilon\ge 3$ とすると, $\frac{1}{2^{\varepsilon-2}}<1$ なので $k\le\varphi(k)\le k-1$ で矛盾.

3.1　$m=-11$ のとき

$m=-11$ のとき $a=8p$ となるらしい. 読者の研究材料としよう.

3.2　$m=-19$ のとき

$m=-19.\ a=16p;$ ここで例外が起きる.

パソコンの計算による表を見ると $a>40$ のとき $a=16p$ と素数 p で書ける.

$A=2\varphi(16p)-18=16p-16-18=28p-17-34=2q,\ q=8p-17$ は素数のようだ. 証明なしで使う.

表 9: , $m = -11$, ウルトラオイラー完全数

a	素因数分解	p	$q = 4p - 9$	B	C
24	$2^3 * 3$	3	3	13	24
56	$2^3 * 7$	7	19	29	56
104	$2^3 * 13$	13	43	53	104
296	$2^3 * 37$	37	139	149	296
344	$2^3 * 43$	43	163	173	344
584	$2^3 * 73$	73	283	293	584
632	$2^3 * 79$	79	307	317	632
776	$2^3 * 97$	97	379	389	776
1016	$2^3 * 127$	127	499	509	1016
1112	$2^3 * 139$	139	547	557	1112
1304	$2^3 * 163$	163	643	653	1304
1592	$2^3 * 199$	199	787	797	1592
2984	$2^3 * 373$	373	1483	1493	2984
3272	$2^3 * 409$	409	1627	1637	3272
3464	$2^3 * 433$	433	1723	1733	3464
3992	$2^3 * 499$	499	1987	1997	3992

$B = \varphi(2q) + 19 = q - 1 + 19 = q + 18 = 8p + 1 = r$ も素数のようだ. 証明なしで使う.
$C = 2\varphi(B) = 2r - 2 = 2(8p + 1) - 2 = 16p = a$.
これによって, 次の命題が証明できた.

命題 3 素数 p があり, $q = 8p - 17, r = 8p + 1$ ともに素数の場合, $a = 16p$ は $m = -7$ のときのウルトラオイラー完全数である.

定理 2 $m = -19$ のウルトラオイラー完全数 a は $8p$ と奇数素数 p で書け p はウルトラ三つ子素数の長兄となる

Proof.
$m = -19$ のウルトラオイラー完全数の方程式は次のとおり.
$A = 2\varphi(a) - 18$, $B = \varphi(A) + 9$,$2\varphi(B) = a$.
$B > 2$ のとき, $a = 2\varphi(B)$ は 4 の倍数になる.

1). $a = 4k$ と書ける. k が奇数の場合.
$4, k$ は互いに素なので, $A = 2\varphi(a) - 18 = 4\varphi(k) - 18$, $t = 2\varphi(k) - 9$ は奇数であり, $A = 2t$. ゆえに $\varphi(A) = \varphi(t)$.
$B = \varphi(A) + 19 = \varphi(t) + 19, 2\varphi(B) = a = 4k$ により, $\varphi(B) = 2k$.
さらに $2k = \varphi(B) \leq B - 1 = \varphi(t) + 18 \leq t + 17$.
$t = 2\varphi(k) - 9$ を使うと,

$$2k \leq t + 17 = t = 2\varphi(k) - 9 + 17 = 2\varphi(k) + 8.$$

表 10: ,$m=-19$, ウルトラオイラー完全数, $A=2q$

a C	素因数分解	p	$q=8p-17$	B
16	2^4			
40	2^3*5			
80	2^4*5	5	23	41
176	2^4*11	11	71	89
1712	2^4*107	107	839	857
2096	2^4*131	131	1031	1049
6416	2^4*401	401	3191	3209
7856	2^4*491	491	3911	3929
9872	2^4*617	617	4919	4937
10832	2^4*677	677	5399	5417
13136	2^4*821	821	6551	6569
15152	2^4*947	947	7559	7577
18992	2^4*1187	1187	9479	9497
25616	2^4*1601	1601	12791	12809
29936	2^4*1871	1871	14951	14969
33296	2^4*2081	2081	16631	16649
33776	2^4*2111	2111	16871	16889
39152	2^4*2447	2447	19559	19577
40496	2^4*2531	2531	20231	20249
43856	2^4*2741	2741	21911	21929
44816	2^4*2801	2801	22391	22409
45392	2^4*2837	2837	22679	22697

これより,

$$k \le \varphi(k)+4.$$

よって $co\varphi(k)=k-\varphi(k)\le 4$.

$co\varphi(k)$ の値で分類する.

1. $co\varphi(k)=4$. このとき $k=8,6$.

$k=8$ のとき, $t=2\varphi(k)-9=-1$. 矛盾.

$k=6$ のとき, $t=2\varphi(k)-9=-5$. 矛盾.

2. $co\varphi(k)=3$. このとき $k=9$.

$k=9$ のとき, $t=2\varphi(k)-9=3, a=4k=36, A=6, B=2+19=21, \varphi(B)=12, 2\varphi(B)=24\ne a=36$.

2. $co\varphi(k)=2$. このとき $k=4, t=2\varphi(k)-9=-1$. 矛盾

3. $co\varphi(k)=1$. このとき k: 素数. $\varphi(k)=k-1, A=4k-22, t=2k-11, A=2t$.

$2k=\varphi(B)\le B-1=\varphi(t)+18\le t+17, B\le t+18=2k+7$.

$\varphi(B) = a/2 = 2k$ を使うと, $co\varphi(B) = B - \varphi(B) \leq 7$.

1. $co\varphi(B) = 7$ なら, $B = 49.\varphi(B) = 42$. $\varphi(B) = a/2 = 2k$ により $k = 21$:非素数.
2. $co\varphi(B) = 6$ なら, $B = 10.\varphi(B) = 4$. $\varphi(B) = a/2 = 2k$ により $k = 2, t = 2k - 11 = -7$:矛盾.
3. $co\varphi(B) = 5$ なら, $B = 25.\varphi(B) = 20$. $\varphi(B) = a/2 = 2k$ により $k = 10$:非素数.
4. $co\varphi(B) = 4$ なら, $B = 8, 6$. 矛盾が出る.
5. $co\varphi(B) = 1$ なら $B - 1 = \varphi(B) = 2k = t + 11, B = 2t + 12$.

$B = \varphi(A) + 19 = \varphi(t) + 19 = 2t + 11 \leq t + 18$ によって, $t \leq 7$.
$t + 11 = 18, 16.14, 12, 10$ これから $k = \dfrac{t+11}{2}$:素数, を求めると,
$k = 7, 5.$, $k = 7, a = 28; k = 5, a = 10$. どれも解にならない.
2). $a = 2^{\varepsilon}k, k:$ が奇数, $\varepsilon \geq 3$ の場合.
$\varphi(k) - 1 = k$ が成り立ち, それにつられて, 不等号が等号になって,
$\varphi(t) = t-1, \varphi(B) = B-1$. よって, k, t, B は素数で, $B = \varphi(t)+7 = t+6, t = 2\varphi(k)-3 = 2k-5$.
そこで素数らしい記号として
$k = p, t = q, B = r$ を使うと, $a = 4p, q = 2p - 5, r = B = q + 6 = 2p + 1$.
$(p, q = 2p - 5, r = 2p + 1)$ はウルトラ三つ子素数.

3.3 $m=-21$ の場合

$m=-21$. $a=16p$ となりここでも例外が起きる.

表 11: $m=-21$, ウルトラオイラー完全数

a	素因数分解	p
40	$2^3 * 5$	
80	$2^4 * 5$	5
272	$2^4 * 17$	17
464	$2^4 * 29$	29
1712	$2^4 * 107$	107
2384	$2^4 * 149$	149
3824	$2^4 * 239$	239
7184	$2^4 * 449$	449
7664	$2^4 * 479$	479
8144	$2^4 * 509$	509
9872	$2^4 * 617$	617
10832	$2^4 * 677$	677
15152	$2^4 * 947$	947
20624	$2^4 * 1289$	1289
23792	$2^4 * 1487$	1487

方針
1. $a=4k, (k$:奇数$)$ 矛盾を示せ.
2. $a=8k, (k$:奇数$)$. $k=5$ を示せ.
3. $a=16k, (k$:奇数$)$. $k=p$: 素数を示せ.
4. $a=2^{\varepsilon}k, (, \varepsilon \geq 4, k$:奇数$)$. 矛盾を導け.

4 追加

意外なことに, $m=-25,-35,-37,-41,-67,-69,-73,-81,-97$ でも $a=2^e p$ 形の解がたぶん無限にあり, それぞれウルトラ 3 つ子素数を作る.

4.1 $m=-73$ の場合 のウルトラオイラー完全数

$2\varphi(\varphi(2\varphi(a)+m+1))-m)=a$ の方程式に $m=-73$ を代入する.
$2\varphi(\varphi(2\varphi(a)-72))+73)=a$.
$a>120$ のとき $a=64p$ (p は素数), と書けることが上の計算結果から推察できるので
$A=2\varphi(64p)-72=64p-64-72=64p-136=8(8p-17)$, $q=8p-17$ は素数のようだ. 証明なしで使う.
$A=8q$, $B=\varphi(8q)+73=4q-4+73=4q+69=r$ も素数のようだ. 証明なしで使う.
$C=2\varphi(B)=2r-2=2(4q+68)-2=8q+2*68=8(8p-17)+2*68=64p$.

表 12: , $m = -73$, ウルトラオイラー完全数

a	factor	p	$q = 8p - 17$	$r = 4q + 69$	$2r - 2$
120	$2^3 * 3 * 5$	15			
192	$2^6 * 3$	3	7	97	192
704	$2^6 * 11$	11	71	353	704
5312	$2^6 * 83$	83	647	2657	5312
7232	$2^6 * 113$	113	887	3617	7232
12224	$2^6 * 191$	191	1511	6113	12224
14912	$2^6 * 233$	233	1847	7457	14912
28352	$2^6 * 443$	443	3527	14177	28352
29504	$2^6 * 461$	461	3671	14753	29504
32192	$2^6 * 503$	503	4007	16097	32192
44864	$2^6 * 701$	701	5591	22433	44864
60992	$2^6 * 953$	953	7607	30497	60992
65984	$2^6 * 1031$	1031	8231	32993	65984
82112	$2^6 * 1283$	1283	10247	41057	82112
95552	$2^6 * 1493$	1493	11927	47777	95552
96704	$2^6 * 1511$	1511	12071	48353	96704

5 諸例

表 13: ウルトラオイラー完全数

m	$a = 4p$	A	q	r
-21	$16p$	$4q$	$4p - 9$	$8p + 1$
-25	$16p$	$8q$	$2p - 5$	$8p + 1$
-81	$64p$	$16q$	$4p - 9$	$32p + 1$
-73	$64p$	$8q$	$8p - 17$	$32p + 1$
-67	$64p$	$2q$	$32p - 65$	$32p + 1$
-41	$32p$	$2q$	$4p - 9$	$32p + 1$
-67	$64p$	$8q$	$32p - 65$	$32p + 1$
-41	$32p$	$8q$	$4p - 9$	$16p + 1$
-35	$32p$	$2q$	$16p - 33$	$16p + 1$
-19	$16p$	$2q$	$8p - 17$	$8p + 1$
-11	$8p$	$2q$	$4p - 9$	$4p + 1$
-7	$4p$	$2q$	$2p - 5$	$2p + 1$

パソコンによる計算を行い上のような表ができた. これから次の定理ができた.

定理 3 $-m=2^e+2^f+1, e>f>1$ とおく．$p, q=2^{e-f}q-2^{e+1-f}-1$ がともに素数として $a=2^ep$ が平行移動 m の ウルトラオイラー完全数とすると，$A=2^fq, B=\varphi(A)-m=2^{e-1}p+1$ となり B は素数となるのでこれを r とおく.$2\varphi(B)=2r-2=a$ を満たす．

Proof

$$\begin{aligned}A&=2\varphi(a)+m+1\\&=2^e(p-1)-(2^e+2^f+1)+1\\&=2^ep-2^{e+1}-2^f\\&=2^f(2^{e-f}p-2^{e+1-f}-1)\\&=2^fq.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B=\varphi(A)-m&=2^{f-1}(q-1)+2^e+2^f+1\\&=2^{f-1}q-2^{f-1}+2^e+2*2^{f-1}+1\\&=2^{f-1}q+2^e+2^{f-1}+1\\&=2^{e-1}p+1=r.\end{aligned}$$

$2\varphi(B)=2r-2=a$ を満たす．

End

6　スーパー化

スーパー完全数の考えは意外にも有用であった．

完全数の定義の復習を行う．

$a=2^e, q=\sigma(a)+m$ が素数のとき $\alpha=aq$ が平行移動 m の狭義の完全数である．このとき $\sigma(\alpha)=2\alpha-m$ を満たす．

一般にこの式を満たす α を平行移動 m の広義の完全数と定義する．

これを念頭において，狭義の完全数に戻り 2 べき部分と素数部分に分けて考えてみる．

2 べき部分 $a=2^e$ の満たす方程式は，$q=\sigma(a)+m$ が素数という性質を使うので，$\sigma(q)=q+1$ を活かすことが必要である．

底を 2 から素数 P にする．

もっとも簡単な場合，すなわち,$P=2$，オイラー関数の場合の場合の一般化を考える．

$\varphi(P^e)=\overline{P}P^{e-1}$ が成り立つので，$a=P^e, W=P^{e+1}-1$ を以下で活用する．

$q=\overline{P}P^e+m+1$ を素数と仮定する．

使うべき式は $\varphi(q)=q-1$ である．

$q=\overline{P}P^e+m+1=P\varphi(a)+m+1$.

$\varphi(q)=q-1=\overline{P}P^e+m=\overline{P}a+m$ なので，

$A=P\varphi(a)+m+1$ を a のパートナと考え $\varphi(A)=q-1$ となるので $q+1=\overline{P}a+m$.

定義 1 $A=P\varphi(a)+m+1$ と $\varphi(A)=q-1=\overline{P}a+m$ を満たすとき a を平行移動 m の広義のスーパーオイラー完全数と定義する

今度はにシャドウ B も考えて $B=\varphi(A)+1$ とおき,$\varphi(B)=\overline{P}a+m$ も満たす場合を考える.

定義 2 $A=P\varphi(a)+m+1$ と $B=\varphi(A)+1,\varphi(B)=\overline{P}a+m$ を満たすとき a を平行移動 m の広義のウルトラオイラー完全数ニュータイプと定義する

$\varphi(A)$ を求めるので $A\geq 1$ は常に仮定されていると考える.

7　$P=2$ のウルトラオイラー完全数ニュータイプ

命題 4 $m=-3$ のときウルトラオイラー完全数ニュータイプ a は

i. $a=4$

ii. $a=p,A=2q,B=r,p=2+q,r=q.$

Proof.

$m=-3$ なので

$A=P\varphi(a)+m+1=2\varphi(a)-2$ と $B=\varphi(A)+1,\varphi(B)=\overline{P}a+m=a-3$

を満たす.

$a>2$ によって $\varphi(a)$ は偶数なので $\varphi(a)=2^{\varepsilon}k,(k:$ 奇数$)$ とおく.

$A=2^{\varepsilon+1}k-2=2t,t=2^{\varepsilon}k-1).$

$1.k>1$ とする.

t は奇数なので, $\varphi(A)=\varphi(t).$

$t>1$ と仮定して

$$\varphi(B)\leq B-1=\varphi(A)=\varphi(t)\leq t-1.$$

$$a-3=\varphi(B)\leq\leq B-1=\varphi(A)=\varphi(t)\leq t-1=2^{\varepsilon}k-2=\varphi(a)-2.$$

これより

$$a-3\quad\leq\varphi(a)-2.$$

ゆえに $a-3\quad=\varphi(a)-2$. そして, 等号が成り立ち t,B はともに素数で $A=B$. $B-1=\varphi(A)=\varphi(t)=t-1$. したがって $a=p,t=q,B=r$ とおけば $q=r=p-2$.

表 14: $m = -2$, ウルトラオイラー完全数

a	素因数分解	q	素因数分解
4	2^2	3	3
8	2^3	7	7
32	2^5	31	31
128	2^7	127	127
8192	2^{13}	8191	8191

8 平行移動 m ,底 を素数 P とするスーパーオイラー劣完全数

平行移動 m で P を底とするスーパーオイラー劣完全数の定義は次の通り．指数 e について, $a=P^e$ として, 平行移動 m とするとき $q=P\varphi(a)+1+m$ を素数と仮定する.

$\varphi(q)=q-1$ を利用する.

$A=P\varphi(a)+1+m$ をパートナとし, $\varphi(A)=q-1$ に注目する.

$q-1=\overline{P}P^e+m=\overline{P}a+m$ により $\varphi(A)=P\overline{P}a+m$ を得る.

定義 3 $A=P\varphi(a)+1+m$ とし, $\varphi(A)=\overline{P}a+m$ を満たす a を平行移動 m ,底 を素数 P とするスーパーオイラー劣完全数という.

定義 4 $A = P\varphi(a) + 1 + m$ とし, $B = \varphi(A) + 1, \varphi(B) = \overline{P}a + m$ を満たす a を平行移動 m , 底を素数 P とするウルトラオイラー劣完全数, ニュータイプという.

命題 5 ウルトラオイラー劣完全数, ニュータイプにおいて,$a = P^e$ となるならパートナー A は素数になる.

Proof.
$a = P^e$ を代入して $A = \overline{P}P^e + 1 + m$.
$\varphi(B) = \overline{P}a + m = \overline{P}P^e + m$ なので

$$A - 1 = \overline{P}P^e + m = \varphi(B) \leq \varphi(A).$$

$A - 1 = \varphi(A)$ が成り立ち, A は素数. とくに $A = B$.
End
これの逆も成り立つ.

命題 6 A が素数なら $A = B$. かつ $a = P^\varepsilon$ と書ける.

Proof.
仮定から, $P\overline{a} = \overline{P}a$. $a = P^\varepsilon L$, (L, P):互いに素 と書けるので容易に $L = 1$.

9　$P=2$ のとき

$P=2$ なら, $A=2\varphi(a)+1+m$ とし, $B=\varphi(A)+1, \varphi(B)=a+m$ を満たす.

定理 4 $P=2$, m は偶数なら, $a=2^{\varepsilon}$

Proof.
$\varphi(B)=a+m$ によって, a は偶数 $a=2^{\varepsilon}L$, L は奇数.

$$A=2\varphi(a)+1+m=2^{\varepsilon}\varphi(L)+1+m.$$

$$\begin{aligned} a+m &= 2^{\varepsilon}L+m \\ &= \varphi(B) \leq B-1 \\ &= \varphi(A) \leq A-1 \\ &= 2^{\varepsilon}\varphi(L)+m \end{aligned}$$

ゆえに,

$$2^{\varepsilon}L+m \leq 2^{\varepsilon}\varphi(L)+m.$$

$2^{\varepsilon}L \leq 2^{\varepsilon}\varphi(L)$ により $L=1$. したがって, a は 2 のべき.
End

表 15: $P = 2, m = -6$,Ultra Euler subperfect, NT

a	factor	A	factor	B	factor
8	2^3	3	3	3	3
16	2^4	11	11	11	11
64	2^6	59	59	59	59
256	2^8	251	251	251	251

表 16: $P=2, m=-5$,Ultra Euler subperfect, NT

a	factor	A	factor	B	factor
9	3^2	8	2^3	5	5
11	11	16	2^4	9	3^2
17	17	28	2^2*7	13	13
41	41	76	2^2*19	37	37
197	197	388	2^2*97	193	193
281	281	556	2^2*139	277	277
317	317	628	2^2*157	313	313
401	401	796	2^2*199	397	397
461	461	916	2^2*229	457	457

表 17: $P=2, m=-4$,Ultra Euler subperfect, NT

a	factor	A	factor	B	factor
8	2^3	5	5	5	5
16	2^4	13	13	13	13
32	2^5	29	29	29	29
64	2^6	61	61	61	61

表 18: $P = 2, m = -3$,Ultra Euler subperfect, NT

a	factor	A	factor	B	factor
4	2^2	2	2	2	2
5	5	6	$2 * 3$	3	3
7	7	10	$2 * 5$	5	5
13	13	22	$2 * 11$	11	11
19	19	34	$2 * 17$	17	17
31	31	58	$2 * 29$	29	29
43	43	82	$2 * 41$	41	41
61	61	118	$2 * 59$	59	59
73	73	142	$2 * 71$	71	71

表 19: $P=2, m=-2$,Ultra Euler subperfect, NT

a	factor	A	factor	B	factor
4	2^2	3	3	3	3
8	2^3	7	7	7	7
32	2^5	31	31	31	31
128	2^7	127	127	127	127
8192	$2^1 3$	8191	8191	8191	8191

表 20: $P = 2, m = -1$,Ultra Euler subperfect, NT

a	factor	A	factor	B	factor
2	2	2	2	2	2
3	3	4	2^2	3	3
5	5	8	2^3	5	5
17	17	32	2^5	17	17
257	257	512	2^9	257	257

表 21: $P = 2, m = 0$,Ultra Euler subperfect, NT

a	factor	A	factor	B	factor
2	2	3	3	3	3
4	2^2	5	5	5	5
16	2^4	17	17	17	17
256	2^8	257	257	257	257

命題 7

10　$P = 3$ のとき

10.1　$m = -10$

$P = 3, m = -10$ の場合はウルトラオイラー劣完全数, ニュータイプの式は次の通り.
$A = 3\varphi(a) - 9$ とし, $B = \varphi(A) + 1, \varphi(B) = 2a - 10$.

表 22: $P = 3, m = -10$,Ultra Euler subperfect, NT

$a = p$	$A = 3q$	$B = r$
11	$3 * 7$	13
23	$3 * 19$	37
41	$3 * 37$	73
83	$3 * 79$	157
101	$3 * 97$	193
233	$3 * 229$	457
311	$3 * 307$	613

Proof
$a = p$ を奇素数と仮定して解を決定する.
$A = 3\varphi(a) - 9 = 3p - 12 = 3q, q = p - 4$ とおく. q は奇数である. これが素数になることを示す.
$\varphi(A) = 2\varphi(q)$ に注意して
$2p - 10 = \varphi(B) \leq B - 1 = \varphi(A) = 2\varphi(q)$ によれば $p - 5 \leq \varphi(q)$.
$q = p - 4$ なので, $q - 1 \leq \varphi(q) \leq q - 1$ によって, $\varphi(q) = q - 1$. これから $2p - 10 = \varphi(B) = B - 1$ にもなり, $q, r = B = 2p - 1 = 2q + 7$ はともに素数.
さらに, $p = q + 4, q, r = 2q + 7$ ウルトラ三つ子素数で,a のパートナーとシャドウもわかった:$a = p, A = 3q, B = 2q + 7$.

表 23: $P = 3, m = -22$,Ultra Euler subperfect, NT

a	A	B
29	$3^2 * 7$	37
41	$3^2 * 11$	61
47	$3^2 * 13$	73
59	$3^2 * 17$	97
101	$3^2 * 31$	181
131	$3^2 * 41$	241
149	$3^2 * 47$	277
167	$3^2 * 53$	313

$m = -22$ のとき $a = p$ を奇素数と仮定して解を決定する.
$A = 3\varphi(a) - 21 = 3p - 24 = 3R, R = p - 8$ とおく. R は奇数である. これが $3q$ (q : 素数) と書けることを示す.

1. R は 3 で割れないと仮定する.
$\varphi(A) = 2\varphi(R)$ に注意して $2p - 22 = \varphi(B) \leq B - 1 = \varphi(A) = 2\varphi(R)$ によれば

$$R - 3 = p - 11 \leq \varphi(R) \leq R - 1.$$

これより, $\varphi(R) = R - 1, R - 2, R - 3.$
i. $\varphi(R) = R - 3$ のとき
$R = 9.$ $p = R + 8 = 17.$ $A = 3\varphi(p) - 21 = 48 - 21 = 27.$

$$B = \varphi(A) + 1 = 19, \varphi(B) = 18.$$

$\varphi(B) = 2(p - 11) = 12$ となり矛盾.
ii. $\varphi(R) = R - 2$ のとき $R = 4.p = 12$:素数にならない.
iii. $\varphi(R) = R - 1$ のとき R:素数.
$\varphi(B) = 2(p - 11).$ 一方, $B - 1 = \varphi(A) = \varphi(A) = 2R - 2 = 2(p - 9).$
$B = 2p - 17, \varphi(B) = 2p - 22$ により, $B - \varphi(B) = 5.$
よって, $B = 25, B = 2p - 17.$ $p = 21$ となり矛盾.

2. $R = 3^{\varepsilon}k,$

$$k \text{ は 3 で割れないと仮定する.}$$

$A = 3R = 3^{\varepsilon+1}k$ により
$\varphi(A) = 2 * 3^{\varepsilon}\varphi(k).$

$$2p - 22 = \varphi(B) \leq \varphi(A) = 2 * 3^{\varepsilon}\varphi(k).$$

$p - 8 = R = 3^{\varepsilon}k$ によって, $2p - 16 = 2 * 3^{\varepsilon}k.$
$2p - 16 = 2 * 3^{\varepsilon}k$ から $2p - 22 \leq 2 * 3^{\varepsilon}\varphi(k)$ を引くと

$$6 \geq 2 * 3^{\varepsilon}(k - \varphi(k)) \geq 2 * 3^{\varepsilon}.$$

よって, $\varepsilon = 1, k - \varphi(k) = 1.$
k は素数で,$p - 8 = 3k.$ ついでに B も素数となり, $2p - 22 = \varphi(B) = B - 1.$ よって,$B = 2p - 21 = 2(8 + 3k) - 21 = 6k - 5.$
$k = q, B = r$ とおくとき, $(q, p = 8 + 3q, r = 6q - 5)$ はウルトラ三つ子素数.

$q = p - 4$ なので, $q - 1 \leq \varphi(q) \leq q - 1$ によって, $\varphi(q) = q - 1$. これから $2p - 10 = \varphi(B) = B - 1$ にもなり, $q, r = B = 2p - 1 = 2q + 7$ はともに素数.

さらに, $p = q + 4, q, r = 2q + 7$ ウルトラ三つ子素数で,a のパートナーとシャドウもわかった:$a = p, A = 3q, B = 2q + 7$.

11　ウルトラオイラ完全数 古典型

ウルトラオイラ完全数の方程式. $P=2$ のとき, $A=2\varphi(a)+m+1, B=\varphi(A)-m$ とおくと $2\varphi(B)=a$ となる.

次に底の 2 を素数 P に一般化してウルトラオイラ完全数の方程式を考えてみる.

$a=P^e$ とおき, $q=\overline{P}P^e+m+1$ を素数と仮定する.

$A=P\varphi(a)+m+1$ とおく (実は $A=q$).

$\varphi(A)=q-1$ なので, $B=\varphi(A)-m$ とおくと, $B=q-1-m=\overline{P}P^e=P\varphi(a)=a\overline{P}$.

$\varphi(B)=\varphi(a\overline{P})=\varphi(a)\varphi(\overline{P})$ によって,

$$P\varphi(B)=P\varphi(a\overline{P})=P\varphi(a)\varphi(\overline{P})=\overline{P}a\varphi(\overline{P}).$$

そこで,

$A=P\varphi(a)+m+1, B=\varphi(A)-m, P\varphi(B)=\varphi(\overline{P})\overline{P}a$ を満たす a をウルトラオイラ完全数 古典型 (classical type) という. あるいは ウルトラオイラ完全数 ザクともいう.

$P=2$ なら, $A=2\varphi(a)+m+1, B=\varphi(A)-m, 2\varphi(B)=a$.

$P=3$ なら, $A=3\varphi(a)+m+1, B=\varphi(A)-m, 3\varphi(B)=2a$.

11.1 $m = -19$ のとき

$A = 3\varphi(a) - 18, B = \varphi(A) + 19, 3\varphi(B) = 2a$ を満たす
パソコンでの表は次の通り.

表 24: $P = 3, m = -19$,Ultra Euler subperfect, Clasical Type

a	$factor$	A	$factor$	B	factor
63	$3^2 * 7$	90	$2 * 3^2 * 5$	43	43
87	$3 * 29$	150	$2 * 3 * 5^2$	59	59
117	$3^2 * 13$	198	$2 * 3^2 * 11$	79	79
243	3^5	468	$2^2 * 3^2 * 13$	163	163
549	$3^2 * 61$	1062	$2 * 3^2 * 59$	367	367
657	$3^2 * 73$	1278	$2 * 3^2 * 71$	439	439
927	$3^2 * 103$	1818	$2 * 3^2 * 101$	619	619
1359	$3^2 * 151$	2682	$2 * 3^2 * 149$	907	907

最初の 2 段と 4 段は例外扱いがいいらしい． それ以外で 3 のべきを除くと, $a = 3^2p, A = 2 * 3^2 * q, B = r$ が成り立ちそうである. 次の結果が出た.

$a = 3^2p$, p $\neq 3$, 素数, と仮定する.

$A = 3\varphi(a) - 18 = 3\varphi(9 * p) - 18 = 18(p - 2)$.

$q = p - 2$ は 6 互いに素とする.$A = 18q, \varphi(A) = 6\varphi(q), B = \varphi(A) + 19 = 6\varphi(q) + 19$.

$18p = 3a = 3\varphi(B) \leq 3B - 3 = 18\varphi(q) + 3 * 18$ なので

$$p = q + 2 \leq \varphi(q) + 3$$

.

$q \leq \varphi(q)+1$ により等号が成り立ち, ついでに $B = \varphi(B)+1$. $q = p-2, B = 6\varphi(q)+19 = 6q+13$. $r = B$ と書けば

$(q, p = 2 + q, r = 6q + 13)$ はウルトラ三つ子素数.

表 25: $(q, p = 2+q, r = 6q+13)$ はウルトラ三つ子素数

q	p	r
3	5	31 (これは無い)
5	7	43
11	13	79
59	61	367
71	73	439
101	103	619
149	151	907
179	181	1087
239	241	1447
269	271	1627
281	283	1699

$q = p-2$ は 6 互いに素でないときは, q は素数なので, $q = 3, p = 5$. このとき, $A = 2*3^3$ なので上の論法が破綻する. したがって,$(q = 3, p = 5, r = 31)$ の出る完全数はない.

定理 5 $P = 3, m = -19$, ウルトラオイラー古典型完全数は $a = 3*29$, と $a = 3p$ ここで $(q, p = 2+q, r = 6q+13)$ はウルトラ三つ子素数

Proof.

条件式から, a は 3 の倍数. なので 1. $a = 3Q, (Q, 3)$:互いに素, 2. $a = 3^{\varepsilon}Q, \varepsilon \geq 2, (Q, 3)$:互いに素, に分けて考える.

1. $a = 3p, p \neq 3$: 素数, とする. $a = 6$ は解ではないので, $p \geq 5$.

$A = 3\varphi(a) - 18 = 6\varphi(Q) - 18 = 6(p-4)$. $R = p-4$ は奇数. $A = 6R$, R は 3 で割れないと仮定する.

$B = \varphi(A) + 19 = 2\varphi(R) + 19$ になり

$$6p = 2a = 3\varphi(B) \geq 3(B-1) = 3(2\varphi(R) + 18).$$

$6p = 6(R+4) \geq 3(B-1) = 3(2\varphi(R) + 18)$ により,
$R + 4 \geq \varphi(R) + 9$ により,

$$co\varphi(R) = R - \varphi(R) \geq 5.$$

$co\varphi(R) = 5$ なら, $R = 25.p = 29, a = 3*29$
$co\varphi(R) = 4$ なら, $R = 8, 10$. R は奇数に反する.
$co\varphi(R) = 1$ の場合が残る.