(A,B,C) 完全数 と惑星移住計画

飯高 茂

2019/12/12

1　高校生のための完全数入門

6 の約数は, 1,2,3 (6 を除外する)　でこれらを足すと,
$1+2+3=6$.　そして 6 が現れる.

6 の約数に 6 を入れる方が普通であり. これらを足すと, $1+2+3+6=12$. これを 2 で割ると $12/2=6$ となり 6 が現れる.
約数 1,3,3 すべて加えると 6 が復元する.

これは不思議な性質で 6 の持つ完全性を表している.

自然数 a に対し自身以外の約数を足すと a になるとき a を完全数と言い, 完全数を数多く見いだすことに古今の数学者は多くの精力を傾けた.
その結果, 6 の他に 完全数として 28,496,8128 が紀元前に発見された.

しかもこれらの完全数は $p=2^{e+1}-1$ となる素数 p によって 2^ep と表せることがわかり,
この形の素因数分解を持つ数は完全数になること
BC 3 世紀のユークリッドによる数学原論に書かれている.

自然数 a に対しその約数の和を $\sigma(a)$ と書き, これを関数と見てユークリッド関数という.
$a=2^e$ とおく. $q=\sigma(a)=2^{e+1}-1$ を素数と仮定すると, $\alpha=aq$ は完全数になる.
すでに述べたようにこれはユークリッドの原論の最後に書かれた数学である. そこで, この形の完全数をユークリッドの完全数と呼ぶ.
この事を証明するには, 素因数分解の一意性, 等比数列の和の公式, ユークリッド関数の乗法性などが必要である.
実際 $\sigma(a)=2^{e+1}-1$ を素数としてこれを p とおき, $\alpha=ap$ と書くと

$$\sigma(\alpha)=\sigma(a)\sigma(p)=p(p+1)=p(2^{e+1})=2p2^e=2\alpha.$$

よって, $\sigma(\alpha)=2\alpha$. これによると次の結果を得る.

命題 1 (ユークリッド)**.** $a=2^e$ に対して $p=\sigma(a)=2^{e+1}-1$ が素数のとき $\alpha=ap$ とおくと $\sigma(\alpha)=2\alpha$ を満たす. ゆえに α は完全数.

4 世紀の人, ヤンブリコスはこの逆, すなわち完全数はユークリッドの完全数に限るのではないか, と考えた.

18 世紀になって, オイラーは偶数の完全数はユークリッドの完全数になることの証明に成功した.

2019 年現在 51 個もの完全数が発見されているが奇数の完全数は見つかっていない. それゆえ奇数完全数は存在しないだろうと想像されているが, 証明はできていない.

この問題はユークリッドが 2300 年後の数学者に出した数学界最高の難問

現在でも解決の見通しすらたっていない.

私は 70 歳をもって定年退職の後, 高校生の数学研究に助言をすることを要請された.

数学研究の材料を探し完全数の変種を考えていた.

たとえば 8 の約数は 1,2,4, 8 であり 8 以外の約数を足すと $1+2+4=7$ となる.

8 にならないので完全性に少し足りない.

一般に 2 べき ($a=2^e$) について約数の和は $\sigma(a)$ は $2^{e+1}-1$ となる.

すなわち $\sigma(a)-2a=-1$ を満たす.

a は完全数になるには 1 だけ及ばないのでとても残念だ

そこで概完全数 (almost perfect numbers) という.

概完全数は 2 のべきになるかという問題も未解決の難問である.

次にオイラー (1707–1783) の時代にまで知られていた完全数を紹介する.

次のことは古代ギリシャ人も注目した重要な結果である.

- 完全数 a の末尾の数は 6,8.
- $a=2^ep$ の奇数素因子 p の末尾の数は最初を除くと, 1,7.

2 完全数の平行移動

概完全数の定義 $\sigma(a)-2a=-1$ に類似した式

$\sigma(a)-2a=1$ を満たす a は 2019 年現在, 発見されていない.

一方, $\sigma(a)-2a=-2$ や $\sigma(a)-2a=-4$ を満たす a を調べてみたら案外例が多い.

Table 1: 完全数

完全数 a	素因数分解 $(2^e p)$
6	$2 * 3$
28	$2^2 * 7$
496	$2^4 * 31$
8128	$2^6 * 127$
33550336	$2^{12} * 8191$
8589869056	$2^{16} * 131071$
137438691328	$2^{18} * 524287$
2305843008139952128	$2^{30} * 2147483647$
$---$	(By L.Euler 1707–1783)

Table 2: 完全数の平行移動 $\sigma(a) - 2a = -m$

完全数 a	素因数分解 $(2^e p)$
$m = -2$	
20	$2^2 * 5$
104	$2^3 * 13$
464	$2^4 * 29$
1952	$2^5 * 61$
650	$2 * 5^2 * 13$
$m = 0$	
6	$2 * 3$
28	$2^2 * 7$
496	$2^4 * 31$
8128	$2^6 * 127$

これらの解の素因数分解をすると $2^e q, (q$: 奇素数) の例が多くある. そこでこのような素因分解を持つ解を A 型解と呼ぶことにした.

そこでここを一般化して, 整数 m に対して $\sigma(a) - 2a = -m$ を満たす a を調べてみることにしこれを平行移動 m の完全数と呼ぶことにした.

完全数の平行移動は思ったより筋の良い問題でこれをきっかけに完全数研究が大きく進展してきた.

Table 3: 完全数の平行移動 $\sigma(a) - 2a = -m$

完全数 a	素因数分解 $(2^e p)$
m= 1	
2	2
4	2^2
8	2^3
16	2^4
32	2^5
64	2^6
m= 2	
3	3
10	$2 * 5$
136	$2^3 * 17$
32896	$2^7 * 257$
m= 4	
5	5
14	$2 * 7$
44	$2^2 * 11$
152	$2^3 * 19$
2144	$2^5 * 67$
8384	$2^6 * 131$
110	$2 * 5 * 11$
884	$2^2 * 13 * 17$
18632	$2^3 * 17 * 137$

3 (A,B,C) 完全数

与えられた 整数 (A, B, C)(最大公約数は 1 とする) に対して

$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D$ の解 a を

定数項 D の (A,B,C) (3 項完全数) という.

定数 k とそれの因子にならない素数 p について $a = kp$ が (A,B,C) 完全数になる場合の素数 p が無数にある ($a = kp$:B 型解) とする.

$A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck = 0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく.

$D_0 = A\sigma(k_0) - B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D_0$ の解を固有完全数 k_0 の (A,B,C) 宇宙完全数

とよぶ.

固有完全数 と (A,B,C) 宇宙完全数を定めることが基本課題だが定数項 D を選ぶと (A,B,C) 完全数に興味あるものが出る.

4 (0,2,1) 宇宙完全数

はじめに最も易しい場合を扱う. 定数項 D の (0,2,1) 完全数 の方程式は $2\varphi(a) - a = D$.

$k_0 = 2^e$ が 固有完全数. $D_0 = -2\varphi(k_0) = -2^e$ が宇宙定数項.

$2\varphi(a) - a = D_0 = -2^e$ が (0,2,1) 宇宙完全数の方程式で $e = \eta$, L は素数 p となり,(0,2,1) 宇宙完全数は $a = 2^e p, (p:$ 奇素数).

一方 ,$2\varphi(a) - a = D = 1$ の解 5 個はフェルマ素数の積という著しい特色を持つ.

Table 4: $2\varphi(a) - a = 1$

a	素因数分解
3	3
15	$3*5$
255	$3*5*17$
65535	$3*5*17*257$
4294967295	$3*5*17*257*65537$
83623935	$3*5*17*353*929$
6992962672132095	$3*5*17*353*929*83623937$

5 固有完全数 1 の定理

(A,B,C) 完全数の固有完全数 k_0 が 1 のときを考える.

$A\sigma(k_0) + B\varphi(k_0) - Ck_0 = A + B - C = 0$. $k_0 = 1$ なので無数の素数 p が解となり宇宙定数項 D_0 は $D_0 = A - B$.

素数 $q(\neq p)$ がありそのべき $q^\eta, (\eta > 1)$ が解と仮定すると $A = B - 1$. さらに ,$C = 2B - 1$.

逆も成り立ち, $(B-1)\sigma(a) + B\varphi(a) - (2B-1)a = -1$ は素数 p を解に持つ.

定理 1. $(B-1)\sigma(a)+B\varphi(a)-(2B-1)a = -1$ がある素数のべき $q^\varepsilon, (\varepsilon > 1)$ を解に持つと B は素数 q になり, 素数 q のすべてのべき q^η が解になる.

$B=2$ なら (1,2,3) 完全数で 固有完全数 $k_0=1$ のとき, 宇宙完全数は すべての奇素数 と 2^ε であると期待される.

定数項 $D=-2$ の解は素数の積み上げ解.

Table 5: $\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-2$ の解の表

a	素因数分解
6	$2*3$
30	$2*3*5$
870	$2*3*5*29$
745590	$2*3*5*29*857$
547931854230	$2*3*5*29*857*734897$
295923739527652742180310	$2*3*5*29*857*734897*540073984097$
9	3^2
20	2^2*5
272	2^4*17
65792	2^8*257
4295032832	$2^{16}*65537$

$\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-2$ の解はこれで尽きていると思われる.

フェルマ素数は 5 つあって, 終わりの 3 個の素数の最後は 7.

ここでは素数は 6 つあって終わりの 3 個の素数の最後は 7.