0cm

書泉講義 2019/FEBRUARY 8TH

スーパーメルセンヌ完全数

飯高 茂

1. スーパー 完全数

$a = 2^e$ は $\sigma(a) = 2a - 1$ を満たす. そこで, 一般に$\sigma(a) = 2a - 1$ を満たすa を概完全数(almost perfect number) とよぶ.

この逆が言えるか, すなわち概完全数が2^e に限るか? これはよく知られた難問である.

$p = 2^{e+1} - 1$ を素数とするとき, $\alpha = 2^e p$ はユークリッドの完全数である. ユークリッドの完全数の2べき部分 $a = 2^e$ とするとき, これは $\sigma^2(a) = 2a$ を満たす.

そこで一般に $\sigma^2(a) = 2a$ を満たすa をスーパー 完全数という.

スーパー 完全数 a が偶数なら$p = 2^{e+1} - 1$ は素数となることを D.Suryanaryana は1969年に証明しスーパー 完全数の展開へ口火を切った.

与えられた整数 m について$\sigma(a) = 2a - m$ を満たすa をm だけ平行移動した完全数という.

完全数の平行移動を考えることは意味のある発展をもたらした.

スーパー 完全数においてもその平行移動を考えることはスーパー双子素数を量産することなど重要な副産物をもたらした.

ユークリッドの完全数の2べき部分は大切であることが分かったが,残りの素数部分$p = 2^{e+1} - 1$ はメルセンヌ素数と呼ばれて, 巨大な素数の構成に重要な役を演じ続けている.

2. スーパー メルセンヌ完全数

私は,ユークリッドの完全数の素数部分であるメルセンヌ素数 $p = 2^{e+1} - 1$ を取り出して理論が作れないか考えたことが何回かある.

実際には,こんなことを考える自分はどうかしていると自虐的にもなった. しかし今回はうまく行った.これには驚いた.

重要な産物はゴジラのような完全数である.

$a = p = \sigma(2^e) + m = 2^{e+1} - 1 + m$ を奇素数とする. したがって, m は偶数になる.

$\sigma(a) = p + 1 = 2^{e+1} + m$ となるので$\sigma(a) - m = 2^{e+1}$.

$A = \sigma(a) - m$ とおくと$A = 2^{e+1}$.
$\sigma(A) = 2^{e+2} - 1$,

そこで得られた次式を スーパーメルセンヌ完全数 a の連立定義式という.

$$A=\sigma(a)-m, \sigma(A)=2a-2m+1$$

その解 a をスーパーメルセンヌ完全数. またA をそのパートナーという.

さらに$B=\sigma(A)-1$ をシャドウという.

命題 1. a が素数になる必要十分条件は $A = 2^e$.

Proof.
a が素数 p なら$\sigma(a) = a + 1, A = \sigma(a) - m = a - m + 1$.
ゆえに, $\sigma(A) = 2a - 2m + 1 = 2(a - m + 1) - 1 = 2A - 1$.

ここで概完全数の予想を使うと, $A = 2^e$.
$A = 2^e = a - m + 1 = p - m + 1$ なので, $2^e + m - 1$ が素数になる e を選べば $a = 2^e + m - 1$ が解になる.
逆も容易.
End

概完全数の予想がこのような形で役立つのはすばらしいことだと思う.

3. 計算例

いろいろな m 　について m だけ平行移動したスーパーメルセンヌ完全数を計算してみた. a が素数なら $A = 2^e$ になる場合が標準的である. a が素数でない場合を $*$ で印した.

Table 1. $P = 2, m = -18$ Super Mersenne perfect numbers

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = -18$					
13	13	32	2^5	62	$2 * 31$
109	109	128	2^7	254	$2 * 127$
2029	2029	2048	2^{11}	4094	$2 * 23 * 89$
$m = -16$					
47	47	64	2^6	126	$2 * 3^2 * 7$
239	239	256	2^8	510	$2 * 3 * 5 * 17$
4079	4079	4096	2^{12}	8190	$2 * 3^2 * 5 * 7 * 13$
$m = -14$					
17	17	32	2^5	62	$2 * 31$
113	113	128	2^7	254	$2 * 127$
241	241	256	2^8	510	$2 * 3 * 5 * 17$
1009	1009	1024	2^{10}	2046	$2 * 3 * 11 * 31$
185 $*$	$5 * 37$	242	$2 * 11^2$	398	$2 * 199$
$m = -13$					

a が素数にならないものに興味がある.
その場合,裏メルセンヌ完全数と呼びたい.

$m = -14$ のとき $a = 18 = 5 * 37$, がありこのとき $A = 242 = 2 * 11^2, B = 62 = 2 * 31$.

Table 2. スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-10$					
$18*$	$2*3^2$	49	7^2	56	2^3*7
5	5	16	2^4	30	$2*3*5$
53	53	64	2^6	126	$2*3^2*7$
1013	1013	1024	2^{10}	2046	$2*3*11*31$
$m=-9$					
$51*$	$3*17$	81	3^4	120	2^3*3*5
$53*7$	$3*179$	729	3^6	1092	$2^2*3*7*13$
$4911*$	$3*1637$	6561	3^8	9840	$2^4*3*5*41$

Table 3. スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-8$					
7	7	16	2^4	30	$2*3*5$
23	23	32	2^5	62	$2*31$
503	503	512	2^9	1022	$2*7*73$
2039	2039	2048	2^{11}	4094	$2*23*89$
$m=-5$					
2	2	8	2^3	14	$2*7$
$m=-4$					
3	3	8	2^3	14	$2*7$

4. 変な奴

スーパーメルセンヌ完全数は本来の定義に基づけば m が偶数の場合にのみ考えるべきである. 実際, m が偶数だと解は素数の場合が多く, これは平行移動 m のメルセンヌ完全素数というべきものである.

しかしながら m が奇数の場合も考える. m が奇数の場合にパソコンで計算してみるとわずかな解があるだけのようだ. 私はここで,冥王星の研究を想起する.

冥王星に探査機を飛ばして近くから眺めると, 実にさまざまな風景がありいくら研究しても追いつかない豊富な世界だった.

$m = -9$ には $a = 3p, p(\neq 2, 3)$: 素数, $A = 3^e$ となる解が３個ある.

他の場合と異なり,明らかに変な奴である.

ここには不思議な法則がありそうだ.

そこで$A = \sigma(a) - m, \sigma(A) = 2a - 2m + 1$ に $m = -9$ を代入する.

$A = \sigma(a) + 9, \sigma(A) = 2a + 19.$

$a = 3p$ と $A = 3^e$ を代入する.

$A = \sigma(a) + 9 = 4p + 13 = 3^e$ をえる.

命題 2. $4p+13=3^e$ を満たすとき $a=3p,(p\neq 2,3)$ は $A=\sigma(a)+9,\sigma(A)=2a+19$ となる.

Proof.
$A=\sigma(a)+9=4p+13=3^e$, よって $2\sigma(A)=3^{e+1}-1$.
End

$\dfrac{3^e-13}{4}$ が素数 p になる場合は解である.

TABLE 4. $m=-9$ の解 $a=3p, A=3^e$

e	$3*p$
4	$68=3*17$
6	$716=3*179$
8	$6548=3*1637$
10	$59036=3*14759$
12	$531428=3*132857$
88	$3*2424434324468809007192054855410202038900037$

こうして解があらたに発見された.

命題 3. $A=\sigma(a)+9, \sigma(A)=2a+19$ を $a=3p$ を仮定して $A=3^e$ を導く. ただし仮説を使う.

Proof.

$a=3p$ を代入すると, $A=\sigma(a)+9=4p+13, \sigma(A)=2a+19=6p+19$.

$A-13=4p, \sigma(A)-19=6p$ により $(12p=)3A-39=2\sigma(A)-38$.

これより, $3A-1=2\sigma(A)$. 次の仮説を使う.

注意 1. 素数 p について $(p-1)\sigma(a)=ap-1$ が成り立てば a は p のべき.

ただし, $p=2,3$ には反例が知られていないが,100 万以下では次の反例がある.

- $p=5$ のとき $a=7*11$
- $p=7$ のとき $a=97783=7*61*229$

Table 5. スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-2$					
4	2^2	9	3^2	12	2^2*3
5	5	8	2^3	14	$2*7$
13	13	16	2^4	30	$2*3*5$
29	29	32	2^5	62	$2*31$
61	61	64	2^6	126	$2*3^2*7$
509	509	512	2^9	1022	$2*7*73$
1021	1021	1024	2^{10}	2046	$2*3*11*31$
4093	4093	4096	2^{12}	8190	$2*3^2*5*7*13$
$m=-1$					
2	2	4	2^2	6	$2*3$
14	$2*7$	25	5^2	30	$2*3*5$
$m=0$					
3	3	4	2^2	6	$2*3$
7	7	8	2^3	14	$2*7$
31	31	32	2^5	62	$2*31$
127	127	128	2^7	254	$2*127$
8191	8191	8192	2^{13}	16382	$2*8191$

Table 6. スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=1$					
2	2	2	2	2	2
$m=2$					
2	2	1	1	0	0
3	3	2	2	2	2
5	5	4	2^2	6	$2*3$
17	17	16	2^4	30	$2*3*5$
257	257	256	2^8	510	$2*3*5*17$
$m=3$					
3	3	1	1	0	0
$m=4$					
5	5	2	2	2	2
7	7	4	2^2	6	$2*3$
11	11	8	2^3	14	$2*7$
19	19	16	2^4	30	$2*3*5$
67	67	64	2^6	126	$2*3^2*7$
131	131	128	2^7	254	$2*127$
4099	4099	4096	2^{12}	8190	$2*3^2*5*7*13$
$m=5$					
5	5	1	1	0	0

Table 7. スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=6$					
7	7	2	2	2	2
13	13	8	2^3	14	$2*7$
37	37	32	2^5	62	$2*31$
2053	2053	2048	2^{11}	4094	$2*23*89$
$m=7$					
7	7	1	1	0	0

Table 8. スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=8$					
11	11	4	2^2	6	$2*3$
23	23	16	2^4	30	$2*3*5$
71	71	64	2^6	126	$2*3^2*7$
263	263	256	2^8	510	$2*3*5*17$
1031	1031	1024	2^{10}	2046	$2*3*11*31$
$m=10$					
11	11	2	2	2	2
13	13	4	2^2	6	$2*3$
17	17	8	2^3	14	$2*7$
41	41	32	2^5	62	$2*31$

5. スーパー メルセンヌ完全数 合流型

スーパー メルセンヌ完全数には素数の例が圧倒的に多かった. それはスーパー メルセンヌ完全数の定義が強権的なことを意味する.

オイラー関数を用いて力を少し弱めてみる. どうなるかは結果を見て判断すればよい.

$a = p = \sigma(2^e) + m = 2^{e+1} - 1 + m$ を素数とする.

$\sigma(a) = p + 1 = 2^{e+1} + m$ となるので$\sigma(a) - m = 2^{e+1}$.

$A = \sigma(a) - m$ とおくと $A = 2^{e+1}$.

ここで $\sigma(A) = 2^{e+2} - 1$ としないで

$\varphi(A) = 2^e\ a + 1 - m = 2^{e+1}$ を使うと, $2\varphi(A) = 2^{e+1} = a - m + 1$.

そこで得られた式

$A = \sigma(a) - m$ と$2\varphi(A) = 2^{e+1} = a - m + 1$

を スーパーメルセンヌ完全数合流型 a の連立定義式その解をスーパーメルセンヌ完全数合流型 .

6. スーパーメルセンヌ完全数 合流型 の計算例

Table 9. スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-3$					
4	2^2	10	$2*5$	5	5
8	2^3	18	$2*3^2$	7	7
$m=-2$					
5	5	8	2^3	5	5
13	13	16	2^4	9	3^2
29	29	32	2^5	17	17
61	61	64	2^6	33	$3*11$
509	509	512	2^9	257	257
1021	1021	1024	2^{10}	513	3^3*19
4093	4093	4096	2^{12}	2049	$3*683$
16381	16381	16384	2^{14}	8193	$3*2731$

Table 10. スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
93	$3*31$	130	$2*5*13$	49	7^2
637	7^2*13	800	2^5*5^2	321	$3*107$
925	5^2*37	1180	2^2*5*59	465	$3*5*31$
1469	$13*113$	1598	$2*17*47$	737	$11*67$
2589	$3*863$	3458	$2*7*13*19$	1297	1297
5597	$29*193$	5822	$2*41*71$	2801	2801
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

TABLE 11. スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-1$					
2	2	4	2^2	3	3
$m=0$					
3	3	4	2^2	3	3
7	7	8	2^3	5	5
31	31	32	2^5	17	17
127	127	128	2^7	65	$5*13$
8191	8191	8192	2^{13}	4097	$17*241$
131071	131071	131072	2^{17}	65537	65537
524287	524287	524288	2^{19}	262145	$5*13*37*109$
15	$3*5$	24	2^3*3	9	3^2
1023	$3*11*31$	1536	2^9*3	513	3^3*19
147455	$5*7*11*383$	221184	$2^{13}*3^3$	73729	$17*4337$

$m = 0$ のとき解 a には元祖メルセンヌ素数が並ぶ．しかしそれ以外の解が複数個ありそのパートナーは $2^e * 3^f$ の形である．これは一般にも成り立つかどうかはわからない．

Table 12. スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=1$					
2	2	2	2	2	2
4	2^2	6	$2*3$	3	3
16	2^4	30	$2*3*5$	9	3^2
256	2^8	510	$2*3*5*17$	129	$3*43$
65536	2^{16}	131070	$2*3*5*17*257$	32769	$3^2*11*331$
$m=2$					
3	3	2	2	2	2
5	5	4	2^2	3	3
17	17	16	2^4	9	3^2
257	257	256	2^8	129	$3*43$
65537	65537	65536	2^{16}	32769	$3^2*11*331$
265	$5*53$	322	$2*7*23$	133	$7*19$
1969	$11*179$	2158	$2*13*83$	985	$5*197$
32001	$3*10667$	42670	$2*5*17*251$	16001	16001
70513	$107*659$	71278	$2*157*227$	35257	35257

$m=1$ の場合は $a=2^e, e=1,2,4,8,16$ となり, $A=2*3*5*17*257$ などと来て2 を除くとフェルマー素数順に並んだ積となる. これには感嘆せざるを得ない.

これを少し仮定をおいて証明を試みる.

命題 5. $m=1$ のとき, $a=2^e$ を仮定すると, $A=2Q$ と書けて Q はフェルマー素数順に並んだ積となる

Proof

スーパーメルセンヌ完全数 合流型の連立定義式は

$A=\sigma(a)-1, 2\varphi(A)=a$ となる.

$m=1, a=2^e$ のとき,$\varphi(A)=2^{e-1}, A=\sigma(a)-1=2^{e+1}-2=2(2^e-1)=2Q, Q=2^e-1.$

$A=2Q$ より $2^e=a=2\varphi(A)=2\varphi(Q)$

$Q=2^e-1=2\varphi(Q)-1.$

$Q=2\varphi(Q)-1$ となるとき, フェルマー素数順に並んだ積となる. ??

Table 13. スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=3$					
2	2	0	0	1	1
50	$2*5^2$	90	$2*3^2*5$	25	5^2
98	$2*7^2$	168	2^3*3*7	49	7^2
242	$2*11^2$	396	2^2*3^2*11	121	11^2
578	$2*17^2$	918	$2*3^3*17$	289	17^2
1058	$2*23^2$	1656	2^3*3^2*23	529	23^2
1922	$2*31^2$	2976	2^5*3*31	961	31^2
4418	$2*47^2$	6768	2^4*3^2*47	2209	47^2
5618	$2*53^2$	8586	$2*3^4*53$	2809	53^2
10082	$2*71^2$	15336	2^3*3^3*71	5041	71^2
22898	$2*107^2$	34668	2^2*3^4*107	11449	107^2
32258	$2*127^2$	48768	$2^7*3*127$	16129	127^2
72962	$2*191^2$	110016	2^6*3^2*191	36481	191^2
293378	$2*383^2$	441216	2^7*3^2*383	146689	383^2

$m=3$ のとき スーパーメルセンヌ完全数 合流型は見事なまでに美しい世界をみえてくれた.

$B=\varphi(A)+1$ によって, $a=2*p^2, p:$素数, $B=p^2, p:$ 素数 となっている.

平方を与える印がゴジラの頭から尾までつづく板を連想させる. しかも板は a, B の2系列がある. すばらしい!.

スーパーメルセンヌ完全数 合流型の中にゴジラみたいなものを発見できた.これほど大きな感激はない.

FIGURE 1. ゴジラのような完全数

定理 1. $m=3$ のとき 解は$a=2*p^2, p$:素数, を仮定すると, $p=2^e3^f-1, B=p^2$ と書ける.

Proof.

$m=3$ のとき 定義式は$A=\sigma(a)-m=\sigma(a)-3, 2\varphi(A)=a-m+1=a-2$.

$a=2*p^2$ により $A=\sigma(a)-3=3p(p+1)$. $p+1$ は p で割れない偶数なので, $p+1=2^e3^fR$, (R は,2, 3, p で割れないとする.

$A=3p(p+1)=2^e3^{f+1}pR$ なので

$2\varphi(A)=2^{e+1}3^f(p-1)\varphi(R)=2p^2-2=2(p+1)(p-1)$.

$p+1=2^e3^fR$ を代入して

$$2^{e+1}3^f(p-1)\varphi(R)=2(p+1)(p-1)=2(p-1)2^e3^fR.$$

よって, $\varphi(R)=R$. したがって, $R=1, p+1=2^e3^f, A=$

逆に, $X=2^e3^f$ とおくとき $p=X-1$ が素数と仮定すると, $a=2*p^2$ は $A=\sigma(a)-m=\sigma(a)-3, 2\varphi(A)=a-m+1=a-2.$

実際, $A=\sigma(a)-3=3p(p+1)=2^e3^{f+1}p$ なので, $2\varphi(A)=2^{e+1}3^f(p-1)=2X(p-1).$

$a-2=2(p^2-1)=2(p+1)(p-1)=2X(p-1)$, により, $2\varphi(A)=a-m+1=a-2.$

e, f (ともに正)を動かして $p=2^e3^f-1$ と書ける素数が無限にあればいいのだが,証明できる可能性は絶無であろう.

$p+1=2^e3^fR$ を代入して

$$2^{e+1}3^f(p-1)\varphi(R)=2(p+1)(p-1)=2(p-1)2^e3^fR.$$

よって, $\varphi(R)=R.$ したがって, $R=1, p+1=2^e3^fR, A=2^e3^{f+1}p$.

$X=2^e3^f$ とおくとき $p+1=2^e3^fR=X.$ よって,

TABLE 14. スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=4$					
5	5	2	2	2	2
7	7	4	2^2	3	3
11	11	8	2^3	5	5
19	19	16	2^4	9	3^2
67	67	64	2^6	33	$3*11$
131	131	128	2^7	65	$5*13$
4099	4099	4096	2^{12}	2049	$3*683$
32771	32771	32768	2^{15}	16385	$5*29*113$
65539	65539	65536	2^{16}	32769	$3^2*11*331$
262147	262147	262144	2^{18}	131073	$3*43691$
27	3^3	36	2^2*3^2	13	13
963	3^2*107	1400	2^3*5^2*7	481	$13*37$
103939	11^2*859	114376	$2^3*17*29^2$	51969	$3*17*1019$

7. 底が一般の場合のスーパーメルセンヌ完全数

奇素数 P を固定し, これを底とみなして $a=p=\sigma(P^e)+m$ が素数と仮定する. すると, $\sigma(a)=a+1$.

$\sigma(P^e)=\dfrac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}$ により $a=p=\sigma(P^e)+m=\dfrac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}+m$ なので,

$$\sigma(a)=a+1=\frac{P^{e+1}+P-2}{\overline{P}}+m$$

これより

$$\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P=P^{e+1}.$$

そこで, $A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ とおくと, $A=P^{e+1}$.
それゆえ、
$\overline{P}\sigma\Gamma A)=P^{e+2}-1.$

よって, $A = \overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ と $\sigma\Gamma A) = P(\sigma(a)-m)-\overline{P}$ を連立させて,この解a をスーパー メルセンヌ完全数といい A をそのパートナ,$B = \sigma(A) - 1$ をシャドウという.

Table 15. $P = 3$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = -19$					
45	$3^2 * 5$	193	193	193	193
247	$13 * 19$	597	$3 * 199$	799	$17 * 47$
3185	$5 * 7^2 * 13$	9613	9613	9613	9613
$m = -17$					
63	$3^2 * 7$	241	241	241	241
1049	1049	2133	$3^3 * 79$	3199	$7 * 457$
1647	$3^3 * 61$	4993	4993	4993	4993
9743	9743	19521	$3^4 * 241$	29281	$7 * 47 * 89$

qq

TABLE 16. $P=3$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-15$					
741	$3*13*19$	2269	2269	2269	2269
1051	1051	2133	3^3*79	3199	$7*457$
$m=-13$					
99	3^2*11	337	337	337	337
5611	$31*181$	11673	3^2*1297	16873	$47*359$
18387	3^4*227	55201	55201	55201	55201
$m=-11$					
9749	9749	19521	3^4*241	29281	$7*47*89$
18549	3^4*229	55681	55681	55681	55681
$m=-9$					
88321	88321	176661	3^5*727	264991	264991
$m=-8$					
2	2	21	$3*7$	31	31
3	3	21	$3*7$	31	31
3589	$37*97$	7461	3^2*829	10789	10789
$m=-5$					
5	5	21	$3*7$	31	31
1061	1061	2133	3^3*79	3199	$7*457$

qq

$P=3, m=-4$ を次の式に代入

TABLE 17. $P=3$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-4$					
8	2^3	37	37	37	37
6	$2*3$	31	31	31	31
10	$2*5$	43	43	43	43
22	$2*11$	79	79	79	79
38	$2*19$	127	127	127	127
46	$2*23$	151	151	151	151
62	$2*31$	199	199	199	199
86	$2*43$	271	271	271	271
106	$2*53$	331	331	331	331
118	$2*59$	367	367	367	367
122	$2*61$	379	379	379	379
142	$2*71$	439	439	439	439
158	$2*79$	487	487	487	487
178	$2*89$	547	547	547	547
202	$2*101$	619	619	619	619
206	$2*103$	631	631	631	631
226	$2*113$	691	691	691	691
298	$2*149$	907	907	907	907
302	$2*151$	919	919	919	919
326	$2*163$	991	991	991	991
346	$2*173$	1051	1051	1051	1051

Table 18. $P = 3$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = -3$					
7	7	21	$3 * 7$	31	31
1063	1063	2133	$3^3 * 79$	3199	$7 * 457$
25929	$3^2 * 43 * 67$	77797	77797	77797	77797
88327	88327	176661	$3^5 * 727$	264991	264991
$m = -1$					
2975	$5^2 * 7 * 17$	8929	8929	8929	8929

Table 19. $P = 3$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = 0$					
4	2^2	13	13	13	13
$m = 1$					
11	11	21	$3 * 7$	31	31
21	$3 * 7$	61	61	61	61
299	$13 * 23$	669	$3 * 223$	895	$5 * 179$
2133	$3^3 * 79$	6397	6397	6397	6397
176661	$3^5 * 727$	529981	529981	529981	529981
$m = 3$					
9	3^2	19	19	19	19
13	13	21	$3 * 7$	31	31

$P\varphi(A) = \overline{P}P^{e+1}$ となるが, $A = \overline{P}(\sigma(a){-}m){+}2{-}P = P^{e+1}$
.

$\sigma(a) = a{+}1$ が仮定されているので, $\overline{P}(a{+}1{-}m){+}2{-}P = P^{e+1}$.

$P^{e+1} = \overline{P}(a{+}1{-}m){+}2{-}P = \overline{P}(a{-}m){+}\overline{P}{+}2{-}P = \overline{P}(a{-}m){+}1$.
によって,

$$P\varphi(A) = \overline{P}P^{e+1} = \overline{P}^2(a - m) + \overline{P}.$$

よって, $A = \overline{P}(\sigma(a) - m) + 2 - P$ と $P\varphi(A) = \overline{P}P^{e+1} = \overline{P}^2(a - m) + \overline{P}$ を連立させて,スーパー メルセンヌ完全数合流型の定義方程式とい.

この解a をスーパー メルセンヌ完全数合流型といいA をそのパートナ,$B = \sigma(A) - 1$ をシャドウという.

命題 6. スーパー メルセンヌ完全数合流型の解 a が素数なら パートナーA は P^e.

Proof.

a が素数なら$A = \overline{P}(a+1-m)+2-P$ と $P\varphi(A) = \overline{P}^2(a-m)+\overline{P}$.

$A = \overline{P}(a+1-m)+2-P = \overline{P}(a-m)+2-P = \overline{P}+2-P = \overline{P}(a-m)+1$.

ゆえに

$$P\varphi(A) = \overline{P}^2(a-m)+\overline{P} = \overline{P}(\overline{P}(a-m)+1) = \overline{P}A.$$

ゆえに$P\varphi(A) = \overline{P}A$.

A は P の倍数なので$A = P^\eta L, (P \nmid L)$ と書ける.

$P\varphi(A) = P\varphi(P^\eta)\varphi(L) = \overline{P}P^\eta\varphi(L), \overline{P}A = \overline{P}P^\eta L$ によって,

9. $P = 5$ Super Mersenne perfect number of confluent type

Table 20. $P = 5$ スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = -21$	$q = 8p + 35$				
	$5 * p$		$3 * q$		$2q - 1$
15	$3 * 5$	177	$3 * 59$	117	$3^2 * 13$
65	$5 * 13$	417	$3 * 139$	277	277
155	$5 * 31$	849	$3 * 283$	565	$5 * 113$
185	$5 * 37$	993	$3 * 331$	661	661
215	$5 * 43$	1137	$3 * 379$	757	757
305	$5 * 61$	1569	$3 * 523$	1045	$5 * 11 * 19$
335	$5 * 67$	1713	$3 * 571$	1141	$7 * 163$
365	$5 * 73$	1857	$3 * 619$	1237	1237
485	$5 * 97$	2433	$3 * 811$	1621	1621
515	$5 * 103$	2577	$3 * 859$	1717	$17 * 101$
545	$5 * 109$	2721	$3 * 907$	1813	$7^2 * 37$
635	$5 * 127$	3153	$3 * 1051$	2101	$11 * 191$
$m = 9$	$q = 8p - 5$				
	$5 * p$		$3^3 * q$		$18q - 17$
65	$5 * 13$	297	$3^3 * 11$	181	181
335	$5 * 67$	1593	$3^3 * 59$	1045	$5 * 11 * 19$
785	$5 * 157$	3753	$3^3 * 139$	2485	$5 * 7 * 71$
1415	$5 * 283$	6777	$3^3 * 251$	4501	$7 * 643$
1865	$5 * 373$	8937	$3^3 * 331$	5941	$13 * 457$
2495	$5 * 499$	11961	$3^3 * 443$	7957	$73 * 109$

TABLE 21. $P = 5$ スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = -9$					
77	$7 * 11$	417	$3 * 139$	277	277
25277	$7 * 23 * 157$	121377	$3 * 40459$	80917	80917
$m = -8$					
23	23	125	5^3	101	101
773	773	3125	5^5	2501	$41 * 61$
$m = -7$					
149	149	625	5^4	501	$3 * 167$
$m = -5$					
151	151	625	5^4	501	$3 * 167$

Table 22. $P=5$ スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-4$					
2	2	25	5^2	21	$3*7$
$m=-3$					
3	3	25	5^2	21	$3*7$
$m=-2$					
4	2^2	33	$3*11$	21	$3*7$
9	3^2	57	$3*19$	37	37
29	29	125	5^3	101	101
$m=-1$					
5	5	25	5^2	21	$3*7$
$m=0$					
31	31	125	5^3	101	101
19531	19531	78125	5^7	62501	62501
$m=1$					
2	2	5	5	5	5
7	7	25	5^2	21	$3*7$
157	157	625	5^4	501	$3*167$
3907	3907	15625	5^6	12501	3^3*463
$m=2$					
3	3	5	5	5	5
$m=3$					
5	5	5	5	5	5