高校生もわかる数論研究

Super perfect numbers and Mersenne perefect numbers 3

飯高 茂

2019/2/22

目 次

1 平行移動 m の完全数, 数表まとめ

表 1: 平行移動 $m = -28$ の完全数

$m = -28$			$m = -10$		height48
$2^4 * 3$	A	40	$2^3 * 5$	A	
2002	$2 * 7 * 11 * 13$	D	1696	$2^5 * 53$	A
5170	$2 * 5 * 11 * 47$	D	$m = -9$		
29056	$2^7 * 227$	A	$m = -8$		
$m = -27$			56	$2^3 * 7$	A
$m = -26$			368	$2^4 * 23$	A
80	$2^4 * 5$	A	836	$2^2 * 11 * 19$	D
1184	$2^5 * 37$	A	11096	$2^3 * 19 * 73$	D
6464	$2^6 * 101$	A	17816	$2^3 * 17 * 131$	D
29312	$2^7 * 229$	A	45356	$2^2 * 17 * 23 * 29$	F
78975	$3^5 * 5^2 * 13$		77744	$2^4 * 43 * 113$	D

表 2: 平行移動 $m=-24,-22$ の完全数

$m=-25$			91388	$2^2*11*31*67$	F
$m=-24$			$m=-7$		
112	2^4*7	A	196	2^2*7^2	
6592	2^6*103	A	$m=-6$		
$m=-23$			8925	$3*5^2*7*17$	F
$m=-22$			32445	$3^2*5*7*103$	F
1312	2^5*41	A	$m=-5$		
29824	2^7*233	A	$m=-4$		
$m=-21$			12	2^2*3	A
$m=-20$			70	$2*5*7$	D
176	2^4*11	A	88	2^3*11	A
1376	2^5*43	A	1888	2^5*59	A
3230	$2*5*17*19$		4030	$2*5*13*31$	D
3770	$2*5*13*29$		5830	$2*5*11*53$	D
6848	2^6*107	A	32128	2^7*251	A
$m=-19$			$m=-3$		
36	2^2*3^2		18	$2*3^2$	F
$m=-18$			$m=-2$		
208	2^4*13	A	20	2^2*5	A
6976	2^6*109	A	104	2^3*13	A
8415	$3^2*5*11*17$		464	2^4*29	
31815	$3^2*5*7*101$		650	$2*5^2*13$	F

表 3: 平行移動 $m=-17,-16$ の完全数

$m=-17$			1952	2^5*61	A
100	2^2*5^2		$m=-1$		
$m=-16$			$m=0$		
550	$2*5^2*11$		6	$2*3$	
748	$2^2*11*17$	D	28	2^2*7	
1504	2^5*47	A	496	2^4*31	
7192	$2^3*29*31$	D	8128	2^6*127	
7912	$2^3*23*43$	D	$m=1$		
10792	$2^3*19*71$	D	2	2	C
17272	$2^3*17*127$	D	4	2^2	C
30592	2^7*239	A	8	2^3	C
$m=-15$			16	2^4	C
$m=-14$			32	2^5	C
272	2^4*17	A	64	2^6	C
7232	2^6*113	A	128	2^7	C
30848	2^7*241	A	256	2^8	C

2 スーパー完全数

次の連立方程式

$A=\sigma(a)+m$, $\sigma(A)=2a+m$ を満たす自然数 a と A について a を m だけ平行移動した 広義のスーパー完全数,A をそのパートナーと呼ぶ.

表 4: 平行移動 $m=-28$ スーパー完全数

$m=-28$					
a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
26	$2*13$	14	$2*7$	23	23
98	$2*7^2$	143	$11*13$	167	167
107	107	80	2^4*5	185	5*37
16	2^4	3	3	3	3
128	2^7	227	227	227	227
35	$7*5$	20	2^2*5	41	41
77	$7*11$	68	2^2*17	125	5^3
119	$7*17$	116	2^2*29	209	$11*19$
161	$7*23$	164	2^2*41	293	293
203	$7*29$	212	2^2*53	377	$13*29$
329	$7*47$	356	2^2*89	629	$17*37$
371	$7*53$	404	2^2*101	713	$23*31$
413	$7*59$	452	2^2*113	797	797
497	$7*71$	548	2^2*137	965	$5*193$
623	$7*89$	692	2^2*173	1217	1217
707	$7*101$	788	2^2*197	1385	$5*277$
917	$7*131$	1028	2^2*257	1805	$5*19^2$
959	$7*137$	1076	2^2*269	1889	1889
1043	$7*149$	1172	2^2*293	2057	11^2*17
1253	$7*179$	1412	2^2*353	2477	2477
1379	$7*197$	1556	2^2*389	2729	2729
1589	$7*227$	1796	2^2*449	3149	$47*67$

この場合は多くの種類の解がある.

3 多くの種類の解

$a=7p, p\neq 7$, $A=4q, q\neq 2$ となる解を B 型という.

$A=\sigma(a)+m$, $\sigma(A)=2a+m$ に代入すると,

$A=\sigma(a)+m=8(p+1)-28=4(2p-5)$, $Q=2p-5$ は奇数なので $\sigma(A)=7\sigma(Q)=14p-28=14(p-2)$.

$7\sigma(Q)=14p-28=14(p-2)$ によって, $\sigma(Q)=2(p-2)=2p-4=2p-5+1=Q+1$. ゆえに $\sigma(Q)=Q+1$ となり Q は素数. $(p, Q=2p-5)$ はともに素数なので, これはスーパー双子素数になる.

B 型解 $a=7p$ は $(p, 2p-5)$ はスーパー双子素数であるという著しい特色を持つ.

命題 1 解 $a=7h$ *(7 は 7の倍数ではない)* があるとき h は素数になる*.*

Proof.

解 $a=7h$ を代入すると, $A=\sigma(a)+m=8\sigma(h)-28=4(2\sigma(h)-7)$, $\sigma(A)=2a+m=14h-28$.

$Q=2\sigma(h)-7$ 奇数なので, 4 と互いに素. ゆえに $\sigma(A)=\sigma(4Q)=7\sigma(Q)$.

$\sigma(A)=2a+m=14h-28=7\sigma(Q)$ によって, $14h-28=7\sigma(Q)$ を得るので, $2h-4=\sigma(Q)$.

そこで $Q=2\sigma(h)-7$ から $\sigma(Q)=2h-4$ を引けば

$$-1 \geq -co\sigma(Q)=Q-\sigma(Q)=2\sigma(h)-7-2h+4=2co\sigma(h)-3 \geq -1.$$

よって等号成立で $co\sigma(Q)=co\sigma(h)=1$. Q, h は素数で,$2h-4=\sigma(Q)=Q+1$.

$Q=2h-5$ が成り立ち $(h, Q=2h-5)$ はスーパー双子素数.

End

$a=2^e$ は C 型解であり, パートナ A は素数になる.

$a=p:($ 素数$)$,$A=2^eq,(q:$ 素数$)$ となる解がある.

$a=p$ 素数,$A=2^eq$ A 型なので, pA 型という. この型の解はいろいろな場合にも出るので普遍解という.

一般の m について考える.

平行移動 m のスーパー完全数の定義式 $A=\sigma(a)+m$, $\sigma(A)=2a+m$ 　に代入すると,

$A=\sigma(a)+m=p+1+m=2^eq, \sigma(A)=2a+m=2p+m$ 　なので $p+1+m=2^eq$.

ゆえに, $p=2^eq-m-1$.

$N=2^{e+1}-1$ とおくとき

$$2p+m=\sigma(A)=\sigma(2^eq)=N(q+1)=Nq+N=2*2^eq-q+N.$$

$2p+m=2*2^eq-m-2$ を用いると,

$$2p+m=2*2^eq-m-2=2*2^eq-q+N.$$

$$-m-2=-q+N=-q+2^{e+1}-1.$$

よって,$q=2^{e+1}+1+m$.

与えられた, m に対し $2^{e+1}+1+m$ が素数になるときこれを q とおき, $q=2^{e+1}+1+m$ をえる.

2^eq-m-1 が素数になるなら,$p=2^eq-m-1$ とおく.

$a=p$ としてスーパー完全数の定義式に代入すれば $A=\sigma(a)+m=p+1+m=2^eq$ となり

$$\begin{aligned}\sigma(A)&=\sigma(2^eq)\\&=N(q+1)\\&=Nq+N\\&=2*2^eq-q+N\\&=2(p+1+m)-q+2^{e+1}-1\\&=2(p+1+m)-q+q-1-m-1\\&=2p+m.\end{aligned}$$

$$\sigma(A)=2p+m=2a+m.$$

以上によって,

命題 2 $q=2^{e+1}+1+m$ と $p=2^eq-m-1$ が素数になるなら $a=p$ は スーパー完全数になる.

$A=\sigma(a)+m=p+1+m$ と $\sigma(A)=2a+m$ を満たす.

$A=p+1+m$ を $p=A-1-m$ と変形して, $\sigma(A)=2p+m=2A-2-m$ をえる.

$\mu_0=2+m$ とおくと,$\sigma(A)=2A-\mu_0$.

これから, $\sigma(A)=2A-\mu_0$ の解 A_0 があり $A_0-1-m=A_0-1-(\mu_0-2)=A_0+1-\mu_0-2$ 素数 p になれば, $a=p$ は $A=\sigma(a)+m,\sigma(A)=2a+m$ の解になる.

表 5: $m=-28,-26;\ q=2^{e+1}+1+m, p=2^e q-m-1$ が素数

e	q	p	素因数分解
$m=-28$			
4	$q=5$	$p=107$	107
5	$q=37$	$p=1211$	$7*173$
6	$q=101$	$p=6491$	6491
7	$q=229$	$p=29339$	29339
9	$q=997$	$p=510491$	$41*12451$
18	$q=524261$	$p=137431875611$	$743*3391*54547$
$m=-26$			
4	$q=7$	$p=137$	137
6	$q=103$	$p=6617$	$13*509$
8	$q=487$	$p=124697$	$19*6563$
12	$q=8167$	$p=33452057$	$179*186883$
$m=-22$			
4	$q=11$	$p=197$	197
5	$q=43$	$p=1397$	$11*127$
6	$q=107$	$p=6869$	6869
8	$q=491$	$p=125717$	125717
10	$q=2027$	$p=2075669$	2075669
12	$q=8171$	$p=33468437$	$31*127*8501$
13	$q=16363$	$p=134045717$	$13*307*33587$

1)
$m=-28,$ のとき $p=107, p=6491, q=29339$ が pA 型の解.
$\mu_0=2+m=-26$ での究極の完全数 A_0 には $A_0=80,1184,6464$ という解がある.
$a=A_0-1-m=A_0+27$ が素数なら $m=28$ でのスーパー完全数の素数解になる.
実際, $A_0+27=80+27=107, 1184+27, 6464+27$ がそれである.
2)
$m=-26$ のとき $p=137$ が pA 型の解.
$\mu_0=2+m=-24$ での究極の完全数 A_0 には $A_0=112,6592$ という解がある.
3)
$m=-22$ のとき $p=197, p=1397, p=6869, p=125717$ が pA 型の解.
$\mu_0=2+m=-20$ での究極の完全数 A_0 には $A_0=176,1376,3230$ という解がある.
これに 21 を加えて素数ならスーパー完全数である素数.
$1376+21=1397=11*127$

表 6: $m=-20,-16,-14;\ q=2^{e+1}+1+m, p=2^{e}q-m-1$ が素数

e	q	p	素因数分解
$m=-20$			
4	$q=13$	$p=227$	227
6	$q=109$	$p=6995$	$5*1399$
10	$q=2029$	$p=2077715$	$5*415543$
$m=-16$			
4	$q=17$	$p=287$	$7*41$
6	$q=113$	$p=7247$	7247
7	$q=241$	$p=30863$	$7*4409$
9	$q=1009$	$p=516623$	516623
$m=-14$			
3	$q=3$	$p=37$	37
4	$q=19$	$p=317$	317
8	$q=499$	$p=127757$	$7*18251$
12	$q=8179$	$p=33501197$	$577*58061$
$m=-6$			
2	$q=3$	$p=17$	17
3	$q=11$	$p=93$	$3*31$
5	$q=59$	$p=1893$	$3*631$

表 7: $m = -28;\ q = 2^{e+1} + 1 + m, p = 2^e q - m - 1$ が素数

e	q	p	素因数分解
$m = -4$			
2	$q = 5$	$p = 23$	23
3	$q = 13$	$p = 107$	107
4	$q = 29$	$p = 467$	467
5	$q = 61$	$p = 1955$	$5 * 17 * 23$
8	$q = 509$	$p = 130307$	130307
9	$q = 1021$	$p = 522755$	$5 * 104551$
11	$q = 4093$	$p = 8382467$	8382467
13	$q = 16381$	$p = 134193155$	$5 * 17 * 23 * 83 * 827$
19	$q = 1048573$	$p = 549754241027$	$61 * 113 * 79755439$
$m = -2$			
1	$q = 3$	$p = 7$	7
2	$q = 7$	$p = 29$	29
4	$q = 31$	$p = 497$	$7 * 71$
6	$q = 127$	$p = 8129$	$11 * 739$
$m = 0$			
1	$q = 5$	$p = 9$	3^2
3	$q = 17$	$p = 135$	$3^3 * 5$
7	$q = 257$	$p = 32895$	$3^2 * 5 * 17 * 43$
15	$q = 65537$	$p = 2147516415$	$3^3 * 5 * 11 * 17 * 257 * 331$

表 8: $m = 2, 4, 8$; $q = 2^{e+1} + 1 + m, p = 2^e q - m - 1$ が素数

e	q	p	素因数分解
$m = 2$			
1	$q = 7$	$p = 11$	11
2	$q = 11$	$p = 41$	41
3	$q = 19$	$p = 149$	149
5	$q = 67$	$p = 2141$	2141
6	$q = 131$	$p = 8381$	$17^2 * 29$
11	$q = 4099$	$p = 8394749$	$11 * 763159$
14	$q = 32771$	$p = 536920061$	$17 * 37 * 157 * 5437$
$m = 4$			
2	$q = 13$	$p = 47$	47
4	$q = 37$	$p = 587$	587
10	$q = 2053$	$p = 2102267$	2102267
46	$q = 140737488355333$	$p = 9903520314283394042913882107$	A
$m = 8$			
1	$q = 13$	$p = 17$	17
2	$q = 17$	$p = 59$	59
4	$q = 41$	$p = 647$	647
5	$q = 73$	$p = 2327$	$13 * 179$
6	$q = 137$	$p = 8759$	$19 * 461$
8	$q = 521$	$p = 133367$	$13 * 10259$

$A = 55817 * 235243 * 754234505021406697$

表 9: $m = 10$; $q = 2^{e+1} + 1 + m, p = 2^e q - m - 1$ が素数

e	q	p	素因数分解
$m = 10$			
2	$q = 19$	$p = 65$	$5 * 13$
4	$q = 43$	$p = 677$	677
6	$q = 139$	$p = 8885$	$5 * 1777$
8	$q = 523$	$p = 133877$	133877
14	$q = 32779$	$p = 537051125$	$5^3 * 13 * 167 * 1979$
22	$q = 8388619$	$p = 35184418226165$	$5 * 13 * 419 * 6271 * 206009$

表 10: 平行移動 $m=-26$ スーパー完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-26$					
22	$2*11$	10	$2*5$	17	17
469	$7*67$	518	$2*7*37$	911	911
16	2^4	5	5	5	5
32	2^5	37	37	37	37
64	2^6	101	101	101	101
128	2^7	229	229	229	229
512	2^9	997	997	997	997
137	137	112	2^4*7	247	13*19

表 11: 平行移動 $m=-22$ スーパー完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-22$					
32	2^5	41	41	41	41
128	2^7	233	233	233	233
2048	2^{11}	4073	4073	4073	4073
8192	2^{13}	16361	16361	16361	16361
197	197	176	2^4*11	371	7*53
6869	6869	6848	2^6*107	13715	5*13*211
3251	3251	3230	$2*5*17*19$	6479	11*19*31
6923	$7*23*43$	8426	$2*11*383$	13823	$23*601$

$\mu_0=2+m=-20.$

表 12: 平行移動 $m = -16$ スーパー完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = -16$					
32	2^5	47	47	47	47
128	2^7	239	239	239	239
2048	2^{11}	4079	4079	4079	4079
7247	7247	7232	$2^6 * 113$	14477	31*467
8843	$37 * 239$	9104	$2^4 * 569$	17669	17669
2363	$17 * 139$	2504	$2^3 * 313$	4709	17*277

表 13: 平行移動 $m=-18,-14$ スーパー完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-18$					
15	$3*5$	6	$2*3$	11	11
16	2^4	13	13	13	13
64	2^6	109	109	109	109
1024	2^{10}	2029	2029	2029	2029
27	3^3	22	$2*11$	35	$5*7$
21	$3*7$	14	$2*7$	23	23
39	$3*13$	38	$2*19$	59	59
57	$3*19$	62	$2*31$	95	$5*19$
111	$3*37$	134	$2*67$	203	$7*29$
129	$3*43$	158	$2*79$	239	239
201	$3*67$	254	$2*127$	383	383
219	$3*73$	278	$2*139$	419	419
237	$3*79$	302	$2*151$	455	$5*7*13$
309	$3*103$	398	$2*199$	599	599
327	$3*109$	422	$2*211$	635	$5*127$
$m=-14$					
a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
16	2^4	17	17	17	17
64	2^6	113	113	113	113
128	2^7	241	241	241	241
512	2^9	1009	1009	1009	1009
247	$13*19$	266	$2*7*19$	479	479
37	37	24	2^3*3	59	59
67	67	54	$2*3^3$	119	$7*17$
43	43	30	$2*3*5$	71	71
79	79	66	$2*3*11$	143	$11*13$
127	127	114	$2*3*19$	239	239
151	151	138	$2*3*23$	287	$7*41$
199	199	186	$2*3*31$	383	383
271	271	258	$2*3*43$	527	$17*31$

表 14: 平行移動 $m=-4,-3,-2$ スーパー完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-4$					
4	2^2	3	3	3	3
8	2^3	11	11	11	11
32	2^5	59	59	59	59
128	2^7	251	251	251	251
512	2^9	1019	1019	1019	1019
2048	2^{11}	4091	4091	4091	4091
242	$2*11^2$	395	$5*79$	479	479
23	23	20	2^2*5	41	41
107	107	104	2^3*13	209	$11*19$
467	467	464	2^4*29	929	929
653	653	650	$2*5^2*13$	1301	1301
3077	$17*181$	3272	2^3*409	6149	$11*13*43$
6728	2^3*29^2	13061	$37*353$	13451	13451
9953	$37*269$	10256	2^4*641	19901	$7*2843$
$m=-2$					
4	2^2	5	5	5	5
8	2^3	13	13	13	13
16	2^4	29	29	29	29
32	2^5	61	61	61	61
256	2^8	509	509	509	509
512	2^9	1021	1021	1021	1021
2048	2^{11}	4093	4093	4093	4093
8192	2^{13}	16381	16381	16381	16381
7	7	6	$2*3$	11	11
29	29	28	2^2*7	55	$5*11$
253	$11*23$	286	$2*11*13$	503	503
889	$7*127$	1022	$2*7*73$	1775	5^2*71

表 15: 平行移動 $m=-1,0,2$ スーパー完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-1$					
2	2	2	2	2	2
$m=0$					
2	2	3	3	3	3
4	2^2	7	7	7	7
16	2^4	31	31	31	31
64	2^6	127	127	127	127
4096	2^{12}	8191	8191	8191	8191
$m=1$					
15	$3*5$	25	5^2	30	$2*3*5$
190	$2*5*19$	361	19^2	380	2^2*5*19
$m=2$					
8	2^3	17	17	17	17
128	2^7	257	257	257	257
2	2	5	5	5	5
11	11	14	$2*7$	23	23
41	41	44	2^2*11	83	83
107	107	110	$2*5*11$	215	$5*43$
149	149	152	2^3*19	299	$13*23$
881	881	884	$2^2*13*17$	1763	$41*43$
2141	2141	2144	2^5*67	4283	4283
65	$5*13$	86	$2*43$	131	131
959	$7*137$	1106	$2*7*79$	1919	$19*101$

表 16: 平行移動 $m = 3, 4, 6$ スーパー完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = 3$					
5	5	9	3^2	12	$2^2 * 3$
$m = 4$					
2	2	7	7	7	7
4	2^2	11	11	11	11
8	2^3	19	19	19	19
32	2^5	67	67	67	67
64	2^6	131	131	131	131
2048	2^{11}	4099	4099	4099	4099
47	47	52	$2^2 * 13$	97	97
587	587	592	$2^4 * 37$	1177	$11 * 107$
341	$11 * 31$	388	$2^2 * 97$	685	$5 * 137$
$m = 6$					
4	2^2	13	13	13	13
16	2^4	37	37	37	37
1024	2^{10}	2053	2053	2053	2053
49	7^2	63	$3^2 * 7$	103	103

4 スーパーメルセンヌ完全数

スーパー完全数 (1969 年)　から 50 年後たった 2019 年に完全数 $\alpha = 2^e q$ の素数部分 (q: メルセンヌ素数という) を取り出すことが行われスーパーメルセンヌ完全数の概念ができた.

$a = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $\sigma(a) = a + 1$ となるので $\sigma(a) = a + 1 = 2^{e+1} + m$ になるので $A = \sigma(a) - m$ とおくとき $A = 2^{e+1}$.

ゆえに $a + 1 = 2^{e+1} + m$ によって

$$\sigma(A) = 2^{e+2} - 1 = 2 * 2^{e+1} - 1 = 2a - 2m + 1$$

そこで次の連立方程式

$A = \sigma(a) - m$, $\sigma(A) = 2^{e+2} - 1 = 2 * 2^{e+1} - 1 = 2a - 2m + 1$　を満たす自然数 a と A について a を m　だけ平行移動した 広義のスーパーメルセンヌ完全数,A をそのパートナーと呼ぶ.

表 17: スーパーメルセンヌ完全数

a	factor	A	factor	B	factor
$m=-14$					
17	17	32	2^5	62	$2*31$
113	113	128	2^7	254	$2*127$
185	$5*37$	242	$2*11^2$	398	$2*199$
241	241	256	2^8	510	$2*3*5*17$
1009	1009	1024	2^{10}	2046	$2*3*11*31$
16369	16369	16384	2^{14}	32766	$2*3*43*127$
65521	65521	65536	2^{16}	131070	$2*3*5*17*257$
$m=-13$					
2	2	16	2^4	30	$2*3*5$

表 18: スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-12$					
3	3	16	2^4	30	$2*3*5$
19	19	32	2^5	62	$2*31$
499	499	512	2^9	1022	$2*7*73$
8179	8179	8192	2^{13}	16382	$2*8191$
$m=-10$					
5	5	16	2^4	30	$2*3*5$
18	$2*3^2$	49	7^2	56	2^3*7
53	53	64	2^6	126	$2*3^2*7$
1013	1013	1024	2^{10}	2046	$2*3*11*31$
$m=-9$					
51	$3*17$	81	3^4	120	2^3*3*5
537	$3*179$	729	3^6	1092	$2^2*3*7*13$
4911	$3*1637$	6561	3^8	9840	$2^4*3*5*41$

5 変な奴

スーパーメルセンヌ完全数は本来の定義に基づけば m が偶数の場合にのみ考えるべきである. 実際, m が偶数だと解は素数の場合が多く, これは平行移動 m のメルセンヌ完全素数というべきものである.

$m=-9$ には $a=3p, p(\neq 2,3)$: 素数, $A=3^e$ となる解が 3 個あり不思議だ.

$A=\sigma(a)-m, \sigma(A)=2a-2m+1$ に $m=-9$ を代入する.

$A=\sigma(a)+9, \sigma(A)=2a+19.$

これを一般的に解くことは困難である.

解の表をみながら $a=3p$ と $A=3^e$ を代入する.

すると $A=\sigma(a)+9=4p+13=3^e$ をえる.

命題 3 $4p+13=3^e$ を満たすとき $a=3p,(p\neq 2,3)$ は $A=\sigma(a)+9, \sigma(A)=2a+19$ を満たす.

Proof.

$A=\sigma(a)+9=4p+13=3^e$, よって $2\sigma(A)=3^{e+1}-1$.

End

$\frac{3^e-13}{4}$ が素数 p になる場合は解である.

表 19: $m=-9$ の解 $a=3p, A=3^e$

e	$3*p$
4	$51=3*17$
6	$537=3*179$
8	$4911=3*1637$
10	$44277=3*14759$
12	$398571=3*132857$
88	$3*242443432446880900719205485541020203890037$

こうして解があらたに発見された.

定理 1 $m=-9$ のスーパーメルセンヌ完全数を $a=3p$ を仮定して $A=3^e$ を導く. ただし仮説を使う.

Proof.
$a=3p$ を $A=\sigma(a)+9, \sigma(A)=2a+19$ に代入すると,
$A=\sigma(a)+9=4p+13, \sigma(A)=2a+19=6p+19.$
$A-13=4p, \sigma(A)-19=6p$ により $(12p=)3A-39=2\sigma(A)-38.$
これより, $3A-1=2\sigma(A)$. 次の仮説を使う.

注意 1 素数 p について $(p-1)\sigma(a)=ap-1$ が成り立てば a は p のべき.

ただし, $p=2,3$ には反例が知られていないが,100 万以下では次の反例がある.

- $p=5$ のとき $a=7*11$
- $p=7$ のとき $a=97783=7*61*229$
- $p=11$ のとき $a=611=13*47$
- $p=17$ のとき $a=1073=29*37$, $a=2033=19*107$

表 20: スーパーメルセンヌ完全数

a	factor	A	factor	B	factor
$m=-8$					
7	7	16	2^4	30	$2*3*5$
23	23	32	2^5	62	$2*31$
503	503	512	2^9	1022	$2*7*73$
2039	2039	2048	2^{11}	4094	$2*23*89$
$m=-5$					
2	2	8	2^3	14	$2*7$

表 21: スーパーメルセンヌ完全数

a	factor	A	factor	B	factor
$m=-4$					
3	3	8	2^3	14	$2*7$
11	11	16	2^4	30	$2*3*5$
59	59	64	2^6	126	$2*3^2*7$
251	251	256	2^8	510	$2*3*5*17$
1019	1019	1024	2^{10}	2046	$2*3*11*31$
4091	4091	4096	2^{12}	8190	$2*3^2*5*7*13$
$m=-2$					
4	2^2	9	3^2	12	2^2*3
5	5	8	2^3	14	$2*7$
13	13	16	2^4	30	$2*3*5$
29	29	32	2^5	62	$2*31$
61	61	64	2^6	126	$2*3^2*7$
509	509	512	2^9	1022	$2*7*73$
1021	1021	1024	2^{10}	2046	$2*3*11*31$
4093	4093	4096	2^{12}	8190	$2*3^2*5*7*13$
16381	16381	16384	2^{14}	32766	$2*3*43*127$

表 22: スーパーメルセンヌ完全数

a	factor	A	factor	B	factor
$m=-1$					
2	2	4	2^2	6	$2*3$
14	$2*7$	25	5^2	30	$2*3*5$
$m=0$					
3	3	4	2^2	6	$2*3$
7	7	8	2^3	14	$2*7$
31	31	32	2^5	62	$2*31$
127	127	128	2^7	254	$2*127$
8191	8191	8192	2^{13}	16382	$2*8191$
$m=1$					
2	2	2	2	2	2
$m=2$					
2	2	1	1	0	0
3	3	2	2	2	2
5	5	4	2^2	6	$2*3$
17	17	16	2^4	30	$2*3*5$
257	257	256	2^8	510	$2*3*5*17$
65537	65537	65536	2^{16}	131070	$2*3*5*17*257$

6　スーパー メルセンヌ完全数 合流型

$a = p = \sigma(2^e) + m = 2^{e+1} - 1 + m$ を素数とする.
$\sigma(a) = p + 1 = 2^{e+1} + m$ となるので $\sigma(a) - m = 2^{e+1}$.
$A = \sigma(a) - m$ とおくと $A = 2^{e+1}$.
ここで $\sigma(A) = 2^{e+2} - 1$ としないで
$\varphi(A) = 2^e\ a + 1 - m = 2^{e+1}$ を使うと, $2\varphi(A) = 2^{e+1} = a - m + 1$.
そこで得られた式
$A = \sigma(a) - m$ と $2\varphi(A) = 2^{e+1} = a - m + 1$
を スーパーメルセンヌ完全数合流型 a の連立定義式その解をスーパーメルセンヌ完全数合流型 .
A をそのパートナーという.
$B = \varphi(A) + 1$ をシャドウという.

命題 4 a が素数になる必要十分条件は $A = 2^e$.

表 23: 平行移動 $m=-2$ スーパー完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-2$					
5	5	8	2^3	5	5
13	13	16	2^4	9	3^2
29	29	32	2^5	17	17
61	61	64	2^6	33	$3*11$
509	509	512	2^9	257	257
1021	1021	1024	2^{10}	513	3^3*19
4093	4093	4096	2^{12}	2049	$3*683$
93	$3*31$	130	$2*5*13$	49	7^2
637	7^2*13	800	2^5*5^2	321	$3*107$
925	5^2*37	1180	2^2*5*59	465	$3*5*31$
1469	$13*113$	1598	$2*17*47$	737	$11*67$
2589	$3*863$	3458	$2*7*13*19$	1297	1297
5597	$29*193$	5822	$2*41*71$	2801	2801
7037	$31*227$	7298	$2*41*89$	3521	$7*503$
15965	$5*31*103$	19970	$2*5*1997$	7985	$5*1597$
16381	16381	16384	2^{14}	8193	$3*2731$

表 24: 平行移動 $m=-2$ スーパー完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=-1$					
2	2	4	2^2	3	3
$m=0$					
3	3	4	2^2	3	3
7	7	8	2^3	5	5
31	31	32	2^5	17	17
127	127	128	2^7	65	$5*13$
8191	8191	8192	2^{13}	4097	$17*241$
15	$3*5$	24	2^3*3	9	3^2
1023	$3*11*31$	1536	2^9*3	513	3^3*19
$m=1$					
2	2	2	2	2	2
4	2^2	6	$2*3$	3	3
16	2^4	30	$2*3*5$	9	3^2
256	2^8	510	$2*3*5*17$	129	$3*43$

表 25: 平行移動 $m=-2$ スーパー完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=2$					
3	3	2	2	2	2
5	5	4	2^2	3	3
17	17	16	2^4	9	3^2
257	257	256	2^8	129	$3*43$
265	$5*53$	322	$2*7*23$	133	$7*19$
1969	$11*179$	2158	$2*13*83$	985	$5*197$
32001	$3*10667$	42670	$2*5*17*251$	16001	16001
$m=3$					
2	2	0	0	1	1
50	$2*5^2$	90	$2*3^2*5$	25	5^2
98	$2*7^2$	168	2^3*3*7	49	7^2
242	$2*11^2$	396	2^2*3^2*11	121	11^2
578	$2*17^2$	918	$2*3^3*17$	289	17^2
1058	$2*23^2$	1656	2^3*3^2*23	529	23^2
1922	$2*31^2$	2976	2^5*3*31	961	31^2
4418	$2*47^2$	6768	2^4*3^2*47	2209	47^2
5618	$2*53^2$	8586	$2*3^4*53$	2809	53^2

表 26: 平行移動 $m=-2$ スーパー完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m=4$					
3	3	0	0	1	1
5	5	2	2	2	2
7	7	4	2^2	3	3
11	11	8	2^3	5	5
19	19	16	2^4	9	3^2
67	67	64	2^6	33	$3*11$
131	131	128	2^7	65	$5*13$
4099	4099	4096	2^{12}	2049	$3*683$
32771	32771	32768	2^{15}	16385	$5*29*113$
963	3^2*107	1400	2^3*5^2*7	481	$13*37$
27	3^3	36	2^2*3^2	13	13

$m=3$ のとき スーパーメルセンヌ完全数 合流型は見事なまでに美しい世界をみせてくれた.

$B=\varphi(A)+1$ によって, $a=2*p^2, p:$素数, $B=p^2, p:$ 素数 となっている.

平方を与える印がゴジラの頭から尾までつづく板を連想させる. しかも板は a,B の 2 系列がある. すばらしい!.

スーパーメルセンヌ完全数 合流型の中にゴジラみたいなものを発見できた. これほど大きな感激はない.

定理 2 $m=3$ のとき 解は $a=2*p^2, p:$素数, を仮定すると, $p=2^e3^f-1, B=p^2$ と書ける.

Proof.

$m=3$ のとき 定義式は $A=\sigma(a)-m=\sigma(a)-3, 2\varphi(A)=a-m+1=a-2$.

$a=2*p^2$ により $A=\sigma(a)-3=3p(p+1)$. $p+1$ は p で割れない偶数なので, $p+1=2^e3^fR$, (R は,$2,3,p$ で割れないとする.

$A=3p(p+1)=2^e3^{f+1}pR$ なので

$$2\varphi(A)=2^{e+1}3^f(p-1)\varphi(R)=2p^2-2=2(p+1)(p-1).$$

$p+1=2^e3^fR$ を代入して

$$2^{e+1}3^f(p-1)\varphi(R)=2(p+1)(p-1)=2(p-1)2^e3^fR.$$

よって, $\varphi(R)=R$. したがって, $R=1, p+1=2^e3^f, A=2^e3^{f+1}p$.

$X=2^e3^f$ とおくとき $p+1=2^e3^f=X$. よって,

$$p=2^e3^f-1, B=\varphi(A)+1=2^e3^f\overline{p}+1=X\overline{p}+1=X(X-2)+1=(X-1)^2=p^2$$

End

逆に, $X=2^e3^f$ とおくとき $p=X-1$ が素数と仮定すると, $a=2*p^2$ は $A=\sigma(a)-m=\sigma(a)-3, 2\varphi(A)=a-m+1=a-2$.

実際, $A=\sigma(a)-3=3p(p+1)=2^e3^{f+1}p$ なので, $2\varphi(A)=2^{e+1}3^f(p-1)=2X(p-1)$.

$a-2=2(p^2-1)=2(p+1)(p-1)=2X(p-1)$, により, $2\varphi(A)=a-m+1=a-2$.

e,f (ともに正) を動かして $p=2^e3^f-1$ と書ける素数が無限にあればいいのだが, 証明できる可能性は絶無であろう.

7　底が一般の場合, スーパーメルセンヌ完全数

奇素数 P を固定し, これを底とみなして $a=p=\sigma(P^e)+m$ が素数と仮定する. すると, $\sigma(a)=a+1$.

$\sigma(P^e)=\dfrac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}$ により $a=p=\sigma(P^e)+m=\dfrac{P^{e+1}-1}{\overline{P}}+m$ なので,

$$\sigma(a)=a+1=\frac{P^{e+1}+P-2}{\overline{P}}+m$$

これより

$$\overline{P}(a-m)+1=P^{e+1}.$$

そこで, $A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ とおくと, $A=P^{e+1}$.

それゆえ、

$\overline{P}\sigma(A)=P^{e+2}-1$.

$\overline{P}(a-m)+1=P^{e+1}$ を使うと,

$$\overline{P}\sigma(A)+1=P^{e+2}=P\overline{P}(a-m)+P.$$

$$\overline{P}\sigma(A)=P\overline{P}(a-m)+\overline{P}.$$

$\overline{P}$ を払い, $A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ と $\sigma(A)=P(a-m)+1$ を連立させて, この解 a をスーパー メルセンヌ完全数といい A をそのパートナ,$B=\sigma(A)-1$ をシャドウという.

$A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ と $\sigma(A)=P(a-m)+1$ を用いて次の計算をする.

$$\overline{P}\sigma(A)-PA=P\overline{P}(a-\sigma(a)+1)-1.$$

命題 5 a が素数なら $a-\sigma(a)+1=0$. よって, $\overline{P}\sigma(A)-PA=-1$.

逆に, $\overline{P}\sigma(A)-PA=-1$ なら $a-\sigma(a)+1=0$. よって,a は素数.

表 27: $P=3$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
P=3					
m= -10					
3	3	27	3^3	39	$3*13$
1611	3^2*179	4699	$37*127$	4863	$3*1621$
12123	3^3*449	36019	$181*199$	36399	$3*11*1103$
25731	3^3*953	76339	$97*787$	77223	$3*25741$
m= -9					
31	31	81	3^4	120	2^3*3*5
3271	3271	6561	3^8	9840	$2^4*3*5*41$
m= -8					
5	5	27	3^3	39	$3*13$
113	113	243	3^5	363	$3*11^2$
9833	9833	19683	3^9	29523	$3*13*757$

表 28: $P = 3$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
m= -6					
4	2^2	25	5^2	30	$2*3*5$
7	7	27	3^3	39	$3*13$
1087	1087	2187	3^7	3279	$3*1093$
m= -5					
39	$3*13$	121	11^2	132	2^2*3*11
359	359	729	3^6	1092	$2^2*3*7*13$
m= -3					
37	37	81	3^4	120	2^3*3*5
m= -2					
2	2	9	3^2	12	2^2*3
11	11	27	3^3	39	$3*13$
1091	1091	2187	3^7	3279	$3*1093$
9839	9839	19683	3^9	29523	$3*13*757$
m= -1					
3	3	9	3^2	12	2^2*3
m= 0					
13	13	27	3^3	39	$3*13$
1093	1093	2187	3^7	3279	$3*1093$

表 29: $P=3$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
m= 1					
2	2	3	3	3	3
5	5	9	3^2	12	2^2*3
41	41	81	3^4	120	2^3*3*5
m= 2					
2	2	1	1	0	0
3	3	3	3	3	3
935	$5*11*17$	2587	$13*199$	2799	3^2*311
22055	$5*11*401$	57883	$7*8269$	66159	3^2*7351
m= 3					
3	3	1	1	0	0
7	7	9	3^2	12	2^2*3
43	43	81	3^4	120	2^3*3*5
367	367	729	3^6	1092	$2^2*3*7*13$
29527	29527	59049	3^10	88572	2^2*3*11^2*61
m= 4					
5	5	3	3	3	3
17	17	27	3^3	39	$3*13$
1097	1097	2187	3^7	3279	$3*1093$
8921	$11*811$	19479	$3*43*151$	26751	$3*37*241$
m= 5					
5	5	1	1	0	0
m= 6					
7	7	3	3	3	3
19	19	27	3^3	39	$3*13$
127	127	243	3^5	363	$3*11^2$
4251	$3*13*109$	12307	$31*397$	12735	$3^2*5*283$

表 30: $P = 3$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
m= 7					
7	7	1	1	0	0
11	11	9	3^2	12	$2^2 * 3$
47	47	81	3^4	120	$2^3 * 3 * 5$
29531	29531	59049	3^10	88572	$2^2 * 3 * 11^2 * 61$

8 $P = 5$ スーパーメルセンヌ完全数

表 31: $P = 5$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
m= -17					
2	2	77	$7 * 11$	95	$5 * 19$
139	139	625	5^4	780	$2^2 * 3 * 5 * 13$
3889	3889	15625	5^6	19530	$2 * 3^2 * 5 * 7 * 31$
m= -16					
3	3	77	$7 * 11$	95	$5 * 19$
m= -14					
5	5	77	$7 * 11$	95	$5 * 19$
17	17	125	5^3	155	$5 * 31$
4037	$11 * 367$	17717	$7 * 2531$	20255	$5 * 4051$
47585	$5 * 31 * 307$	236597	$197 * 1201$	237995	$5 * 47599$

表 32: $P = 5$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
m= -12					
7	7	77	$7 * 11$	95	$5 * 19$
19	19	125	5^3	155	$5 * 31$
769	769	3125	5^5	3905	$5 * 11 * 71$
m= -8					
11	11	77	$7 * 11$	95	$5 * 19$
23	23	125	5^3	155	$5 * 31$
203	$7 * 29$	989	$23 * 43$	1055	$5 * 211$
773	773	3125	5^5	3905	$5 * 11 * 71$
27275	$5^2 * 1091$	135437	$167 * 811$	136415	$5 * 27283$
m= -7					
149	149	625	5^4	780	$2^2 * 3 * 5 * 13$
m= -6					
13	13	77	$7 * 11$	95	$5 * 19$
m= -5					
151	151	625	5^4	780	$2^2 * 3 * 5 * 13$
m= -4					
2	2	25	5^2	30	$2 * 3 * 5$
527	$17 * 31$	2317	$7 * 331$	2655	$3^2 * 5 * 59$
4367	$11 * 397$	19117	$7 * 2731$	21855	$3 * 5 * 31 * 47$

表 33: $P = 5$ スーパーメルセンヌ完全数

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
m= -3					
3	3	25	5^2	30	$2*3*5$
m= -2					
17	17	77	$7*11$	95	$5*19$
29	29	125	5^3	155	$5*31$
m= -1					
5	5	25	5^2	30	$2*3*5$
m= 0					
19	19	77	$7*11$	95	$5*19$
31	31	125	5^3	155	$5*31$
19531	19531	78125	5^7	97655	$5*19531$
m= 1					
2	2	5	5	5	5
7	7	25	5^2	30	$2*3*5$
157	157	625	5^4	780	$2^2*3*5*13$
3907	3907	15625	5^6	19530	$2*3^2*5*7*31$

9 スーパーメルセンヌ完全数, 合流型

$A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ の定義はそのままにして,$\sigma(a)$ の代わりに $\varphi(a)$ を使ってみる. この場合をスーパーメルセンヌ完全数, 合流型という.

定義段階では $A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ のとき $A=P^{e+1}$ なので $\varphi(A)=\varphi(P^{e+1})=\overline{P}P^{e}$ となる.

$P\varphi(A)=\overline{P}P^{e+1}$ となるが, $A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P=P^{e+1}$.

$\sigma(a)=a+1$ が仮定されているので, $\overline{P}(a+1-m)+2-P=P^{e+1}$.

$$P^{e+1}=\overline{P}(a+1-m)+2-P=\overline{P}(a-m)+\overline{P}+2-P=\overline{P}(a-m)+1.$$

によって,

$$P\varphi(A)=\overline{P}P^{e+1}=\overline{P}^2(a-m)+\overline{P}.$$

よって, $A=\overline{P}(\sigma(a)-m)+2-P$ と $P\varphi(A)=\overline{P}P^{e+1}=\overline{P}^2(a-m)+\overline{P}$ を連立させて, スーパー メルセンヌ完全数合流型の定義方程式とい.

この解 a をスーパー メルセンヌ完全数合流型といい A をそのパートナ,$B=\sigma(A)-1$ をシャドウという.

命題 6 スーパー メルセンヌ完全数合流型の解 a が素数なら パートナー A は P^e.

Proof.

a が素数なら $A=\overline{P}(a+1-m)+2-P$ と $P\varphi(A)=\overline{P}^2(a-m)+\overline{P}$.

$A=\overline{P}(a+1-m)+2-P=\overline{P}(a-m)+2-P=\overline{P}+2-P=\overline{P}(a-m)+1$.

ゆえに

$$P\varphi(A)=\overline{P}^2(a-m)+\overline{P}=\overline{P}(\overline{P}(a-m)+1)=\overline{P}A.$$

ゆえに $P\varphi(A)=\overline{P}A$.

A は P の倍数なので $A=P^{\eta}L,(P\not|L)$ と書ける.

$P\varphi(A)=P\varphi(P^{\eta})\varphi(L)=\overline{P}P^{\eta}\varphi(L),\overline{P}A=\overline{P}P^{\eta}L$ によって,

$$\overline{P}P^{\eta}\varphi(L)=\overline{P}P^{\eta}L.$$

したがって, $\varphi(L)=L$. $L=1$ になるので, パートナー $A=P^e$.

End.

10 $P = 5$ スーパーメルセンヌ完全数 合流型

表 34: $P = 5$ スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = -21$	$q = 8p + 35$				
	$5 * p$		$3 * q$		$2q - 1$
15	$5 * 3$	177	$3 * 59$	117	$3^2 * 13$
65	$5 * 13$	417	$3 * 139$	277	277
155	$5 * 31$	849	$3 * 283$	565	$5 * 113$
185	$5 * 37$	993	$3 * 331$	661	661
215	$5 * 43$	1137	$3 * 379$	757	757
305	$5 * 61$	1569	$3 * 523$	1045	$5 * 11 * 19$
335	$5 * 67$	1713	$3 * 571$	1141	$7 * 163$
365	$5 * 73$	1857	$3 * 619$	1237	1237
$m = 9$	$q = 8p - 5$				
	$5 * p$		$3^3 * q$		$18q - 17$
65	$5 * 13$	297	$3^3 * 11$	181	181
335	$5 * 67$	1593	$3^3 * 59$	1045	$5 * 11 * 19$
785	$5 * 157$	3753	$3^3 * 139$	2485	$5 * 7 * 71$
1415	$5 * 283$	6777	$3^3 * 251$	4501	$7 * 643$
1865	$5 * 373$	8937	$3^3 * 331$	5941	$13 * 457$
2495	$5 * 499$	11961	$3^3 * 443$	7957	$73 * 109$
3215	$5 * 643$	15417	$3^3 * 571$	10261	$31 * 331$
3305	$5 * 661$	15849	$3^3 * 587$	10549	$7 * 11 * 137$
3845	$5 * 769$	18441	$3^3 * 683$	12277	12277
4835	$5 * 967$	23193	$3^3 * 859$	15445	$5 * 3089$
5105	$5 * 1021$	24489	$3^3 * 907$	16309	$47 * 347$
5465	$5 * 1093$	26217	$3^3 * 971$	17461	$19 * 919$
7265	$5 * 1453$	34857	$3^3 * 1291$	23221	$11 * 2111$

表 35: $P = 5$ スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = -9$					
77	$7 * 11$	417	$3 * 139$	277	277
25277	$7 * 23 * 157$	121377	$3 * 40459$	80917	80917
$m = -8$					
23	23	125	5^3	101	101
773	773	3125	5^5	2501	$41 * 61$
$m = -7$					
149	149	625	5^4	501	$3 * 167$
$m = -5$					
151	151	625	5^4	501	$3 * 167$

表 36: $P = 5$ スーパーメルセンヌ完全数 合流型

a	素因数分解	A	素因数分解	B	素因数分解
$m = -4$					
2	2	25	5^2	21	$3 * 7$
$m = -3$					
3	3	25	5^2	21	$3 * 7$
$m = -2$					
4	2^2	33	$3 * 11$	21	$3 * 7$
9	3^2	57	$3 * 19$	37	37
29	29	125	5^3	101	101
$m = -1$					
5	5	25	5^2	21	$3 * 7$
$m = 0$					
31	31	125	5^3	101	101
19531	19531	78125	5^7	62501	62501
$m = 1$					
2	2	5	5	5	5
7	7	25	5^2	21	$3 * 7$
157	157	625	5^4	501	$3 * 167$
3907	3907	15625	5^6	12501	$3^3 * 463$
$m = 2$					
3	3	5	5	5	5
$m = 3$					
5	5	5	5	5	5
$m = 5$					
11	11	25	5^2	21	$3 * 7$
3911	3911	15625	5^6	12501	$3^3 * 463$