(A,B,C) 完全数と 乗数付き完全数, 高校生にもわかる数学研究の講義 , 書泉グランデ, 2019 November 22

飯高 茂

平成 31 年 11 月 20 日

1 3 倍積完全数

$\sigma(a) - 3a = 0$ の解 a は完全数の類似として古来から研究され 3 倍積完全数と呼ばれていた. 完全数と比べるとその数は少ない.

表 1: 3 倍積完全数

a	素因数分解
120	$2^3 * 3 * 5$
672	$2^5 * 3 * 7$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$
459818240	$2^8 * 5 * 7 * 19 * 37 * 73$
1476304896	$2^{13} * 3 * 11 * 43 * 127$

3 倍積完全数をすべて数え出すことが古来研究の目的であったが未完成である.

ここでは 3 倍積完全数の新しい研究課題を提案する. すなわち (A,B,C) 完全数 の立場にたった研究をする.

復習から始める

2 (A,B,C) 完全数

与えられた定数項 D と整数 (A, B, C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca = D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

定数 k とそれの因子にならない素数 p について $a = kp$ が (A,B,C) 完全数になる場合の素数 p が無数にある ($a = kp$:B 型解) とする.

$$
\begin{aligned}
A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca &= A\sigma(k)(p+1) + B\varphi(k)(p-1) - Ckp \\
&= (A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck)p + A\sigma(k) - B\varphi(k) \\
&= D
\end{aligned}
$$

となるが, 解となる素数 p が無数にあると仮定したので,

$$A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck = 0, A\sigma(k) - B\varphi(k) = D.$$

$A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck = 0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく.

$D_0 = A\sigma(k_0) - B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

$A\sigma(k_0) + B\varphi(k_0) - Ck_0 = 0$ により, $D_0 = Ck_0 - 2B\varphi(k_0)$.

$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D_0$ の解 a を固有完全数 k_0 の (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

$a = kp$ と書けるとき 通常型 (A,B,C) 宇宙完全数とよびそれ以外をエイリアン解, 天与の解などと呼ぶ. これらを全てを探し出すことがすることが基本的課題である.

一般に与えられた定数項 D に対して (A,B,C) 完全数を求めることは特別な場合以外には難しい.

正方行列 M に対してその固有値と固有ベクトルを求めることは基本的課題である.

ここでは, 固有完全数が固有値にあたりと 宇宙完全数が固有ベクトルに対応する.

3 (1,0,3) 完全数

ここでは,(1,0,3) 完全数として研究する.

(1,0,3) 完全数の固有完全数を調べ, 宇宙定数項を求めその宇宙完全数を決定する.

固有完全数の定義式は $\sigma(k) = 3k$ になりその解は $k_0 = 120$ および 672 という控えめな解があり $k_0 = 120$ の宇宙定数項 $D_0 = 3k_0 = 360$ となる.

$\sigma(a) - 3a = D_0 = 360$ が宇宙完全数の定義式である.

表 2: (1,0,3) 宇宙完全数, 宇宙定数項 $D_0 = 360$

a	素因数分解
$D = 360$	
840	$2^3 * 3 * 5 * 7$
1320	$2^3 * 3 * 5 * 11$
1560	$2^3 * 3 * 5 * 13$
2040	$2^3 * 3 * 5 * 17$
2280	$2^3 * 3 * 5 * 19$
2760	$2^3 * 3 * 5 * 23$
3480	$2^3 * 3 * 5 * 29$
3720	$2^3 * 3 * 5 * 31$
4440	$2^3 * 3 * 5 * 37$
4920	$2^3 * 3 * 5 * 41$
5160	$2^3 * 3 * 5 * 43$
5640	$2^3 * 3 * 5 * 47$
6360	$2^3 * 3 * 5 * 53$
7080	$2^3 * 3 * 5 * 59$
通常解	$2^3 * 3 * 5 * p$
1080	$2^3 * 3^3 * 5$
3000	$2^3 * 3 * 5^3$
1920	$2^7 * 3 * 5$

$k_0 = 120 = 2^3 * 3 * 5$ の素数倍が通常解, それ以外は天与の解である.

ここで得られた天与の解はすべて擬素数として説明できる.

1. 素数 p が 3^2 に変異して $a = 1080 = 2^3 * 3^3 * 5$
2. 素数 p が 2^4 に変異して $a = 1920 = 2^7 * 3 * 5$
3. 素数 p が 5^2 に変異して $a = 3000 = 2^3 * 3 * 5^3$

もちろん解の探査範囲を拡げればさらに天与の解が見つかる可能性がある.

$a = 1920 = 2^7 * 3 * 5$ が解であることの検証

$a=2^e*3*5$ を解とする. $N=2^{e+1}-1$ とおけば

$\sigma(a)=\sigma(2^e*3*5)=N*4*6, 3a=\dfrac{N+1}{2}*45$ が $\sigma(a)-3a=360$ を満たすので,

$N=255; 2^{e+1}=256=2^8, e=7$

2 番目の 3 倍積完全数は $k_0=672$, その宇宙定数項は $D_0=3*672=2016$.

固有完全数 $k_0=672$ のとき宇宙定数項 2016 で宇宙完全数は次の通り.

表 3: (1,0,3) 宇宙完全数, 定数項 $D=2016$

a	素因数分解
$D=2016$	
3360	$2^5*3*7*5$
7392	$2^5*3*7*11$
8736	$2^5*3*7*13$
11424	$2^5*3*7*17$
12768	$2^5*3*7*19$
15456	$2^5*3*7*23$
19488	$2^5*3*7*29$
20832	$2^5*3*7*31$
24864	$2^5*3*7*37$
27552	$2^5*3*7*41$
28896	$2^5*3*7*43$
31584	$2^5*3*7*47$
35616	$2^5*3*7*53$
通常解	$2^5*3*7*p$

$a=2^5*3*7*p$ を通常解という.

通常解以外の解を探すことが楽しみである.

表 4: 3 倍宇宙完全数, 宇宙定数項 2016 , 天与の解

a	素因数分解
6048	$2^5 * 3^3 * 7$
6750	$2 * 3^3 * 5^3$
12720	$2^4 * 3 * 5 * 53$
15288	$2^3 * 3 * 7^2 * 13$
32928	$2^5 * 3 * 7^3$
35904	$2^6 * 3 * 11 * 17$
43008	$2^{11} * 3 * 7$
96048	$2^4 * 3^2 * 23 * 29$

宇宙定数項 2016 のときの通常解ではない解の例が以上 5 つある.
通常解 $2^5 * 3 * 7 * p$ の素数が変異して擬素数解がでる.

1. p が 2^6 に変異して $a = 43008 = 2^{11} * 3 * 7$
2. p が 3^2 に変異して $a = 6048 = 2^5 * 3^3 * 7$
3. p が 7^2 に変異して $a = 32928 = 2^5 * 3 * 7^3$

これら以外がエイリアン解, または天与の解というのである.

特定の定数項に対する解が多くあるモノを探してみた.

表 5: (1,0,3) 完全数 $D = -28$

a	素因数分解
$D = -28$	
28	$2^2 * 7$
84	$2^2 * 3 * 7$
252	$2^2 * 3^2 * 7$
756	$2^2 * 3^3 * 7$
2268	$2^2 * 3^4 * 7$
6804	$2^2 * 3^5 * 7$

この解の表によれば $\sigma(a) - 3a = -28$ の解は $28 * 3^e$ の形らしい.

第 2 完全数 28 から導かれた定数項 -28 の (1,0,3) 完全数の解が $28 * 3^e$ となるのは興味深い.

$a = 28 * 3^e$ が $\sigma(a) - 3a = -28$ の解になることは容易に検証できる.

命題 1 *$\sigma(a) - 3a = -28$ の解 a が $28b$ で $28, b$ が互いに素なら $b = 3^e$(ただし概完全数予想を使う)*

Proof.

$a = 28b$ で $28, b$ が互いに素と仮定する.

$\sigma(a) = \sigma(28b) = 56\sigma(b)$ なので $\sigma(a) - 3a + 28 = 56\sigma(b) - 3 * 28b + 28 = 0$ により $2\sigma(b) - 3b + 1 = 0$.

一方 $b = 3^e$ なら等比数列の和の公式によって, $2\sigma(b) = 3b - 1$.

この逆が公比 3 の概完全数予想なので, これを安易に使えば証明が終わる.

End.

4 付録

特定の定数項 D について解の多く出るものを提示する.

表 6: 3 倍積完全数, 定数項

a	素因数分解
$D = 84$	
420	$2^2 * 3 * 5 * 7$
1584	$2^4 * 3^2 * 11$
5292	$2^2 * 3^3 * 7^2$
5796	$2^2 * 3^2 * 7 * 23$
$D = -36$	
26	$2 * 13$
90	$2 * 3^2 * 5$
96	$2^5 * 3$
792	$2^3 * 3^2 * 11$
1020	$2^2 * 3 * 5 * 17$
5472	$2^5 * 3^2 * 19$

表 7: 3 倍積完全数, 定数項

a	素因数分解
$D=-30$	
22	$2*11$
40	2^3*5
42	$2*3*7$
$D=-21$	
11	11
15	$3*5$
72	2^3*3^2
$D=-18$	
14	$2*7$
20	2^2*5
30	$2*3*5$
630	$2*3^2*5*7$
2310	$2*3*5*7*11$
$D=-12$	
10	$2*5$
24	2^3*3
60	2^2*3*5

5 $(P-1,0,P)$ 完全数

$a=P^e, (P:$ 素数$)$ なら $\overline{P}=P-1$ とおくとき $\overline{P}\sigma(a)=P^{e+1}-1=Pa-1$ が成り立つ.

そこで $\overline{P}\sigma(a)-Pa=D$ を $(P-1,0,P)$ 完全数の定義式と見なすことができる.

$P>3$ の場合 $(\overline{P},0,P)$ 完全数は一般化された完全数になるはずである.

次の結果は意外なモノであった.

補題 1 $P>3$ の場合 $(\overline{P},0,P)$ 完全数の固有完全数は存在しない.

Proof.

固有完全数の定義式は,

$$\overline{P}\sigma(k)=Pk$$

$\overline{P}$ は偶数なので, Pk も偶数. P は奇数なので, k は偶数. $k=2^eL, (L:$ 奇数$)$ とおけば $N=2^{e+1}-1$ を用いて

$$\overline{P}\sigma(k)=\overline{P}N\sigma(L)=P\frac{N+1}{2}L.$$

$\overline{P}N\sigma(L)\geq\overline{P}NL$ により,

$$P(N+1)L\geq 2\overline{P}NL.$$

ゆえに

$$P(N+1)\geq 2\overline{P}N=2(P-1)N=2PN-2N.$$

$P\geq PN-2N$ になり $2N\geq P(N-1); \frac{2N}{N-1}\geq P$.

よって,

$$\frac{2N}{N-1}=\frac{2N-2+2}{N-1}=\frac{2}{N-1}+2\geq P\geq 3.$$

等号が成立すると, $N=2, P=3; e=1$. $P\geq 5$ のとき式は成り立たない.

End.

6 $(2,0,3)$ 完全数

$P=3$ に限って書いて見よう.

固有完全数の定義式は $2\sigma(k)=3k$ なので k は 2 の倍数になり $k=2^eM, (M$: 2 の倍数ではない$)$ と書ける.

$$0=2\sigma(k)-3k=2(2^{e+1}-1)\sigma(M)-3*2^eM.$$

$R=2^e$ とおくとき

$0=2(2^{e+1}-1)\sigma(M)-3*2^eM=2(2R-1)\sigma(M)-3RM$ なので

$$2(2R-1)\sigma(M)=3RM.$$

$$\frac{4R-2}{3R} = \frac{M}{\sigma(M)} \leq 1.$$

$4R-2 \leq 3R$ により $2 \leq 2^e = R \leq 2$.

ゆえに, $R=2, e=1$. よって, $\dfrac{M}{\sigma(M)} = \dfrac{4R-2}{3R} = 1$. これより $M=1, k=2$.

固有完全数はただ 1 つ $k_0 = 2$. $a = k_0 p = 2p$ が (2,0,3) 宇宙完全数の解なので宇宙定数項は $D_0 = 2\sigma(a) - 3a = 6p + 6 - 6p = 6$.

(2,0,3) 宇宙完全数の方程式は $2\sigma(a) - 3a = 6$. この解は $a = 2p, (p:$ 奇素数$)$ に限る.

定理 1 $2\sigma(a) - 3a = D = 6$ のとき $a = 8, a = 2p$. p は奇素数.

意外にも $P=2$ の場合よりも $P>2$ の方が簡単な結果になった.

正直なところこれではつまらない. もっと難しく数学が奥深くなるような結果がほしい. したがって一般化を深く考え直す必要がある.

7 数値例

$2\sigma(a)-3a=D=-m,\ P=3$ について数値例を挙げる.

表 8: $2\sigma(a)-3a=D=-m,\ P=3$

a	素因数分解
$m=-9$	
153	3^2*17
957	$3*11*29$
1917	3^3*71
18873	3^4*233
24957	$3^2*47*59$
29637	$3^2*37*89$
67077	$3^2*29*257$
$m=-7$	
171	3^2*19
1971	3^3*73

A,D 型解が多いのでこれらを調べることが課題になる.

表 9: $2\sigma(a) - 3a = D = -m = 6,\ P = 3$

a	素因数分解
$m = -6$	
6	$2 * 3$
8	2^3
10	$2 * 5$
14	$2 * 7$
22	$2 * 11$
26	$2 * 13$
34	$2 * 17$
38	$2 * 19$
46	$2 * 23$
58	$2 * 29$
62	$2 * 31$
74	$2 * 37$
82	$2 * 41$
86	$2 * 43$
94	$2 * 47$
106	$2 * 53$
118	$2 * 59$
122	$2 * 61$
134	$2 * 67$
142	$2 * 71$
146	$2 * 73$
158	$2 * 79$
166	$2 * 83$
178	$2 * 89$
194	$2 * 97$

これは固有完全数 2 に対する宇宙完全数である. 簡単すぎていかにもつまらない.

表 10: $2\sigma(a) - 3a = D = -m$,$P = 3$

a	素因数分解
$m = -3$	
15	$3 * 5$
207	$3^2 * 23$
1023	$3 * 11 * 31$
2975	$5^2 * 7 * 17$
19359	$3^4 * 239$
$m = -2$	
4	2^2
$m = -1$	
21	$3 * 7$
2133	$3^3 * 79$
19521	$3^4 * 241$

表 11: $2\sigma(a) - 3a = D = -m$, $P = 3$

a	素因数分解
$m = 0$	
2	2
$m = 1$	
1	1
3	3
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7

$a = 3^e$ とおくとき $2\sigma(a) = 3a - 1$ となる.
この逆が大難問. $a = 3^e$ についての概完全数予想.

8　$(h, 0, 2h+2)$ 完全数

$h > 2$ を素数として $a = h2^e$ を考える.
$\sigma(a) = \sigma(h2^e) = (h+1)(2^{e+1}-1)$ なのでこれを h 倍する.

$$h\sigma(a) = (h+1)(2h2^e - h) = (h+1)(2a-h) = 2(h+1)a - h(h+1).$$

ここで, $(h, 0, 2h+2)$ 完全数を考える.

D を定数項として $h\sigma(a) - 2(h+1)a = D$ の解 a を考える.
$a = pk(p, k$ と互いに素な複数の素数), とおくとき
$h\sigma(kp) - 2(h+1)kp = (h\sigma(k) - 2(h+1)k)p + h\sigma(k) = D$ となる.
p は複数の素数なので, $h\sigma(k) - 2(h+1)k = 0$.
これが固有完全数 k の方程式であり $h = 3$ なら $3\sigma(k) - 8k = 0$ 解は部分的には求まる.

表 12: $3\sigma(k) - 8k = 0$ 固有完全数

k	素因数分解
84	$2^2 * 3 * 7$
1488	$2^4 * 3 * 31$
24384	$2^6 * 3 * 127$
270	$2 * 3^3 * 5$
1638	$2 * 3^2 * 7 * 13$

$k = 84 = 2^2 * 3 * 7, 1488; k = 2^4 * 3 * 31; k = 24384 = 2^6 * 3 * 127$ はそれぞれ完全数 56,496,8128 の 3 倍であり予期通りの解.

しかし後半の解 $k = 270 = 2 * 3^3 * 5; k = 1638 = 2 * 3^2 * 7 * 13$ は予期せぬ解である.

固有完全数 k_0 とおくとき, 宇宙定数項 D_0 は $h\sigma(k_0) = 2(h+1)k_0$.

$k_0 = 84$ なら, $D_0 = 2(h+1)k_0 = 8 \times 84 = 672$.

表 13: 宇宙定数項 $D_0 = 672 = 3 * 2^2 * 7$ のときの宇宙完全数,$3\sigma(a) - 8a = 672$ の解

a	素因数分解
420	$2^2 * 3 * 5 * 7$
924	$2^2 * 3 * 7 * 11$
1092	$2^2 * 3 * 7 * 13$
1428	$2^2 * 3 * 7 * 17$
1596	$2^2 * 3 * 7 * 19$
1932	$2^2 * 3 * 7 * 23$
2436	$2^2 * 3 * 7 * 29$
2604	$2^2 * 3 * 7 * 31$
3108	$2^2 * 3 * 7 * 37$
3444	$2^2 * 3 * 7 * 41$
3612	$2^2 * 3 * 7 * 43$
3948	$2^2 * 3 * 7 * 47$
4452	$2^2 * 3 * 7 * 53$
4956	$2^2 * 3 * 7 * 59$
5124	$2^2 * 3 * 7 * 61$
5628	$2^2 * 3 * 7 * 67$
672	$2^5 * 3 * 7$
4116	$2^2 * 3 * 7^3$
756	$2^2 * 3^3 * 7$

期待に違わず擬素数解が出た. エイリアンは未だ発見できない.

9 乗数付き完全数

h は素数 P でわれないとし, $a = hP^e$ とおく.

9.1 $\sigma(a)$ のとき

$\sigma(a) = \sigma(hP^e) = \sigma(h)\dfrac{P * P^e - 1}{\overline{P}}$ なので

$$h\overline{P}\sigma(a) = \sigma(h)(P * h * P^e) - h\sigma(h) = \sigma(h)aP - h\sigma(h).$$

よって,

$$h\overline{P}\sigma(a) = \sigma(h)aP - h\sigma(h).$$

$$a = \frac{h\overline{P}\sigma(a) + h\sigma(h)}{\sigma(h)P}.$$

9.2 $\varphi(a)$ のとき

$$hP\varphi(a) = hP\varphi(hP^e) = \varphi(h)\overline{P}hP^e = \varphi(h)\overline{P}a$$

$a = \dfrac{hP\varphi(a)}{\varphi(h)\overline{P}} = \dfrac{h\overline{P}\sigma(a) + h\sigma(h)}{\sigma(h)P}$ により

$$P^2 * \sigma(h) * \varphi(a) = \varphi(h)\overline{P}^2\sigma(a) + \sigma(h)\varphi(h)\overline{P}.$$

10 $(\overline{P}^2, -P^2, 0)$ 完全数

$a = P^e$ とおく. $\overline{P}\sigma(a) = aP - 1$ と $\varphi(a) = \overline{P}P^{e-1}$ が成り立つ.
ここから a を抜いて, $\sigma(a), \varphi(a)$ を使う (A,B,C) 完全数を作ろう.
$P^2\varphi(a) = \overline{P}P^{e+1} = \overline{P}aP$ が成り立つので,
$\overline{P}\sigma(a) = aP - 1$ に $\overline{P}$ を掛けてできた

$$\overline{P}^2\sigma(a) = a\overline{P}P - \overline{P}$$

$P^2\varphi(a) = \overline{P}aP$ を代入して

$$\overline{P}^2\sigma(a) = P^2\varphi(a) - \overline{P}.$$

定数項 D を用いて

$$\overline{P}^2\sigma(a) - P^2\varphi(a) = D.$$

$P = 2$ とすると, $\sigma(a) - 4\varphi(a) = D$. これは半完全数の式とほぼ同じ.
$P = 3$ とすると, $4\sigma(a) - 9\varphi(a) = D$.

表 14: (1,−4,0) 完全数

a	素因数分解
$D = -1$	
2	2
4	2^2
8	2^3
16	2^4
32	2^5
64	2^6
128	2^7
256	2^8
512	2^9

$\sigma(a) - 4\varphi(a) = -1$ の解として 2^e があるのは明らかだがこれに限るかどうかわからない. ここでまた, 概完全数の類似が出てきた.

表 15: (1,−4,0) 完全数の固有完全数

k	素因数分解
$D=0$	
14	$2*7$
248	2^3*31
4064	2^5*127
418	$2*11*19$
3596	$2^2*29*31$
3956	$2^2*23*43$
5396	$2^2*19*71$
8636	$2^2*17*127$
105	$3*5*7$
1485	3^3*5*11
3135	$3*5*11*19$

$D=0$ の第 1 ブロックには完全数の半分が出ている.

$D=0$ の第 3 ブロックには $a=2^2*p*q$ の形をしている.

$a=2^2*p*q$ を $\sigma(a)-4\varphi(a)=0$ に代入すると, $\sigma(a)=7(B+\Delta+1), 4\varphi(a)=8(B-\Delta+1)$ なので

$$\sigma(a)-4\varphi(a)=-B+15\Delta-1=0.$$

ここで $p_0=p-15, q_0=q-15, B_0=p_0q_0$ とおくと, $B_0=B-15\Delta+15^2$.

$p_0q_0=B_0=B-15\Delta+15^2=15^2-1=14*16=2^5*7$.

$p_0=p-15, q_0=q-15$ はともに偶数なので, 偶数の分解をまず考える.

$32=2^5=2*16, 4*8$ これに 1,7 を割り振ると

1) (2*7)*16, 2) (7*16)*2, 3) (4*7)*8, 4) 4*(8*7) 各に 15 を加えても素数になるものを探す.

1. $p=14+15=19, q=16+15=31$.
2. $p=112+15=127, q=2+15=17$.
3. $p=28+15=43, q=8+15=23$.
4. $p=4+15=19, q=56+15=71$.

こうしてすべてが素数になったのは実に不思議な驚くべきことである.

事前には 1 つくらいしか素数のペアができないだろうと想像していたのだった.

11 素数乗数 とオイラー関数

h(素数乗数) を P とは異なる素数とし $a = hP^e$ を考える.
$\sigma(a) = \sigma(hP^e) = (h+1)\frac{(P^{e+1}-1)}{\overline{P}}$ により
$\overline{P}\sigma(a) = (h+1)(P^{e+1}-1)$ に h を掛けて

$$h\overline{P}\sigma(a) = (h+1)(hPP^e - h) = (h+1)(Pa - h).$$

次にオイラー関数を考えて
$\varphi(a) = \varphi(hP^e) = (h-1)\overline{P}P^{e-1}$ になるので, hP を乗じて

$$hP\varphi(a) = (h-1)\overline{P}hP^e = (h-1)\overline{P}a.$$

よって, P を乗じて

$$hP^2\varphi(a) = (h-1)\overline{P}Pa.$$

$h\overline{P}\sigma(a) = (h+1)(Pa-h)$ に $\overline{P}(h-1)$ を掛けると

$$(h-1)h\overline{P}^2\sigma(a) = (h^2-1)(\overline{P}Pa - h\overline{P}) = (h+1)(h-1)\overline{P}Pa - (h^2-1)h\overline{P}.$$

$$(h-1)h\overline{P}^2\sigma(a) = (h+1)(hP^2\varphi(a) - (h-1)h\overline{P}).$$

$h = 3$ とすると,

$$6\overline{P}^2\sigma(a) = 4(3P^2\varphi(a) - 6\overline{P}).$$

さらに $P = 2$ のとき

$$6\sigma(a) = 4(12\varphi(a) - 12).$$

$$\sigma(a) = 8\varphi(a) - 8.$$

定数項 D に対して, 次の (A,B,C) 完全数を考える.

$$\sigma(a) - 8 * \varphi(a) = D$$

12 数値解

表 16: (1,−8,0) 完全数

a	素因数分解
$D=-8$	
6	$2*3$
12	2^2*3
24	2^3*3
48	2^4*3
96	2^5*3
192	2^6*3
384	2^7*3
768	2^8*3
1536	2^9*3

表 17: (1,−8,0) 完全数の固有完全数

k	素因数分解
42	$2*3*7$
744	2^3*3*31
12192	$2^5*3*127$
7668	2^2*3^3*71
10788	$2^2*3*29*31$
11868	$2^2*3*23*43$
16188	$2^2*3*19*71$
25908	$2^2*3*17*127$
8680	$2^3*5*7*31$
594	$2*3^3*11$
15642	$2*3^2*11*79$
28458	$2*3^3*17*31$
49842	$2*3^3*13*71$
1254	$2*3*11*19$
60078	$2*3*17*19*31$
70122	$2*3*13*29*31$
77142	$2*3*13*23*43$
14630	$2*5*7*11*19$

(1,−4,0) 完全数の固有完全数と比べてみよう.

表 18: (1,−4,0) 完全数の固有完全数

k	素因数分解
$D=0$	
14	$2*7$
248	2^3*31
4064	2^5*127
418	$2*11*19$
3596	$2^2*29*31$
3956	$2^2*23*43$
5396	$2^2*19*71$
8636	$2^2*17*127$
105	$3*5*7$
1485	3^3*5*11
3135	$3*5*11*19$

表 19: (1,−8,0) 完全数

a	素因数分解
D= 4	
1332	$2^2 * 3^2 * 37$
D= 6	
72	$2^3 * 3^2$
D= 16	
30	$2 * 3 * 5$
156	$2^2 * 3 * 13$
696	$2^3 * 3 * 29$
2800	$2^4 * 5^2 * 7$
2928	$2^4 * 3 * 61$

表 20: $k_0 = 2*3*7$ のときの宇宙定数項 $D_0 = 16*12*2$. (1,−8,0) 宇宙完全数

a	素因数分解
$D_0 = 16*12*2$	
210	$2*3*5*7$
462	$2*3*7*11$
546	$2*3*7*13$
714	$2*3*7*17$
798	$2*3*7*19$
966	$2*3*7*23$
1218	$2*3*7*29$
1302	$2*3*7*31$
1554	$2*3*7*37$
1722	$2*3*7*41$
1806	$2*3*7*43$
1974	$2*3*7*47$
2226	$2*3*7*53$
2478	$2*3*7*59$
2562	$2*3*7*61$
2814	$2*3*7*67$
2982	$2*3*7*71$
3066	$2*3*7*73$
3318	$2*3*7*79$
3486	$2*3*7*83$
3738	$2*3*7*89$
4074	$2*3*7*97$
4242	$2*3*7*101$
4326	$2*3*7*103$
4494	$2*3*7*107$
4578	$2*3*7*109$
通常解	$2*3*7*p$
1540	$2^2*5*7*11$
5076	2^2*3^3*47
7254	$2*3^2*13*31$
7584	2^5*3*79

通常解以外のエイリアンはつかみ難い

表 21: $2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 8, m = -8$

a	素因数分解
$m = -D_0 = -8$	
12	$2^2 * 3$
20	$2^2 * 5$
28	$2^2 * 7$
44	$2^2 * 11$
52	$2^2 * 13$
68	$2^2 * 17$
76	$2^2 * 19$
92	$2^2 * 23$
116	$2^2 * 29$
124	$2^2 * 31$
148	$2^2 * 37$
164	$2^2 * 41$
172	$2^2 * 43$
188	$2^2 * 47$
212	$2^2 * 53$
236	$2^2 * 59$

iii. $k_0 = 6$ のとき $D_0 = 5k_0 - \varphi(k_0) = 18$.

表 22: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=18, m=-18$

a	素因数分解
$m=-D_0=-18$	
30	$2*3*5$
42	$2*3*7$
66	$2*3*11$
78	$2*3*13$
102	$2*3*17$
114	$2*3*19$
138	$2*3*23$
174	$2*3*29$
186	$2*3*31$
222	$2*3*37$
246	$2*3*41$
258	$2*3*43$