(A,B,C) 完全数 と至高の完全数

飯高 茂 (於 書泉グランデ)

2019/12/12

1 (A,B,C) 完全数

新しく始められた 3 項完全数の理論は意外に発展し, さらに一般化することに長所があることがわかりついに (A,B,C) 完全数という概念の導入に至った.

与えられた 整数 (A, B, C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

定数 k とそれの因子にならない素数 p について $a = kp$ が (A,B,C) 完全数になる場合の素数 p が無数にある ($a = kp$:B 型解) とする.

$$\begin{aligned} A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca &= A\sigma(k)(p+1) + B\varphi(k)(p-1) - Ckp \\ &= (A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck)p + A\sigma(k) - B\varphi(k) \\ &= D \end{aligned}$$

となるが, 解となる素数 p が無数にあると仮定したので,

$$A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck = 0, A\sigma(k) - B\varphi(k) = D.$$

$A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck = 0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく.

$D_0 = A\sigma(k_0) - B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

(宇宙項 と似ているのがかわいい)

$A\sigma(k) + B\varphi(k) - Ck = 0$ により, $D_0 = Ck_0 - 2B\varphi(k_0)$.

$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D_0$ の解を固有完全数 k_0 の (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

2 固有完全数 1 の定理

(A,B,C) 完全数の固有完全数 k_0 が 1 のときを考える.

$A\sigma(k_0) + B\varphi(k_0) - Ck_0 = A + B - C = 0$

$k_0 = 1$ なので無数の素数 p について解となり $D_0 = A\sigma(k_0) - B\varphi(k_0) = A - B$.

ここで素数 q がありそのべき $q^\eta, (\eta > 1)$ が解であると仮定する.

$a = q^\eta, R_1 = q^{\eta-1}$ とおき これらの $\sigma(a), \varphi(a)$ を計算する.

$a = q^\eta$ のとき

$\overline{q}\sigma(a) = q^2R_1 - 1, \varphi(a) = \overline{q}R_1, a = qR_1$ なので,$X = q^2R_1 - 1, Y = \overline{q}R_1$ とおくと,

$$Aq^2R_1 - A + B\overline{q}Y - CqY = (A - B)\overline{q} \tag{1}$$

$B\overline{q}Y - CqY = Y(B\overline{q} - Cq) = \overline{q}R_1(B\overline{q} - Cq), C = A + B$ に注意し R_1 の 1 次式に直しその係数を Γ とおくと

$$\begin{aligned}
\Gamma &= Aq^2 + \overline{q}(B\overline{q} - (A + B)q) \\
&= Aq^2 + B\overline{q}^2 - (A + B)q\overline{q}) \\
&= Aq^2 + B(q^2 - 2q + 1) - (A + B)(q^2 - q) \\
&= B(-2q + 1) + (A + B)q \\
&= Aq - \overline{q}B
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\Gamma = Aq - \overline{q}B.$$

これより式 (2) を変形して

$$R_1\Gamma = A + A\overline{q}\Gamma - B\overline{q} \tag{2}$$

ゆえに

$$R_1(Aq - \overline{q}B) = A + A\overline{q}\Gamma - B\overline{q} = Aq\Gamma - B\overline{q} \tag{3}$$

A でまとめて

$$A(R_1 - 1)q = \overline{q}B(R_1 - 1).$$

$R_1 = q^{\eta-1} - 1 > 0$ によってこれを除して

$Aq = B\overline{P}$ がでて

$$\frac{B}{A} = \frac{q}{\overline{P}}.$$

この左の項と右の項は既約分数なので $A=\overline{P}, B=q$. よって, $A=B-1$.
End

$(A+B-C)p+A-B=A-B$ により $A+B-C=0$. さらに $A=B-1$ なので, $C=2B-1$.

命題 1. $A=B-1$, $C=2B-1$ のとき, $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=-1$ ならば素数 p を解に持つ.

定理 1. $A=B-1$, $C=2B-1$ のとき, $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=-1$ 素数べき $q^{\varepsilon}, (\varepsilon>1)$ を解に持 ΓΓΓ

B が素数の時で $B=q$ になる.

$B=5$ なら (3,4,9) 完全数でそのとき 固有完全数 $k_0=1$ のときの宇宙完全数は 素数 p と 5^{ε} が解であり, 後者を天与の解 (gifted solution) という.

$B=2$ なら (1,2,3) 完全数で 固有完全数 $k_0=1$ のとき, 宇宙完全数は すべての奇素数 と 2^{ε} であると期待される.

3 (1,1,2) 宇宙完全数

(1,1,2) 完全数について固有完全数の方程式は $\sigma(k)+\varphi(k)=2k$.

この解 k_0 が固有完全数であるが 1 または 素数 q になる.

i. $k_0=1$ のとき 宇宙定数項は $D_0=0$.

宇宙完全数の方程式は

$$\sigma(a)+\varphi(a)-2a=0$$

この解は素数と 1.

i. $k_0=q$ のとき 宇宙定数項は $D_0=\sigma(q)-\varphi(q)=2$.

(1,1,2) 宇宙完全数の解は次の方程式の解になる.

$$\sigma(a)+\varphi(a)-2a=2$$

固有完全数 $k_0=q$ に対応する 解は (q と異なる) 素数 p について得られる qp.

これはいわゆる通常解である.

土屋知人によると,$\sigma(a)+1\varphi(a)-2a=2$ の解は $a=q_1q_2:(q_1,q_2)$ は相異なる素数のみ.

したがって, この場合も天与の解がないことがわかり (1,1,2) 宇宙完全数の解の問題は完全に解決した.

4 (1,2,3) 宇宙完全数

Table 1: $\sigma(k) + 2\varphi(k) - 3k = 0$

k	素因数分解
1	1
12	$2^2 * 3$
56	$2^3 * 7$
992	$2^5 * 31$
16256	$2^7 * 127$
260	$2^2 * 5 * 13$
1976	$2^3 * 13 * 19$
25232	$2^4 * 19 * 83$
41072	$2^4 * 17 * 151$
2156	$2^2 * 7^2 * 11$
2754	$2 * 3^4 * 17$

$k_0 = 1$ のとき $D_0 = 3k_0 - 4\varphi(k_0) = -1.$
$k_0 = 12$ のとき $D_0 = 3k_0 - 4\varphi(k_0) = 36 - 16 = 20.$

Table 2: $\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-1$

a	素因数分解
2	2
3	3
4	2^2
5	5
7	7
8	2^3
11	11
13	13
16	2^4
17	17
19	19
23	23
29	29
31	31
32	2^5

Table 3: $\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-1$

a	素因数分解
60	2^2*3*5
84	2^2*3*7
132	2^2*3*11
156	2^2*3*13
204	2^2*3*17
228	2^2*3*19
276	2^2*3*23
348	2^2*3*29
352	2^5*11
372	2^2*3*31
444	2^2*3*37
492	2^2*3*41
$12p$	2^2*3*p

5 (2,3,5) 宇宙完全数

(2,3,5) 宇宙完全数について計算結果を見る.

Table 4: $2\sigma(k) + 3\varphi(k) - 5k = 0, m = 0$

k	素因数分解	D_0
1	1	-1
4	2^2	8
6	$2 * 3$	18

この結果は固有完全数 k が 1,4,6 であることを意味する (しかし証明はできていない)

i. $k_0 = 1$ のとき $D_0 = 2\sigma(k_0) - 3\varphi(k_0) = 5k_0 - 4\varphi(k_0) = 1$.

Table 5: $2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 1, m = -1$

a	素因数分解
$m = -D_0 = -1$	
2	2
3	3
5	5
7	7
9	3^2
11	11
13	13
17	17
19	19
23	23
27	3^3
29	29
31	31
37	37
41	41
43	43
47	47
53	53
59	59
61	61

この解は, 素数 p または 3^e なのであろう.

$k_0 = 1$ なので $p = k_0 p$ が解なのは当然である.

しかし 3^e は思いがけない解なのでこれを天与の解 (gifted solution) という.

ii. $k_0 = 4$ のとき $D_0 = 5k_0 - \varphi(k_0) = 8$.

Table 6: $2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 8, m = -8$

a	素因数分解
$m = -D_0 = -8$	
12	$2^2 * 3$
20	$2^2 * 5$
28	$2^2 * 7$
44	$2^2 * 11$
52	$2^2 * 13$
68	$2^2 * 17$
76	$2^2 * 19$
92	$2^2 * 23$
116	$2^2 * 29$
124	$2^2 * 31$
148	$2^2 * 37$
164	$2^2 * 41$
172	$2^2 * 43$
188	$2^2 * 47$
212	$2^2 * 53$
236	$2^2 * 59$

解は $4p$ でこれは通常解.
天与の解はないだろう.
iii. $k_0 = 6$ のとき $D_0 = 5k_0 - \varphi(k_0) = 18$.

6 素数の積み上げ解

$m = 2$ のときの解は面白い.

このように素数の積が順次の解の場合には 素数の積み上げ解という. あたかも石垣に自然石を用いて作ったような面影があるから, この名前を選んだ.

$F(a) = 2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a, F(a) = -2$ について $a' = ap$ とおくとき

$F(a') = (2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a)p + 2\sigma(a) - 3\varphi(a) = -2p + 2\sigma(a) - 3\varphi(a)$ となる.

$F(a') = 2$ を仮定すると $-2 = F(a') = -2p + 2\sigma(a) - 3\varphi(a)$ となる.

$$2p = 2 + 2\sigma(a) - 3\varphi(a) = 5a + 2 - 6\varphi(a)$$

Table 7: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=18, m=-18$

a	素因数分解
$m=-D_0=-18$	
30	$2*3*5$
42	$2*3*7$
66	$2*3*11$
78	$2*3*13$
102	$2*3*17$
114	$2*3*19$
138	$2*3*23$
174	$2*3*29$
186	$2*3*31$
222	$2*3*37$
246	$2*3*41$
258	$2*3*43$

Table 8: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=-2, m=2$

a	素因数分解
10	$2*5$
130	$2*5*13$
23530	$2*5*13*181$

7 底が一般の至高の完全数

素数 P を 1 つ決めてこれを底 (base) という.

$m, e>0$ を与えて, $q=\sigma(P^e)+m$ を素数と仮定する. $a=P^eq$ を底 P をもつ狭義の完全数という.

$q=\sigma(P^e)+m$ を変形して, $\overline{P}(q-m)+1=P^{e+1}$.

$\sigma(a)=\sigma(P^e)\sigma(q)=\dfrac{(P^{e+1}-1)(q+1)}{\overline{P}}$ なので

$$
\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(a) &= \overline{P}\sigma(P^e)\sigma(q) \\
&= (P^{e+1}-1)(q+1) \\
&= aP - q + P^{e+1} - 1 \\
&= aP - q - 1 + \overline{P}(q-m) + 1 \\
&= aP - m\overline{P} + q(P-2).
\end{aligned}
$$

かくして $\overline{P}\sigma(a) = aP - m\overline{P} + q(P-2)$ を得るので, $L = \overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P}$ とおくと, $L = q(P-2)$. 書き換えて, $q = \dfrac{L}{P-2}$.

$a = P^e q$ のオイラー関数を計算する.

$$
\begin{aligned}
P\varphi(a) &= P\varphi(P^e q) \\
&= \overline{P}P^e(q-1) \\
&= \overline{P}P^e q - \overline{P}P^e \\
&= \overline{P}a - \overline{P}P^e
\end{aligned}
$$

により,

$$P\varphi(a) = \overline{P}a - \overline{P}P^e.$$

さらに P をかけて $\overline{P}(q-m)+1 = P^{e+1}$ 　を用いると

$$P^2\varphi(a) = P\overline{P}a - \overline{P}P^{e+1} = P\overline{P}a - \overline{P}(\overline{P}(q-m)+1).$$

これより

$$P^2\varphi(a) - P\overline{P}a + \overline{P} = -\overline{P}^2(q-m).$$

$K = P^2\varphi(a) - P\overline{P}a + \overline{P}$ とおくとき $-K = \overline{P}^2(q-m)$.

よって, $q = m - \dfrac{K}{\overline{P}^2}$. $q = \dfrac{L}{P-2}$ と組み合わせて

$$q = m - \frac{K}{\overline{P}^2} = \frac{m\overline{P}^2 - K}{\overline{P}^2} = \frac{L}{P-2}.$$

これより

$$(m\overline{P}^2 - K)(P-2) = L\overline{P}^2.$$

$L = \overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P}, K = P^2\varphi(a) - P\overline{P}a + \overline{P}$ を代入すると

$$L\overline{P}^2 = (\overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P})\overline{P}^2 = (P-2)(m\overline{P}^2 - P^2\varphi(a) + P\overline{P}a - \overline{P}).$$

$$(\overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P})\overline{P}^2 = (P-2)(m\overline{P}^2 - P^2\varphi(a) + P\overline{P}a - \overline{P})$$

を

$$(\overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P})\overline{P}^2 - ((P-2)(m\overline{P}^2 - P^2\varphi(a) + P\overline{P}a - \overline{P}) = 0$$

に直して, 左辺を $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D$ の形に整理する.

$A = \overline{P}^3$ は $\sigma(a)$ の係数,$B = (P-2)P^2$ は $\varphi(a)$ の係数, $C = P\overline{P}^2 + (P-2)P\overline{P} = P(P-1)(2P-3)$ は $-a$ の係数,

定数項は

$$\begin{aligned} D &= -m\overline{P}^3 + (P-2)(m\overline{P}^2 - \overline{P}) \\ &= -\overline{P}(m\overline{P}^2 + (P-2)(m\overline{P} - 1) \\ &= -\overline{P}(m\overline{P} + (P-2)) \end{aligned}$$

$$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D.$$

この解を至高の完全数 (supreme perfect numbers) と呼ぶ.

Table 9: $P = 3, 5, 7$

P	A	B	C	D
2	1	0	2	$-m$
3	8	9	18	$-2(2m+1)$
5	64	75	140	$-4(4m+3)$
7	216	245	462	$-6(6m+5)$

Table 10: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = -18$	
255	$3 * 5 * 17$
57615	$3 * 5 * 23 * 167$
87237	$3^5 * 359$
$m = -14$	
46449	$3^2 * 13 * 397$

Table 11: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = -12$	
8	2^3
$m = -10$	
999	$3^3 * 37$
18291	$3 * 7 * 13 * 67$
$m = -6$	
6	$2 * 3$
99	$3^2 * 11$
285	$3 * 5 * 19$
6417	$3^2 * 23 * 31$
46917	$3^2 * 13 * 401$
76461	$3 * 7 * 11 * 331$
$m = -2$	
4	2^2
75	$3 * 5^2$

Table 12: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = 0$	
10	$2 * 5$
322	$2 * 7 * 23$
$m = 2$	
117	$3^2 * 13$
$m = 4$	
3	3
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
$m = 6$	
5	5
14	$2 * 7$
15	$3 * 5$
231	$3 * 7 * 11$
1107	$3^3 * 41$

Table 13: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = 8$	
7	7
$m = 10$	
7353	$3^2 * 19 * 43$
47853	$3^2 * 13 * 409$
$m = 12$	
11	11
$m = 14$	
13	13
21	$3 * 7$
1161	$3^3 * 43$
89181	$3^5 * 367$