乗数付きオイラー型メルセンヌ完全数

宮本憲一

2019 年 12 月 13 日

h を奇数として
$a = h * 2^e + m$ を素数と仮定する。
$\varphi(a) = h * 2^e + m - 1$ より $A = h * 2^e$ とすれば、
$A = \varphi(a) - m + 1$,$2^{e-1}\varphi(h) = \varphi(A)$ で、$h = 3$ ならば $\varphi(A) = 2^e$,
$3\varphi(A) = a - m$ になる。以上のことから

定義 1 乗数3付き m だけ平行移動したオイラー型メルセンヌ完全数は、$A = \varphi(a) - m + 1$ $3\varphi(A) = a - m$ を満たす a であり A をそのパートナーという。

定理 1 $m = 0$ の場合、
$A = \varphi(a) + 1$
$3\varphi(A) = a$
となる a,A は,$a = 2^f * 3^e$ とかけ,A は素数で $A = 2^f * 3^{e-1} + 1$ となる。
（ただし $f > 0, e > 0$）

証明
a は 3 の倍数だから $a = 3^e L$(L は 3 で割れない) とおける。
$A = 2 * 3^{e-1}\varphi(L) + 1$
$\varphi(A) = 3^{e-1}L$
ここで L は偶数より $L = 2^f M$(ここでは M は 2 でも 3 でも割れない）
とおける。よって
$A = 2^f * 3^{e-1}\varphi(M) + 1$
$\varphi(A) = 2^f * 3^{e-1}M$
したがって、$1 \leq A - \varphi(A) = 2^f * 3^{e-1}(\varphi(M) - M) + 1 \leq 1$
$1 = A - \varphi(A) = 2^f * 3^{e-1}(\varphi(M) - M) + 1 = 1$
よって A は素数、$M = 1$
$a = 2^f * 3^e$ と A は素数で $A = 2^f * 3^{e-1} + 1$

$h=3,m=0$ のときの乗数付きオイラー型メルセンヌ完全数 a, そのパートナー A(素数) は無限に存在と予想される。

逆に

定理 2 $a=2^f*3^e$ と A は素数で $A=2^f*3^{e-1}+1$ ならば $A=\varphi(a)+1$
$3\varphi(A)=a$ を満たす。

証明
$A=\varphi(2^f*3^e)=2^{f-1}*2*3^{e-1}+1=2^f*3^{e-1}+1$ で素数より
$3\varphi(A)=3*(A-1)=2^f*3^e=a$

a	素因数分解	A	$A=2^f*3^{e-1}+1$ 素数
6	$2*3$	3	$3=2+1$
12	2^2*3	5	$5=2^2+1$
18	$2*3^2$	7	$7=2*3+1$
36	2^2*3^2	13	$13=2^2*3+1$
48	2^4*3	17	$17=2^4+1$
54	$2*3^3$	19	$19=2*3^2+1$
108	2^2*3^3	37	$37=2^2*3^2+1$
216	2^3*3^3	73	$73=2^3*3^2+1$
288	2^5*3^2	97	$97=2^5*3+1$
324	2^2*3^4	109	$109=2^2*3^3+1$
486	$2*3^5$	163	$163=2*3^4+1$
576	2^6*3^2	193	$193=2^6*3+1$
768	2^8*3	257	$257=2^8+1$