3 項完全数の展開
中編 不変数 $\Psi_{2,3}(a)$

飯高 茂

平成 31 年 7 月 20 日

1 3 項完全数の導入

与えられた e, m に対して, $q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数と仮定する.

$\alpha' = 2^e q$ は $\sigma(\alpha') = 2\alpha' - m$ を満たし, 平行移動 m の狭義の 完全数と呼ばれる.

それに対して,$\sigma(\alpha') = 2\alpha' - m$ を満た数 α' 一般の平行移動 m の広義の完全数ともいうが略して単に平行移動 m の完全数という.

さて, $\alpha = 2^{e+1}q$ は 完全数の倍になるが どんな方程式を満たすことになるだろうか.

$N_0 = 2^{e+2}-1$ とおくとき, $q = 2^{e+1}-1+m = \frac{N_0+1}{2}+m, \sigma(\alpha) = N_0*(q+1) = N_0q+N_0$ を満たす. これだけでは先へ進まないので,

$2\varphi(\alpha) = \frac{N_0+1}{2}(q-1), 3\alpha = 3\frac{N_0+1}{2}q$ を考えて,

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) - 3\alpha &= (\frac{2N_0 + N_0 + 1 - 3(N_0+1)}{2})q + \frac{N_0-1}{2} \\
&= -q + \frac{N_0+1}{2} \\
&= -\frac{N_0+1}{2} - m + \frac{N_0+1}{2} \\
&= -m.
\end{aligned}$$

さて $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a$ を用いると $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) - 3\alpha = -m$ となる.

定義 1 与えられた m に対して,$\Psi_{2,3}(a) = -m$ を満たすとき, a を平行移動 m の *(2,3)* 型 *3* 項完全数という.

図 1: 3 匹のエテコウ

1.1　例

　$a=p$ が素数の場合は $\Psi_{2,3}(a)=\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=p+1+2(p-1)-3p=-1$ になるので素数 p は 平行移動 1 の (2,3) 型 3 項完全数になる.

　素数べきの場合 $a=p^e$ は

$$\overline{p}\Psi_{2,3}(p^e)=(p^{e+1}-1)+2p^{e-1}(p-1)^2-3p^e(p-1)=(2-p)p^{e-1}-1=(1-p)p^{e-1}-1+p^{e-1}.$$

　よって, $\Psi_{2,3}(2^e)=-1, \Psi_{2,3}(3^e)=-\dfrac{3^{e-1}+1}{2}$. とくに $\Psi_{2,3}(3^2)=-2$.

　一般には $\overline{p}\Psi_{2,3}(p^e)=(1-p)p^{e-1}+p^{e-1}-1=-\overline{p}p^{e-1}+\overline{p}\sigma(p^{e-2})$ になるので

$$\Psi_{2,3}(p^e)=-p^{e-1}+\sigma(p^{e-2}).$$

　$\Psi_{2,3}(2^e)=-2^{e-1}+\sigma(2^{e-2})=-1, \Psi_{2,3}(p^2)=-p+1, \Psi_{2,3}(3^2)=-2.$

　$a=pq$, (p,q が相異なる素数) の場合は $B=pq, \Delta=p+q$ とおけば

　$\sigma(a)=B+\Delta+1, 2\varphi(a)=2(B-\Delta+1), -3a=-3B$ により

　$\Psi_{2,3}(pq)=B+\Delta+1+2(B-\Delta+1)-3B=3-\Delta=-m$ とおくとき $3+m=\Delta=p+q$.

　m が正の奇数なら $3+m$ は偶数で $3+m=\Delta=p+q$ を 2 個の奇素数 p,q の和で表すことを意味する.

　8 以上の偶数を 2 個の相異なる奇素数 p,q の和で表すことが常に可能である，というのが Goldbach の予想であり成立することは確実と思われるのだが証明ができていない.

表 1: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -29$

a	素因数分解
m =29	
87	$3 * 29$
247	$13 * 19$
968	$2^3 * 11^2$
m =28	
58	$2 * 29$
124	$2^2 * 31$
688	$2^4 * 43$
841	29^2
1888	$2^5 * 59$
72448	$2^8 * 283$
m =27	
105	$3 * 5 * 7$
161	$7 * 23$
209	$11 * 19$
221	$13 * 17$
2178	$2 * 3^2 * 11^2$
3465	$3^2 * 5 * 7 * 11$

表 2: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
m =26	
102	$2 * 3 * 17$
116	$2^2 * 29$
656	$2^4 * 41$
1230	$2 * 3 * 5 * 41$
5696	$2^6 * 89$
71936	$2^8 * 281$
m =25	$m + 3 = 28$
115	$5 * 23$
117	$3^2 * 13$
187	$11 * 17$
m =24	
248	$2^3 * 31$
306	$2 * 3^2 * 17$
2392	$2^3 * 13 * 23$
2728	$2^3 * 11 * 31$
11025	$3^2 * 5^2 * 7^2$
19328	$2^7 * 151$
27056	$2^4 * 19 * 89$
44336	$2^4 * 17 * 163$
130784	$2^5 * 61 * 67$
182368	$2^5 * 41 * 139$
249824	$2^5 * 37 * 211$
270248	$2^3 * 11 * 37 * 83$
507848	$2^3 * 11 * 29 * 199$

表 3: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
m =23	$m + 3 = 26$
69	$3 * 23$
133	$7 * 19$
m =22	
46	$2 * 23$
232	$2^3 * 29$
529	23^2
592	$2^4 * 37$
1696	$2^5 * 53$
5300	$2^2 * 5^2 * 53$
19072	$2^7 * 149$
70912	$2^8 * 277$
m =21	$m + 3 = 24$
75	$3 * 5^2$
95	$5 * 19$
99	$3^2 * 11$
119	$7 * 17$
135	$3^3 * 5$
143	$11 * 13$
196	$2^2 * 7^2$
32175	$3^2 * 5^2 * 11 * 13$
m =20	
92	$2^2 * 23$
364	$2^2 * 7 * 13$
460	$2^2 * 5 * 23$
5312	$2^6 * 83$
44500	$2^2 * 5^3 * 89$
78608	$2^4 * 17^3$

表 4: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
m =19	$m + 3 = 22$
57	$3 * 19$
85	$5 * 17$
125	5^3
m =18	
38	$2 * 19$
70	$2 * 5 * 7$
78	$2 * 3 * 13$
361	19^2
918	$2 * 3^3 * 17$
1110	$2 * 3 * 5 * 37$
12078	$2 * 3^2 * 11 * 61$
60534	$2 * 3^3 * 19 * 59$
81702	$2 * 3^3 * 17 * 89$
97734	$2 * 3 * 7 * 13 * 179$
285510	$2 * 3 * 5 * 31 * 307$
m =17	$m + 3 = 20$
50	$2 * 5^2$
51	$3 * 17$
91	$7 * 13$

表 5: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
m =16	
34	$2 * 17$
76	$2^2 * 19$
184	$2^3 * 23$
289	17^2
496	$2^4 * 31$
1504	$2^5 * 47$
2552	$2^3 * 11 * 29$
5056	$2^6 * 79$
69376	$2^8 * 271$
m =15	$m + 3 = 18$
65	$5 * 13$
77	$7 * 11$
162	$2 * 3^4$
m =14	
66	$2 * 3 * 11$
68	$2^2 * 17$
81	3^4
464	$2^4 * 29$
68864	$2^8 * 269$
750810	$2 * 3 * 5 * 29 * 863$

表 6: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
m =13	$m + 3 = 16$
39	$3 * 13$
55	$5 * 11$
63	$3^2 * 7$
m =12	
26	$2 * 13$
152	$2^3 * 19$
169	13^2
234	$2 * 3^2 * 13$
308	$2^2 * 7 * 11$
380	$2^2 * 5 * 19$
1376	$2^5 * 43$
11396	$2^2 * 7 * 11 * 37$
17792	$2^7 * 139$
17860	$2^2 * 5 * 19 * 47$
42704	$2^4 * 17 * 157$
267776	$2^9 * 523$
m =11	$m + 3 = 14$
33	$3 * 11$
m =10	
22	$2 * 11$
52	$2^2 * 13$
121	11^2
136	$2^3 * 17$
1312	$2^5 * 41$
4672	$2^6 * 73$
17536	$2^7 * 137$
266752	$2^9 * 521$

表 7: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
m =9	$m + 3 = 12$
35	$5 * 7$
45	$3^2 * 5$
19845	$3^4 * 5 * 7^2$
m =8	
44	$2^2 * 11$
340	$2^2 * 5 * 17$
368	$2^4 * 23$
500	$2^2 * 5^3$
4544	$2^6 * 71$
67328	$2^8 * 263$
m =7	$m + 3 = 10$
21	$3 * 7$
m =6	
14	$2 * 7$
42	$2 * 3 * 7$
49	7^2
54	$2 * 3^3$
104	$2^3 * 13$
198	$2 * 3^2 * 11$
546	$2 * 3 * 7 * 13$
930	$2 * 3 * 5 * 31$
1184	$2^5 * 37$
11682	$2 * 3^2 * 11 * 59$
747330	$2 * 3 * 5 * 29 * 859$

表 8: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
m =5	$m+3=8$
15	$3*5$
27	3^3
m =4	
10	$2*5$
25	5^2
28	2^2*7
88	2^3*11
304	2^4*19
4288	2^6*67
4700	2^2*5^2*47
16768	2^7*131
179744	$2^5*41*137$

表 9: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
$m = 2$	
9	3^2
6	$2 * 3$
20	$2^2 * 5$
272	$2^4 * 17$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
$m = 1$	
2	2
3	3
5	5
7	7
11	11
13	13
17	17
19	19
23	23
29	29
31	31
4	2^2
8	2^3
16	2^4
32	2^5

表 10: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
$m = -18$	
416	$2^5 * 13$
570	$2 * 3 * 5 * 19$
594	$2 * 3^3 * 11$
7098	$2 * 3 * 7 * 13^2$
13952	$2^7 * 109$
94458	$2 * 3 * 7 * 13 * 173$
$m = -16$	
3008	$2^6 * 47$
17296	$2^4 * 23 * 47$
24016	$2^4 * 19 * 79$
61184	$2^8 * 239$
$m = -15$	
392	$2^3 * 7^2$
45675	$3^2 * 5^2 * 7 * 29$
$m = -14$	
544	$2^5 * 17$
4100	$2^2 * 5^2 * 41$
14464	$2^7 * 113$
25230	$2 * 3 * 5 * 29^2$
61696	$2^8 * 241$

表 11: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
$m = -12$	
48	$2^4 * 3$
90	$2 * 3^2 * 5$
140	$2^2 * 5 * 7$
608	$2^5 * 19$
1768	$2^3 * 13 * 17$
20740	$2^2 * 5 * 17 * 61$
$m = -10$	
80	$2^4 * 5$
690	$2 * 3 * 5 * 23$
3392	$2^6 * 53$
$m = -9$	
$m = -8$	
112	$2^4 * 7$
736	$2^5 * 23$
2024	$2^3 * 11 * 23$
4300	$2^2 * 5^2 * 43$
$m = -7$	
36	$2^2 * 3^2$
$m = -6$	
126	$2 * 3^2 * 7$
462	$2 * 3 * 7 * 11$
702	$2 * 3^3 * 13$
4998	$2 * 3 * 7^2 * 17$
96990	$2 * 3 * 5 * 53 * 61$

表 12: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
$m = -4$	
24	$2^3 * 3$
176	$2^4 * 11$
220	$2^2 * 5 * 11$
3776	$2^6 * 59$
40528	$2^4 * 17 * 149$
64256	$2^8 * 251$
$m = -2$	
40	$2^3 * 5$
150	$2 * 3 * 5^2$
208	$2^4 * 13$
928	$2^5 * 29$
3904	$2^6 * 61$

2 $\Psi_{2,3}(a) = -m = -2$ の解

$m = 2$ のとき $\Psi_{2,3}(a) = -2$ の解を揃え直してみた. ただし $a < 10^6$ の範囲に限って計算した.

表 13: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
6	$2 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$
9	3^2
20	$2^2 * 5$
272	$2^4 * 17$
65792	$2^8 * 257$

第一ブロックの解は 2 から始まり順次素数が掛けられた数が解になるというはなはだ美麗な解の構造を持っている. この性質を利用して一般な解の構造を究明したい.

数 α が $\Psi_{2,3}(\alpha) = -2$ を満たすとき, それと互いに素な素数 p との積 $\beta = \alpha p$ も $\Psi_{2,3}(\beta) = -2$ を満たすとする.

$$
\begin{aligned}
\Psi_{2,3}(\beta) &= \sigma(\beta) + 2\varphi(\beta) - 3\beta \\
&= \sigma(\alpha)(p+1) + 2\varphi(\alpha)(p-1) - 3\alpha p \\
&= (\sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) - 3\alpha)p + \sigma(\alpha) - 2\varphi(\alpha) \\
&= -2.
\end{aligned}
$$

$\sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) - 3\alpha = -m$ により $-2p + \sigma(\alpha) - 2\varphi(\alpha) = -2.$
$\sigma(\alpha) = -2\varphi(\alpha) + 3\alpha = -m$ なのでこれを代入し

$$-2p + 3\alpha - 4\varphi(\alpha) = 0.$$

関数 $f(a) = 3 * a - 4\varphi(a)$ を導入すると

$$2p = f(\alpha).$$

$\alpha = 6$ とおくとき $2p = f(6) = 3 * 6 - 4\varphi(6) = 18 - 8.$ よって, $p = 5.$

$\alpha = 6 * 5$ とおくとき $2p = f(30) = 3 * 30 - 4\varphi(30) = 90 - 4 * 8 = 58.$ よって, $p = 29.$

$\alpha = 870 = 2 * 3 * 5 * 29$ とおくとき $2p = f(\alpha) = 1714 = 2 * 857.$ よって, $p = 857.$

$\alpha = 745590 = 2 * 3 * 5 * 29 * 857$ とおくとき $2p = f(\alpha) = 1469794 = 2 * 734897.$ よって, $p = 734897.$

$\alpha = 745590 = 2 * 3 * 5 * 29 * 857$ とおくとき $2p = f(\alpha) = 1469794 = 2 * 734897.$ よって, $p = 734897.$

$\alpha = 547931854230 = 2*3*5*29*857*734897$ とおくとき $2p = f(\alpha) = 1080147968194 = 2 * 540073984097.$

よって, $p = 540073984097.$

$\alpha = 2959237395276527421803l0 = 2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897 * 540073984097$ とおくとき

$2p = f(\alpha) = 583359816597376865405314 = 2 * 324589 * 898613040795247013.$

よって, $p = 324589 * 898613040795247013.$ 素数ではない.

以上を表にまとめる.

$\alpha = f(a)$ についての表

a	$factor$	$\varphi(a)$	α	$factor$
6	$2*3$	2	10	$2*5$
30	$2*3*5$	8	58	$2*29$
870	$2*3*5*29$	224	1714	$2*857$
745590	$2*3*5*29*857$	191744	1469794	$2*734897$
547931854230	$2*3*5*29*857*734897$	140911898624	X	Y
A	B	C	D	E

$X = 1080147968194$
$Y = 2*540073984097$
$A = 295923739527652742180310$
$B = 2*3*5*29*857*734897*540073984097$
$C = 76102850496395340283904$
$D = 583359816597376865405314$
$E = 2*324589*898613040795247013$
計算を続けると, この操作で 5,29,857,734897, 540073984097 と素数 p がここまで続く.
そこでこれらを掛けて
$\alpha = 295923739527652742180310 (= 2*3*5*29*857*734897*540073984097)$ とおく.
$f(\alpha) = 583359816597376865405314$ の素因数分解は
$2*324589*898613040795247013$ となり $2p$ の形にすると, $p = 324589*898613040795247013$ は素数にならない.
ここで解の列は終わる.

表 14: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m = -2$

a	素因数分解
6	$2*3$
30	$2*3*5$
870	$2*3*5*29$
745590	$2*3*5*29*857$
547931854230	$2*3*5*29*857*734897$
295923739527652742180310	$2*3*5*29*857*734897*540073984097$

2 に続いて特殊な意味を持つ素数が 6 個も続くのは大いなる不思議というべきである. 3 項完全数はこのような奇妙な素数列の発見につながったのだから意義のある概念と言って良いだろう.

私としてはここに生年月日である 5 月 29 日が出たことに密かな喜びを覚える.

3　フェルマ素数の積

注意 1 $a = 2\varphi(a) - 1$ の解に *3,3*5,3*5*17,3*5*17*257,3*5*17*257*65537* とフェルマ素数の積で書けるものがあった.

$2\varphi(a) - a = 1$ を満たすとき
$a' = ap$ とおき ($a < p$ となる素数 p) $2\varphi(a') - a' = N$ としてみる.
$2\varphi(a') = 2\varphi(a)(p-1) = a' + N$ に $2\varphi(a) = a + 1$ を代入すると

$$2\varphi(a') = (a+1)(p-1) = a' - a + p - 1 = a' + N$$

から $p = a + N + 1$.

したがって解 a に $N + 1$ を加えた $p = a + N + 1$ が素数なら $2\varphi(a') - a' = N$ を満たす解 $a' = pa$ がえられる.

$N = 1$ とする.$p = a + N + 1 = a + 2$ なので, 解 a に対し $p = a + 2$ が素数なら次なる解ができ巧くいけば次々に解がでてくる.

$2\varphi(a) - a = 1$ の一番小さい解 $a = 3$ からはじめる.

表 15: $2\varphi(a) - a = 1$, の解

a	$p = a + 2$	$a' = ap$
3	5	15=3*5
3*5	17	3*5*17
3*5*17	257	3*5*17*257
3*5*17*257	65537	3*5*17*257*65537

最後の $a = 3*5*17*257*65537 = 4,294,967,295$ 100 万を大きく超えるので, 表には出ていない.

解 $a = 3*5*17*257*65537 = 4294967295$ に対して $a + 2 = 4294967297 = 641 * 67004174294967297$ は素数ではない. ここで, 系列は終了する.

$2\varphi(a)-a=1$ の解 a に対して $a<p<q$ となる素数 p,q を用いて解 $a''=apq$ がある定数 N について方程式 $2\varphi(a)=a+N$ の解と 仮定する．この解なので $2\varphi(a'')=a''+N$ を満たす.

$\varphi(a'')=\varphi(a)(p-1)(q-1)$ によって $B=pq, \Delta=p+q$ とおくとき

$$2\varphi(a'')=2\varphi(a)(B-\Delta+1)=(a+1)(B-\Delta+1)=a''+N=aB+N.$$

それゆえ

$$(a+1)(B-\Delta+1)-aB=B-\Delta+1-a(\Delta+1)=N.$$

$B-\Delta(a+1)=N-a-1$ をえるので $\widetilde{a}=a+1$ を用いて

$$(p-\widetilde{a})(q-\widetilde{a})=\widetilde{a}^2+N-a-1=a^2+a+N.$$

$p_0=p-\widetilde{a}, q_0=q-\widetilde{a}, D=a^2+a+N$ とおくとき,$p_0q_0=D$ を満たす.

ここで話を逆転させる．与えられた a,N に対し $D=a^2+a+N$ とおく．これを $p_0q_0=D$ と分解し.

ここで $p=p_0+\widetilde{a}$ と $q=q_0+\widetilde{a}$ がともに素数となるとすれば, $a''=apq$ が解となる.

3.1 数値例

$N=1, a=3$ とすれば, $\widetilde{a}=4, D=12+1=13$. これは素数なので, $p_0=1, q_0=13$ とおくとき

$p=4+p_0=5, q=4+q_0=17$. よって解 $a''=3*5*17$ を得る.

表 16: $2\varphi(a)-a=1$ の解を作る

a	$\widetilde{a}$	D	p,q	$a'=apq$
3	4	13=1*13	$p=5, q=17$	$3*5*17$
3*5	16	241=1*241	$p=17, q=257$	$3*5*17*257$
3*5*17	256	65281=1* 65281	$p=257, q=65537$	$3*5*17*257*65537$
3*5*17	256	65281=97*673	$p=353, q=929$	$3*5*17*353*929$

ここで, 解 $a_1=3*5*17*257*65537$ と $a_2=3*5*17*353*929$ が出てきた.

$p=a_2+2=3*5*17*353*929+2=83623937$ は素数なので, $3*5*17*353*929*83623937$ も 解になる.

このようにして,$2\varphi(a)-a=1$ のより完全な解の表ができた.

表 17: $2\varphi(a) - a = 1$, より完全な表

a	素因数分解
3	3
15	$3 * 5$
255	$3 * 5 * 17$
65535	$3 * 5 * 17 * 257$
4294967295	$3 * 5 * 17 * 257 * 65537$
83623935	$3 * 5 * 17 * 353 * 929$
6992962672132095	$3 * 5 * 17 * 353 * 929 * 83623937$

しかしながら $2\varphi(a) - a = 1$ の解が上の表で尽きているかどうかはわからない.

4 勇気をもて

$\Psi_{2,3}(\alpha)=\sigma(\alpha)+2\varphi(\alpha)-3\alpha=-m$

を満たすとき α を割らない素数 $r,s(r<s)$ について, $\beta=\alpha rs$ が $\Psi_{2,3}(\beta)=-m$ を満たすと仮定する.

$B=rs,\Delta=r+s$ とおくとき

$\sigma(\beta)=\sigma(\alpha)(B+\Delta+1),\varphi(\beta)=\varphi(\alpha)(B-\Delta+1),-3\beta=-3\alpha B$ なので,

$$\begin{aligned}-m&=\Psi_{2,3}(\beta)\\&=\Psi_{2,3}(\alpha)B+(\sigma(\alpha)-2\varphi(\alpha))\Delta+Y\\&=-mB+(\sigma(\alpha)-2\varphi(\alpha))\Delta+Y\end{aligned}$$

ここで $Y=\sigma(\alpha)+2\varphi(\alpha)$ とおいた

$\sigma(\alpha)=-m-2\varphi(\alpha)+3\alpha$ なので,

$$\sigma(\alpha)-2\varphi(\alpha)=-m-4\varphi(\alpha)+3\alpha,Y=-m+3\alpha.$$

したがって,

$$-m=-mB+(-m-4\varphi(\alpha)+3\alpha)\Delta-m+3\alpha.$$

ここで $m=2$ として, さらに α は偶数と仮定して, $\alpha=2\alpha'(\alpha'$:奇数 (とおくと,

$$B=3\alpha'+(-1-2\varphi(\alpha')+3\alpha')\Delta.$$

そこで, $\xi=-1-2\varphi(\alpha')+3\alpha',q_0=q-\xi,r_0=r-\xi$ とおけば, $B=3\alpha'+(-1-2\varphi(\alpha')+3\alpha')\Delta=3\alpha'+\xi\Delta$.

以上によって,

$$B_0=q_0r_0=(q-\xi)(r-\xi)=B-\xi\Delta+\xi^2=3\alpha'+\xi^2.$$

$\Theta=3\alpha'+\xi^2$ とおき, α については 6 から順次 6,6*5,6*5*29 などを代入し. $\alpha'=\alpha/2$ により, $\xi=-1-2\varphi(\alpha')+3\alpha',\Theta=3\alpha'+\xi^2$ を計算し Θ の 2 因子分解 q_0r_0 を行い $q=q_0+\xi,r=r_0+\xi$ が素数になる場合を調べる.

5 計算

1) $\alpha' = 3$, $\xi = 4$, $\Theta = 25 = 5^2 = 1 * 25$, $q = 1 + \xi = 5, r = 25 + \xi = 29$. $(q = 5, r = 29)$
.

2) $\alpha' = 15$, $\xi = 28$, $\Theta = 829 = 1 * 829$, $q = 1 + \xi = 29, r = 829 + \xi = 857$. $(q = 29, r = 857)$.

3) $\alpha' = 435$, $\xi = 856$, $\Theta = 734041 = 7 * 11 * 9533$.

$\Theta = 734041 = 7 * 11 * 9533$ の素因数分解は 4 通りある.

- $\Theta = 734041 = 1 * 734041$, $q = 1 + \xi = 857, r = 734041 + \xi = 734897$. $(q = 857, r = 734897)$.
- $\Theta = 734041 = 7 * 11 * 9533, q = 7 + \xi = 863$:素数,$r = 11 * 9533 + \xi = 734897 + \xi = 105719 = 71 * 1489$; 非素数.
- $\Theta = 734041 = 7 * 11 * 9533, q = 11 + \xi = 867 = 3 * 17^2$: 非素数.
- $\Theta = 734041 = 7 * 11 * 9533, q = 7 * 11 + \xi = 933$; 非素数.

4) $\alpha' = 273965927115$, $\xi = 540073984096$, $\Theta = 291679908298148358718561 = 13 * 73 * 307355014012801220989$.

ここからは素数はでて来ない.

- $\Theta = 291679908298148358718561, q = 1 + \xi = 540073984097, r = 291679908298148358718561 + \xi = 324589 * 898613040795247013$; 非素数.
- $k : 13 + 540073984096, r = k + \xi = 11 * 1951 * 25165369$; 非素数.
- $k : 13 + 540073984096, r = k + \xi = 53 * 227 * 487 * 92177$; 非素数.
- $k : 13 * 73 + 540073984096, r = k + \xi = 5 * 7 * 6823 * 2261569$; 非素数.

6　次の問題

次の問題を提起する．

注意 2 $\Psi_{2,3}(a) = -1$ を満たす解は 素数または *2* べきになるか

7 $\Psi_{2,3}(a) = 0$ の場合

$m = 0$ のとき, すなわち $\Psi_{2,3}(a) = 0$ の解は非常に興味深い.
このときの解を, 新しい完全数と考えて 3 項完全数という.
$\sigma(a) + 2\varphi(a) = 3a$ を 3 項完全数の定義式という.
1000 万以下に限って解を求めてみた.
(A 型解) は完全数の 2 倍.
(D 型解) はかなり多い.
(F 型解) は次の 2 つ.

1. $a = 275 = 2 * 3^4 * 17$
2. $a = 2156 = 2^2 * 7^2 * 11$.

表 18: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
$m = 0$	
12	$2^2 * 3$(A 型解)
56	$2^3 * 7$
992	$2^5 * 31$
16256	$2^7 * 127$
260	$2^2 * 5 * 13$ (D 型解)
1976	$2^3 * 13 * 19$
25232	$2^4 * 19 * 83$
41072	$2^4 * 17 * 151$
133984	$2^5 * 53 * 79$
145888	$2^5 * 47 * 97$
1100864	$2^6 * 103 * 167$
1270208	$2^6 * 89 * 223$
1439552	$2^6 * 83 * 271$
2237888	$2^6 * 73 * 479$
4729664	$2^6 * 67 * 1103$
2754	$2 * 3^4 * 17$ (F 型解)
2156	$2^2 * 7^2 * 11$ (F 型解)

$m = 0$ の場合は完全数ぽい解が多数出てくる. この場合を新世代完全数または 3 頭完全数 (perfect numbers with three heads) という.
(A 型解) $a = 2^e q$, $(2 < q :$ 素数$)$ の場合. $N = 2^{e+1} - 1$ とおくとき
$\sigma(a) = \sigma(2^e q) = N(q+1), 2\varphi(a) = 2^e(q-1) = \frac{N+1}{2}(q-1)$ により,
$\sigma(a) - 3a + 2\varphi(a) = N(q+1) - 3 * \frac{N+1}{2}(q-1) + \frac{N+1}{2}(q-1) = 0$

これより $-q+\frac{N-1}{2}=0$. 結局, $q=2^e-1$ は素数になる. このとき, $\alpha=2^{e-1}q$ は完全数で, $a=2\alpha$.

すなわち (A 型解) $a=2^eq$ は完全数の 2 倍となっている.

(D 型解) $a=2^epq$, $(2<p<q, p, q:$ 素数$)$ の場合. $N=2^{e+1}-1, B=pq, \Delta=p+q$ を用いると $a=2^epq$ に対して, $B=pq, \Delta=p+q$ とおくとき

$\sigma(a)=\sigma(2^eqp)=N(p+1)(q+1)=N(B+\Delta+1)$

$2\varphi(a)=2\varphi(2^eqp)=\frac{N+1}{2}(p-1)(q-1)=\frac{(N+1)(B-\Delta+1)}{2}$

$$\sigma(a)+2\varphi(a)=3a, 0=-B+\frac{N-1}{2}\Delta+\frac{3N+1}{2}.$$

$u=2^e$ とおくとき,

$B=(u-1)\Delta+3u-1$. $p_0=p-u+1, q_0=q-u+1, B_0=p_0q_0$ とおくと,

$B_0=p_0q_0=B-(u-1)\Delta+(u-1)^2$ となるので, $B=B_0+(u-1)\Delta-(u-1)^2$

$B_0+(u-1)\Delta-(u-1)^2=B=(u-1)\Delta+3u-1$ により, $B_0=(u-1)^2+3u-1=u(u+1)$.

$\Theta=u(u+1), B_0=p_0q_0=\Theta$.

7.1 アルゴリズムで D 型解を求める

そこで次のアルゴリズムで D 型解 が求まる.

与えられた $e>0$ に対して, $u=2^e, \Theta=u(u+1)$ とおく. $p_0q_0=\Theta$ と 2 因子に分解する. $p=p_0+u+1, q=q_0+u+1$ がともに素数なら $a=2^epq$ が解になる.

一般の m の場合も同じような結果が出る.

(A 型解) $a=2^eq$, $(2<q:$ 素数$)$ の場合. $N=2^{e+1}-1$ とおくとき

$\sigma(a)=\sigma(2^eq)=N(q+1), 2\varphi(a)=2^e(q-1)=\frac{N+1}{2}(q-1)$ により,

$\sigma(a)-3a+2\varphi(a)=N(q+1)-3*\frac{N+1}{2}(q-1)+\frac{N+1}{2}(q-1)=-m$

これより $-q+\frac{N-1}{2}=m$. 結局, $q=2^e-1-m$ は素数になる. このとき, $\alpha=2^{e-1}q$ は m だけ平行移動した完全数で, $a=2\alpha$.

すなわち (A 型解) $a=2^eq$ は m だけ平行移動した完全数の 2 倍となっている.

(D 型解) $a=2^epq$, $(2<p<q, p, q:$ 素数$)$ の場合. $N=2^{e+1}-1, B=pq, \Delta=p+q$ を用いると $a=2^epq$ に対して, $B=pq, \Delta=p+q$ とおくとき

$\sigma(a)=\sigma(2^eqp)=N(p+1)(q+1)=N(B+\Delta+1), 2\varphi(a)=2\varphi(2^eqp)=\frac{N+1}{2}(p-1)(q-1)=\frac{(N+1)(B-\Delta+1)}{2}$

$$m=\sigma(a)-2\varphi(a)=2\varphi(2^eqp)+3a=-B+\frac{N-1}{2}\Delta+\frac{3N+1}{2}.$$

$u=2^e$ とおくとき,

$B=(u-1)\Delta+3u-1-m$. $p_0=p-u+1, q_0=q-u+1, B_0=p_0q_0$ とおくと,

$B_0=p_0q_0=B-(u-1)\Delta+(u-1)^2-m$ となるので, $B=B_0+(u-1)\Delta-(u-1)^2-m$

$B_0+(u-1)\Delta-(u-1)^2=B=(u-1)\Delta+3u-1$ により, $B_0=(u-1)^2+3u-1=u(u+1)$.

$\Theta=u(u+1)-m, B_0=p_0q_0=\Theta$.

表 19: D 型解

e	$a=2^epq$	p	q
2	260	5	13
3	1976	13	19
4	25232	19	83
	41072	17	151
5	133984	53	79
	145888	47	97
6	1100864	103	167
	1270208	89	223
	1439552	83	271
	2237888	73	479
	4729664	67	1103
7	75398912	383	769
	2181070592	257	33151
8	538178048	967	1087
	558585344	853	1279
	629225984	739	1663
	1192258048	587	3967
9	4534854656	1663	2663
	5257665536	1433	3583
	7853499392	1223	6271
	13246297088	1123	11519
	15974122496	1103	14143

表 20: $\Psi_{2,3}(a)=\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-m$

a	素因数分解
$m=4$	
24	2^3*3
176	2^4*11
220	2^2*5*11

7.2 アルゴリズムで D 型解を求める

そこで次のアルゴリズムで D 型解 が求まる.

与えられた $e>0$ に対して, $u=2^e, \Theta=u(u+1)-m$ とおく. $p_0q_0=\Theta$ と 2 因子に分解する. $p=p_0+u+1, q=q_0+u+1$ がともに素数なら $a=2^epq$ が解になる.

表 21: D 型解

e	$a = 2^e pq$	p	q
2	260	5	13
3	1976	13	19
4	25232	19	83
	41072	17	151
5	133984	53	79
	145888	47	97
6	1100864	103	167
	1270208	89	223
	1439552	83	271
	2237888	73	479
	4729664	67	1103
7	75398912	383	769
	2181070592	257	33151
8	538178048	967	1087
	558585344	853	1279
	629225984	739	1663
	1192258048	587	3967
9	4534854656	1663	2663
	5257665536	1433	3583
	7853499392	1223	6271
	13246297088	1123	11519
	15974122496	1103	14143

$m = 20$ のとき,$a = 12p, (p \geq 5$: 素数) という一般解 (B 型解) が現れた. 元祖完全数では 平行移動 -12 のとき解 $a = 6p, (p \geq 3$: 素数) という一般解と少数のエイリアン解が現れたことと類似している.

そこで, $\Psi_{2,3}(a) = m$ についてもある定数 k について $a = kp, gcd(p, k) = 1$: 素数) という一般解を持つとしよう.

$\Psi_{2,3}(a) = m_0$ に $a = kp$ を代入する.

$\sigma(a) = \sigma(k)(p+1), \varphi(a) = \varphi(k)(p-1)$ によって,

$$\Psi_{2,3}(a) = \sigma(k)(p+1)+2\varphi(k)(p-1)-3kp = (\sigma(k)+2\varphi(k)-3k)p+\sigma(k)-2\varphi(k) = m_0.$$

これが無数の p について成り立つので,

$$\sigma(k) + 2\varphi(k) - 3k = 0, \sigma(k) - 2\varphi(k) = m_0.$$

始めの 2 個は 12,56 であり完全数の 2 倍. 992 も第 3 完全数の 2 倍.

$260 = 2^2 * 5 * 13$ が定数項 396 で現れる完全数の変種と見ることができる.

表 22: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = m$

a	素因数分解
$m = 2$	
40	$2^3 * 5$
208	$2^4 * 13$
928	$2^5 * 29$
3904	$2^6 * 61$
260608	$2^9 * 509$
150	$2 * 3 * 5^2$
$m = 4$	
24	$2^3 * 3$
176	$2^4 * 11$
220	$2^2 * 5 * 11$

表 23: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = m, m = 20$

a	素因数分解
$m = 20$	
60	$2^2 * 3 * 5$
84	$2^2 * 3 * 7$
132	$2^2 * 3 * 11$
156	$2^2 * 3 * 13$
204	$2^2 * 3 * 17$
228	$2^2 * 3 * 19$
276	$2^2 * 3 * 23$
348	$2^2 * 3 * 29$
352	$2^5 * 11$
372	$2^2 * 3 * 31$

表 24: $\sigma(k)+2\varphi(k)-3k=0, m_0=\sigma(k)-2\varphi(k)$: 定数項 m_0

k	素因数分解	定数項 m_0
12	2^2*3	20
56	2^3*7	72
260	2^2*5*13	396
992	2^5*31	1056
1976	$2^3*13*19$	2472
2156	2^2*7^2*11	3108
2754	$2*3^4*17$	4806
16256	2^7*127	16512
25232	$2^4*19*83$	28464
41072	$2^4*17*151$	46416