新しい完全数と不変数 $\Psi(a)$

飯高 茂

平成 31 年 6 月 7 日

1　新しいかもしれない不変数 $\Psi(a)$

$\sigma(a), \varphi(a)$ を組み合わせて $\Psi(a) = \sigma(a) + \varphi(a) - 2a$ と定義してみた.

p を素数とすると $\Psi(p) = \sigma(p) + \varphi(p) - 2a = p + 1 + p - 1 - p = 0$ となる. この逆が成り立てば素数の判定法が 1 つできるので面白いかもしれない.

どうなるか分からないのでパソコンで計算してみた.

- $\Psi(a) = 0$ なら a : 素数
- $\Psi(a) = 1$ なら a : 素数の平方
- $\Psi(a) = 2$ なら a : 相異なる 2 素数の積

これ以外の m なら $\Psi(a) = m$ の解は有限個 (水谷一) このような結果は驚くほど鮮やかである.

このように美しい結果が出るとき, 昔の人がすでに知っていることが多い. そこで 新しいかもしれない不変数 $\Psi(a)$ と題してみた.

課題

$\Psi(a)_{2,3} = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a$ とおいてみよう.

$\Psi(a)_{2,3} = 0$ となるとき a は素数, または 2 べき, となるらしい.

表 1: $\Psi(a) = \sigma(a) + \varphi(a) - 2a = m$

a	素因数分解	a	素因数分解
$m = 0$		$m = 1$	
p:素数	p	p^2	p^2
$m = 2$			
pq $(p, q > p$:素数)	pq		
$m = 3$		$m = 17$	
8	2^3	98	$2 \ast 7^2$
$m = 4$		$m = 18$	
27	3^3	52	$2^2 \ast 13$
$m = 6$		99	$3^2 \ast 11$
125	5^3	147	$3 \ast 7^2$
$m = 7$		175	$5^2 \ast 7$
16	2^4	4913	17^3
$m = 8$		$m = 20$	
12	$2^2 \ast 3$	24	$2^3 \ast 3$
343	7^3	30	$2 \ast 3 \ast 5$
$m = 9$		117	$3^2 \ast 13$
18	$2 \ast 3^2$	245	$5 \ast 7^2$
$m = 10$		6859	19^3
20	$2^2 \ast 5$	$m = 22$	
$m = 12$		68	$2^2 \ast 17$
28	$2^2 \ast 7$	275	$5^2 \ast 11$
45	$3^2 \ast 5$	$m = 24$	
1331	11^3	42	$2 \ast 3 \ast 7$
$m = 13$		76	$2^2 \ast 19$
50	$2 \ast 5^2$	153	$3^2 \ast 17$
81	3^4	325	$5^2 \ast 13$
$m = 14$		12167	23^3
63	$3^2 \ast 7$	$m = 25$	
75	$3 \ast 5^2$	242	$2 \ast 11^2$
2197	13^3	$m = 26$	
$m = 15$		40	$2^3 \ast 5$
32	2^5	171	$3^2 \ast 19$
$m = 16$		363	$3 \ast 11^2$
44	$2^2 \ast 11539$	$7^2 \ast 11$	

表 2: $\Psi(a) = \sigma(a) + \varphi(a) - 2a = m$

a	素因数分解	a	素因数分解
$m = 28$		$m = 36$	
70	$2 * 5 * 7$	78	$2 * 3 * 13$
92	$2^2 * 23$	110	$2 * 5 * 11$
425	$5^2 * 17$	124	$2^2 * 31$
605	$5 * 11^2$	261	$3^2 * 29$
637	$7^2 * 13$	1573	$11^2 * 13$
$m = 29$		$m = 37$	
338	$2 * 13^2$	578	$2 * 17^2$
$m = 30$		$m = 38$	
54	$2 * 3^3$	165	$3 * 5 * 11$
105	$3 * 5 * 7$	279	$3^2 * 31$
207	$3^2 * 23$	867	$3 * 17^2$
475	$5^2 * 19$	1127	$7^2 * 23$
507	$3 * 13^2$	1859	$11 * 13^2$
847	$7 * 11^2$	50653	37^3
24389	29^3	$m = 40$	
$m = 31$		130	$2 * 5 * 13$
36	$2^2 * 3^2$	154	$2 * 7 * 11$
64	2^6	243	3^5
625	5^4	725	$5^2 * 29$
$m = 32$		1445	$5 * 17^2$
56	$2^3 * 7$	2057	$11^2 * 17$
66	$2 * 3 * 11$	$m = 41$	
833	$7^2 * 17$	722	$2 * 19^2$
845	$5 * 13^2$	$m = 42$	
29791	31^3	135	$3^3 * 5$
$m = 34$		148	$2^2 * 37$
116	$2^2 * 29$	195	$3 * 5 * 13$
575	$5^2 * 23$	231	$3 * 7 * 11$
931	$7^2 * 19$	775	$5^2 * 31$
1183	$7 * 13^2$	1083	$3 * 19^2$

$\Psi(a)=0$ のとき, a は素数.
$\Psi(a)=1$ のとき, a は素数の平方.
$\Psi(a)=2$ のとき, a は2素数の積.
$\Psi(4p)=5+p, \Psi(6p)=10+2p$
$\omega(a)$ によって,a の相異なる素因子の個数を示す.

2 $\omega(a)=1$ の場合

$a=p^e$ とする. $p-1=\overline{p}$ もよく使う.

$$\Psi(a)=\sigma(p^e)+\varphi(p^e)-2p^e=\frac{p^{e+1}-1}{\overline{p}}+\overline{p}p^{e-1}-2p^e.$$

$p-1$ 倍して

$$\overline{p}\Psi(a)=p^{e+1}-1+\overline{p}^2p^{e-1}-2p^e\overline{p}=p^{e-1}-1.$$

ゆえに $\Psi(a)=\dfrac{p^{e-1}-1}{\overline{p}}=\sigma(p^{e-2})$.
$e=1$ なら, $\Psi(a)=\Psi(p)=0$.
$e=2$ なら, $\Psi(a)=\Psi(p^2)=\sigma(1)=1$.
$e=3$ なら, $\Psi(a)=\Psi(p^3)=\sigma(p)=1+p$.
$e=4$ なら, $\Psi(a)=\Psi(p^4)=\sigma(p^2)=1+p+p^2$.
とくに, $\Psi(2^3)=\sigma(2)=1+2=3$.

3 $\omega(a)=2$ の場合

$a=p^eq^f$ とする.
$\sigma(a)=\dfrac{(p^{e+1}-1)(q^{f+1}-1)}{\overline{pq}}, \varphi(a)=p^{e-1}q^{f-1}\overline{pq}, 2a=2p^eq^f$.
$\Psi(p^eq^f)=\dfrac{(p^{e+1}-1)(q^{f+1}-1)}{\overline{pq}}+p^{e-1}q^{f-1}\overline{pq}-2p^eq^f$ を
$T=\overline{pq}$ 倍すると

$$T\Psi(p^eq^f)=p^{e-1}q^{f-1}(p^2q^2+\overline{p}^2\overline{q}^2-2pq\overline{pq})-p^{e+1}-q^{f+1}+1.$$

$X=p^2q^2+\overline{p}^2\overline{q}^2-2pq\overline{pq}), Y=pq-\overline{pq}, \Delta=p+q$ とおくとき, 簡単な計算によって $X=Y^2, Y=\Delta-1$.

かくして,

$$T\Psi(p^eq^f)=p^{e-1}q^{f-1}(\Delta-1)^2-p^{e+1}-q^{f+1}+1.$$

ここで計算の確認のため, $e=f=1$ と仮定する.

$$T\Psi(p^eq^f)=p^{e-1}q^{f-1}(\Delta-1)^2-p^{e+1}-q^{f+1}+1=(p+q-1)^2-p^2-q^2+1=2pq-2\Delta+2=2\overline{pq}=2T.$$

よって, $\Psi(pq)=2$.
A 型なら
$\Psi(2^e q)=(2^{e-1}-1)q+3*2^{e-1}-1$.

4 $\omega(\alpha)\geq 3$ の場合

α の最大素因子を r, α の r での指数 を e とすると $r\geq 5, \alpha=ar^e, \omega(\alpha)-1=\omega(a)\geq 2$.
$\sigma(\alpha)=\sigma(a)\dfrac{r^{e+1}-1}{\overline{r}}, \varphi(\alpha)=\varphi(a)r^{e-1}\overline{r}, 2\alpha=2ar^e$ によって $\overline{r}$ 倍すれば

$$\overline{r}\Psi(\alpha)=\sigma(a)(r^{e+1}-1)+\varphi(a)r^{e-1}\overline{r}^2-2a\overline{r}r^e.$$

$\sigma(a)=\Psi(a)-\varphi(a)+2a$ を用いて変形して

$$\overline{r}\Psi(\alpha)=(\Psi(a)-\varphi(a)+2a)(r^{e+1}-1)+\varphi(a)r^{e-1}\overline{r}^2-2a\overline{r}r^e.$$

$\omega(a)\geq 2$ により $\Psi(a)\geq 2$ によって,

$$\overline{r}\Psi(\alpha)\geq \Psi(a)(r^{e+1}-1)+(-\varphi(a)+2a)(r^{e+1}-1)+\varphi(a)r^{e-1}\overline{r}^2-2a\overline{r}r^e.$$

$W=(-\varphi(a)+2a)(r^{e+1}-1)+\varphi(a)r^{e-1}\overline{r}^2-2a\overline{r}r^e$ とおくと $\overline{r}\Psi(\alpha)=\Psi(a)(r^{e+1}-1)+W$.
W が正になることを確認する.
$W=\varphi(a)U+2aV$. ただし $U=r^{e-1}\overline{r}^2+1-r^{e+1}=1-2r^e+r^{e-1}<0, V=r^{e+1}-1-\overline{r}r^e=r^e-1$.
$U<0$ によって, $\varphi(a)U\geq (a-1)U$. $r\geq 5$ を使い,

$$\begin{aligned}
W=\varphi(a)U+2aV &\geq (a-1)U+2aV\\
&=a(2V+U)-U\\
&=a(2r^e-2+1-2r^e+r^{e-1})-U\\
&=a(r^{e-1}-1)-U\\
&=a(r^{e-1}-1)-(1-2r^e+r^{e-1})\\
&=a(r^{e-1}-1)-1+2r^e-r^{e-1})\\
&\geq 12(r^{e-1}-1)-1+2r^e-r^{e-1})\\
&=-13+10r^{e-1}+2r^e.
\end{aligned}$$

$$\overline{r}\Psi(\alpha)=\Psi(a)(r^{e+1}-1)+W$$

$$\begin{aligned}\overline{r}\Psi(\alpha) &= \Psi(a)(r^{e+1}-1)+W \\ &= 2(r^{e+1}-1)+W \\ &\geq 2r^{e+1}-15+10r^{e-1}+2r^{e}\end{aligned}$$

5　$\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a$ の場合

$\sigma(a)$ と $\varphi(a)$ を 1:2 で加重平均をとるとしてみよう．$a = p$ が素数の場合は $\sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = p + 1 + 2(p-1) - 3p = -1$ になるので $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a$ と定義する．

$\Psi_{2,3}(p) = -1$ になるが計算してみると $a = 2^e$ でも $\Psi_{2,3}(2^e) = -1$ を満たす．

表 3: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = m$

a	素因数分解
$m = -2$	
9	3^2
6	$2 * 3$
20	$2^2 * 5$
272	$2^4 * 17$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
$m = -1$	
2	2
3	3
5	5
7	7
11	11
13	13
17	17
19	19
23	23
29	29
31	31
4	2^2
8	2^3
16	2^4
32	2^5

$m \leq -2$ についても $\Psi_{2,3}(a) = m$ を満たす解は無数にありそうである．

とりあえず次の問題を提起する．

注意 1 $\Psi_{2,3}(a) = -1$ を満たす解は *素数または 2 べきになるか*

6 $\Psi_{2,3}(a)=0$ の場合

$m=0$ のとき, すなわち $\Psi_{2,3}(a)=0$ の解は非常に興味深い.
このときの解を, 新しい完全数という.
$\sigma(a)+2\varphi(a)=3a$ を新しい完全数の定義式という.
1000 万以下に限って解を求めてみた.
(A 型解) は完全数の 2 倍.
(D 型解) はかなり多い.
(F 型解) は次の 2 つ.

1. $a=275=2*3^4*17$
2. $a=2156=2^2*7^2*11$.

表 4: $\Psi_{2,3}(a)=\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=m$

a	素因数分解
$m=0$	
12	2^2*3(A 型解)
56	2^3*7
992	2^5*31
16256	2^7*127
260	2^2*5*13 (D 型解)
1976	$2^3*13*19$
25232	$2^4*19*83$
41072	$2^4*17*151$
133984	$2^5*53*79$
145888	$2^5*47*97$
1100864	$2^6*103*167$
1270208	$2^6*89*223$
1439552	$2^6*83*271$
2237888	$2^6*73*479$
4729664	$2^6*67*1103$
2754	$2*3^4*17$ (F 型解)
2156	2^2*7^2*11 (F 型解)

$m=0$ の場合は完全数ぽい解が多数出てくる.
(A 型解) $a=2^eq$, $(2<q:$ 素数) の場合. $N=2^{e+1}-1$ とおくとき
$\sigma(a)=\sigma(2^eq)=N(q+1), 2\varphi(a)=2^e(q-1)=\frac{N+1}{2}(q-1)$ により,
$\sigma(a)-3a+2\varphi(a)=N(q+1)-3*\frac{N+1}{2}(q-1)+\frac{N+1}{2}(q-1)=0$
これより $-q+\frac{N-1}{2}=0$. 結局, $q=2^e-1$ は素数になる. このとき, $\alpha=2^{e-1}q$ は完全数で, $a=2\alpha$.

すなわち (A 型解) $a=2^eq$ は完全数の 2 倍となっている.

(D 型解) $a=2^epq$, $(2<p<q, p,q:$ 素数$)$ の場合. $N=2^{e+1}-1, B=pq, \Delta=p+q$ を用いると $a=2^epq$ に対して, $B=pq, \Delta=p+q$ とおくとき

$\sigma(a)=\sigma(2^eqp)=N(p+1)(q+1)=N(B+\Delta+1), 2\varphi(a)=2\varphi(2^eqp)=\frac{N+1}{2}(p-1)(q-1)=\frac{(N+1)(B-\Delta+1)}{2}$

$$\sigma(a)-2\varphi(a)=2\varphi(2^eqp)+3a=-B+\frac{N-1}{2}\Delta+\frac{3N+1}{2}.$$

$u=2^e$ とおくとき,

$B=(u-1)\Delta+3u-1$. $p_0=p-u+1, q_0=q-u+1, B_0=p_0q_0$ とおくと,

$B_0=p_0q_0=B-(u-1)\Delta+(u-1)^2$ となるので, $B=B_0+(u-1)\Delta-(u-1)^2$

$B_0+(u-1)\Delta-(u-1)^2=B=(u-1)\Delta+3u-1$ により, $B_0=(u-1)^2+3u-1=u(u+1)$.

$\Theta=u(u+1), B_0=p_0q_0=\Theta$.

6.1 アルゴリズムで D 型解を求める

そこで次のアルゴリズムで D 型解 が求まる.

与えられた $e>0$ に対して, $u=2^e, \Theta=u(u+1)$ とおく. $p_0q_0=\Theta$ と 2 因子に分解する. $p=p_0+u+1, q=q_0+u+1$ がともに素数なら $a=2^epq$ が解になる.

表 5: D 型解

e	$a = 2^e pq$	p	q
2	260	5	13
3	1976	13	19
4	25232	19	83
	41072	17	151
5	133984	53	79
	145888	47	97
6	1100864	103	167
	1270208	89	223
	1439552	83	271
	2237888	73	479
	4729664	67	1103
7	75398912	383	769
	2181070592	257	33151
8	538178048	967	1087
	558585344	853	1279
	629225984	739	1663
	1192258048	587	3967
9	4534854656	1663	2663
	5257665536	1433	3583
	7853499392	1223	6271
	13246297088	1123	11519
	15974122496	1103	14143

表 6: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = m$

a	素因数分解
$m = 2$	
40	$2^3 * 5$
208	$2^4 * 13$
928	$2^5 * 29$
3904	$2^6 * 61$
260608	$2^9 * 509$
150	$2 * 3 * 5^2$
$m = 4$	
24	$2^3 * 3$
176	$2^4 * 11$
220	$2^2 * 5 * 11$